14.2.2006

Scheinklausur zur Linearen Algebra I, WS 05/06, 2. Teil

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	8	9	10	11	12	Σ
Punkte								
Nachk.								

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja" oder „Nein" oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Gruppe A

Scheinklausur 2. Teil, 14.2.2006

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.		
	Ist (v_1, v_2) linear abhängig, so gibt es ein $s \in K$ mit $v_2 = sv_1$.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, dann ist die Dimension von V gleich n.	☐ Ja	☐ Nein
	(v_1, v_2) ist genau dann linear unabhängig, wenn $(v_1 + v_2, v_2)$ linear unabhängig ist.	☐ Ja	☐ Nein
2	Sei K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $A \in K^{m \times n}$.		
	Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten von A.	☐ Ja	☐ Nein
	Das Bild der linearen Abbildung $\varphi : K^{n \times 1} \to K^{m \times 1}$, $v \mapsto Av$ hat die Dimension n.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn A den Rang m hat, so gilt $n \leq m$.	☐ Ja	☐ Nein
	Der Spaltenrang von A ist gleich dem Spaltenrang von A^t.	☐ Ja	☐ Nein
3	Sei K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^{m \times 1}$.		
	Wenn $n = m$ ist, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ genau eine Lösung.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn $m < n$ ist, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ mehr als eine Lösung.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn $m < n$ ist, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mehr als eine Lösung.	☐ Ja	☐ Nein
	Wenn $Ax = b$ lösbar ist und $Ax = 0$ mehrere Lösungen hat, dann ist die Lösung von $Ax = b$ nicht eindeutig.	☐ Ja	☐ Nein
4	Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $A, B, C \in K^{n \times n}$.		
	Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B) - \det(AB)$.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $\det((A + B)C) \neq 0$, dann ist A oder B invertierbar.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist A invertierbar, so gilt $\det(A^{-1}) \det(A) = 1$.	☐ Ja	☐ Nein
5	Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.		
	Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a und ein Eigenvektor von B zum Eigenwert b, dann ist v ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert $a + b$.	☐ Ja	☐ Nein
	Falls n ungerade ist, so hat B mindestens einen Eigenvektor.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist A diagonalisierbar und für jeden Eigenraum U von A gilt, dass $Bu \in U$ für alle $u \in U$ ist, so ist auch B diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Berechnen Sie die Determinante, das charakteristische Polynom χ_A und einen Eigenvektor v der folgenden Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

$\chi_A = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

$v^t = \boxed{}$ *(3 Punkte)*

7 Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{1\times 3} \to \mathbb{Q}^{1\times 3}$ die lineare Abbildung, für die $\varphi([1,1,0]) = [0,0,1]$ und $\varphi([0,1,1]) = [0,1,0]$ und $\varphi([2,4,3]) = [1,0,0]$. Weiter sei $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis, also $e_1 = [1,0,0]$, $e_2 = [0,1,0]$ und $e_3 = [0,0,1]$. Berechnen Sie die Matrix von φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

(6 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

8 Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix, für die $A^2 + A + E_2 = 0$ ist, wobei E_2 die 2×2-Einheitsmatrix ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_A von A ein Teiler von $X^3 - 1$ ist. *(2 Punkte)*

(b) Es sei zusätzlich $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Was ist dann A^{2006}? *(2 Punkte)*

9 Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert $a \in K$ von A das Polynom $X - a$ ein Teiler des Minimalpolynoms μ_A von A ist. *(4 Punkte)*

10 Beweisen oder widerlegen Sie: Ist V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 3$, dann gibt es Vektoren $a, b, c \in V$, so dass (a, b) und (a, c) und (b, c) linear unabhängig sind, aber (a, b, c) linear abhängig ist. *(4 Punkte)*

11 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $A^t \cdot A = E_n$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $\det(A) \in \{-1, 1\}$ ist. *(4 Punkte)*

12 Für welche Werte der Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonalisierbar? *(4 Punkte)*

Gruppe B

Scheinklausur 2. Teil, 14.2.2006

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sei K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^{m\times 1}$.	
	Wenn $m < n$ ist, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ mehr als eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn $m < n$ ist, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mehr als eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn $n = m$ ist, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ genau eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn $Ax = b$ lösbar ist und $Ax = 0$ mehrere Lösungen hat, dann ist die Lösung von $Ax = b$ nicht eindeutig.	☐ Ja ☐ Nein
2	Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.	
	(v_1, v_2) ist genau dann linear unabhängig, wenn $(v_1 + v_2, v_2)$ linear unabhängig ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist (v_1, v_2) linear abhängig, so gibt es ein $s \in K$ mit $v_2 = sv_1$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, dann ist die Dimension von V gleich n.	☐ Ja ☐ Nein
3	Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $A, B, C \in K^{n\times n}$.	
	Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B) - \det(AB)$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A invertierbar, so gilt $\det(A^{-1}) \det(A) = 1$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\det((A + B)C) \neq 0$, dann ist A oder B invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
4	Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.	
	Falls n ungerade ist, so hat B mindestens einen Eigenvektor.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A diagonalisierbar und für jeden Eigenraum U von A gilt, dass $Bu \in U$ für alle $u \in U$ ist, so ist auch B diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a und ein Eigenvektor von B zum Eigenwert b, dann ist v ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert $a + b$.	☐ Ja ☐ Nein
5	Sei K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $A \in K^{m\times n}$.	
	Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten von A.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn A den Rang m hat, so gilt $n \leq m$.	☐ Ja ☐ Nein
	Das Bild der linearen Abbildung $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$, $v \mapsto Av$ hat die Dimension n.	☐ Ja ☐ Nein
	Der Spaltenrang von A ist gleich dem Spaltenrang von A^t.	☐ Ja ☐ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{1\times 3} \to \mathbb{Q}^{1\times 3}$ die lineare Abbildung, für die $\varphi([1,1,0]) = [0,0,1]$ und $\varphi([0,1,1]) = [0,1,0]$ und $\varphi([2,4,3]) = [1,0,0]$. Weiter sei $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis, also $e_1 = [1,0,0]$, $e_2 = [0,1,0]$ und $e_3 = [0,0,1]$. Berechnen Sie die Matrix von φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \boxed{\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array}}$$

(6 Punkte)

7 Berechnen Sie die Determinante, das charakteristische Polynom χ_A und einen Eigenvektor v der folgenden Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

$\chi_A = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

$v^t = \boxed{}$ *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

8 Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix, für die $A^2 + A + E_2 = 0$ ist, wobei E_2 die 2×2-Einheitsmatrix ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_A von A ein Teiler von $X^3 - 1$ ist. *(2 Punkte)*

(b) Es sei zusätzlich $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Was ist dann A^{2006}? *(2 Punkte)*

9 Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert $a \in K$ von A das Polynom $X - a$ ein Teiler des Minimalpolynoms μ_A von A ist. *(4 Punkte)*

10 Beweisen oder widerlegen Sie: Ist V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 3$, dann gibt es Vektoren $a, b, c \in V$, so dass (a, b) und (a, c) und (b, c) linear unabhängig sind, aber (a, b, c) linear abhängig ist. *(4 Punkte)*

11 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $A^t \cdot A = E_n$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $\det(A) \in \{-1, 1\}$ ist. *(4 Punkte)*

12 Für welche Werte der Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonalisierbar? *(4 Punkte)*