6.3.2006

# Scheinklausur zur Linearen Algebra I, WS 05/06, Nachholklausur

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Eigenhändige Unterschrift: ____________________

| | Krz | Erg | 8 | 9 | 10 | 11 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | |
| Nachk. | | | | | | | |

### Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
**Auswertung:** Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

### Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

### Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen, es sei denn, es ist explizit gefordert.

# Gruppe A

## Nachholklausur, 6.3.2006

## Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

**Name:** ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
**Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben:** Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt $-1$ Punkt, keine Angabe zählt $0$ Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens $0$ Punkte.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig? | |
| | Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens $2$ Lösungen. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit weniger Unbekannten als Gleichungen hat keine Lösungen. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m\times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn $b$ im Spaltenraum von $A$ liegt. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 2 | Es seien $K$ ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den $K$-Vektorräumen $V$ und $W$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? | |
| | Bild $\psi \subseteq$ Bild $\psi \circ \varphi$ | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Kern $\varphi \subseteq$ Kern $\psi \circ \varphi$ | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Bild $\psi \circ \varphi \subseteq$ Bild $\varphi \circ \psi$ | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Kern $\varphi \circ \psi \circ \varphi =$ Kern $\varphi$ | ☐ Ja ☐ Nein |
| 3 | Es sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $A, B, C \in K^{n\times n}$. | |
| | Es gilt $\det(A - B) = \det(A) - \det(B) + \det(AB)$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $\det(AB) = 1$, dann ist $A$ invertierbar und $B = A^{-1}$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $A$ invertierbar, so gilt $\det(A^2) \neq 0$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Für $a \in K$ ist $\det(aA) = a^n \det(A)$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 4 | Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. | |
| | Ist $v$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $a$ und ein Eigenvektor von $B$ zum Eigenwert $b$, dann ist $v$ ein Eigenvektor von $AB$ zum Eigenwert $a \cdot b$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Falls $n$ gerade ist, so hat $B$ mindestens einen Eigenvektor. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Hat $A$ paarweise verschiedene Eigenwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und ist $AB = BA$, dann ist $B$ diagonalisierbar. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 5 | Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen $M$ und $N$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Wenn $f$ keine leeren Fasern hat, dann ist $f$ surjektiv. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn jede Faser genau ein Element hat, dann ist $f$ bijektiv. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | $f$ ist genau dann bijektiv, wenn jede Faser höchstens ein Element hat. | ☐ Ja ☐ Nein |

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

**6** Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^{5\times 1}$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ die folgenden sind: *(6 Punkte)*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$

**7** Berechnen Sie die Determinante, das charakteristische Polynom $\chi_A$ und einen Eigenvektor $v$ der folgenden Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$ *(2 Punkte)*

$\chi_A = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$ *(2 Punkte)*

$v^t = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$ *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

**8** Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix, für die $A^3 + A^2 + A + E_3 = 0$ ist, wobei $E_3$ die $3\times 3$-Einheitsmatrix ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom $\mu_A$ von $A$ ein Teiler von $X^4 - 1$ ist. *(2 Punkte)*

(b) Es sei zusätzlich $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Was ist dann $A^{2006}$? *(2 Punkte)*

**9** Es seien $K$ ein Körper, $V$ und $W$ $K$-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine $K$-lineare Abbildung. Zeigen Sie: Sind $v, w \in V$ und ist $(\varphi(v), \varphi(w))$ linear unabhängig, dann ist $(v, w)$ linear unabhängig. *(4 Punkte)*

**10** Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $X, Y \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ zwei Matrizen. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} \mid AX = YA\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n\times n}$ ist. *(4 Punkte)*

**11** Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ und $(\ ,\ ) : \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Weiter sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\varphi_A : \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}^{n\times 1}, v \mapsto Av$. Es gelte $(Av, w) = (v, Aw)$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ (das heißt, $\varphi_A$ ist selbstadjungiert bezüglich $(\ ,\ )$). Sei $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von $\varphi_A$ zum Eigenwert $a$ und $w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von $\varphi_A$ zum Eigenwert $b$ mit $a \neq \bar{b}$.
Zeigen Sie, dass $(v, w) = 0$ ist. *(4 Punkte)*

# Gruppe B

## Nachholklausur, 6.3.2006

## Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

**Name:** ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
**Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben:** Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt $-1$ Punkt, keine Angabe zählt $0$ Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens $0$ Punkte.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen $M$ und $N$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | $f$ ist genau dann bijektiv, wenn jede Faser höchstens ein Element hat. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn jede Faser genau ein Element hat, dann ist $f$ bijektiv. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn $f$ keine leeren Fasern hat, dann ist $f$ surjektiv. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 2 | Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig? | |
| | Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m\times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn $b$ im Spaltenraum von $A$ liegt. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit weniger Unbekannten als Gleichungen hat keine Lösungen. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens $2$ Lösungen. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 3 | Es seien $K$ ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den $K$-Vektorräumen $V$ und $W$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? | |
| | Bild $\psi \subseteq$ Bild $\psi \circ \varphi$ | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Kern $\varphi \subseteq$ Kern $\psi \circ \varphi$ | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Bild $\psi \circ \varphi \subseteq$ Bild $\varphi \circ \psi$ | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Kern $\varphi \circ \psi \circ \varphi =$ Kern $\varphi$ | ☐ Ja ☐ Nein |
| 4 | Es sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $A, B, C \in K^{n\times n}$. | |
| | Ist $A$ invertierbar, so gilt $\det(A^2) \neq 0$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $\det(AB) = 1$, dann ist $A$ invertierbar und $B = A^{-1}$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Für $a \in K$ ist $\det(aA) = a^n \det(A)$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Es gilt $\det(A - B) = \det(A) - \det(B) + \det(AB)$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 5 | Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. | |
| | Ist $v$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $a$ und ein Eigenvektor von $B$ zum Eigenwert $b$, dann ist $v$ ein Eigenvektor von $AB$ zum Eigenwert $a \cdot b$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Hat $A$ paarweise verschiedene Eigenwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und ist $AB = BA$, dann ist $B$ diagonalisierbar. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Falls $n$ gerade ist, so hat $B$ mindestens einen Eigenvektor. | ☐ Ja ☐ Nein |

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

**6** Berechnen Sie die Determinante, das charakteristische Polynom $\chi_A$ und einen Eigenvektor $v$ der folgenden Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$ *(2 Punkte)*

$\chi_A = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$ *(2 Punkte)*

$v^t = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$ *(3 Punkte)*

**7** Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^{5\times 1}$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ die folgenden sind: *(6 Punkte)*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

**8** Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix, für die $A^3 + A^2 + A + E_3 = 0$ ist, wobei $E_3$ die $3 \times 3$-Einheitsmatrix ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom $\mu_A$ von $A$ ein Teiler von $X^4 - 1$ ist. *(2 Punkte)*

(b) Es sei zusätzlich $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Was ist dann $A^{2006}$? *(2 Punkte)*

**9** Es seien $K$ ein Körper, $V$ und $W$ $K$-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine $K$-lineare Abbildung. Zeigen Sie: Sind $v, w \in V$ und ist $(\varphi(v), \varphi(w))$ linear unabhängig, dann ist $(v, w)$ linear unabhängig. *(4 Punkte)*

**10** Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $X, Y \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ zwei Matrizen. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} \mid AX = YA\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n\times n}$ ist. *(4 Punkte)*

**11** Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $(\ ,\ ) : \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Weiter sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\varphi_A : \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}^{n\times 1}, v \mapsto Av$. Es gelte $(Av, w) = (v, Aw)$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ (das heißt, $\varphi_A$ ist selbstadjungiert bezüglich $(\ ,\ )$). Sei $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von $\varphi_A$ zum Eigenwert $a$ und $w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von $\varphi_A$ zum Eigenwert $b$ mit $a \neq \bar{b}$.
Zeigen Sie, dass $(v, w) = 0$ ist. *(4 Punkte)*