

# Vordiplomsklausur zur Linearen Algebra I, WS 05/06

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: \_\_\_\_\_

Vorname: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Eigenhändige Unterschrift: \_\_\_\_\_

	Krz	Erg	9	10	11	12	$\Sigma$
Punkte							
Nachk.							

## Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

**Auswertung:** Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

## Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

## Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen, es sei denn, es ist explizit gefordert.

## Vordiplomsklausur, 27.3.2006

### Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

**Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben:** Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?	
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens 2 Lösungen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit weniger Unbekannten als Gleichungen hat keine Lösungen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn $b$ im Spaltenraum von $A$ liegt.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
2	Es seien $V$ und $W$ $K$ -Vektorräume der Dimension größer oder gleich 3 und $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ . Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn $(v_1, v_2, v_3)$ linear abhängig ist, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ auch linear abhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $\varphi$ surjektiv ist und $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig ist, dann ist auch $(v_1, v_2, v_3)$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $\varphi$ injektiv ist und $(v_1, v_2, v_3)$ linear unabhängig ist, dann ist auch $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
3	Es sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $A, B, C \in K^{n \times n}$ .	
	Es gilt $\det(A - B) = \det(A) - \det(B) + \det(AB)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\det(ABC) \neq 0$ , dann sind $A$ und $B$ invertierbar und $C = B^{-1}A^{-1}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $A$ invertierbar, so gilt $\det(A + A^t) \neq 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $A$ invertierbar, so ist $\text{Spur}(A) \neq 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
4	Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .	
	Ist $v$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $a$ und $w$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $b$ und ist $a \neq b$ , dann ist $v + w$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $a + b$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$B$ hat höchstens $n$ verschiedene Eigenwerte.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Hat $A$ paarweise verschiedene Eigenwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und ist $B = A^3$ , dann ist $B$ diagonalisierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
5	Es sei $K$ ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $\chi_A$ das charakteristische Polynom von $A$ und $\mu_A$ das Minimalpolynom von $A$ . Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	$A$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\mu_A$ in Linearfaktoren zerfällt.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $A$ diagonalisierbar ist, dann zerfällt $\chi_A$ in Linearfaktoren.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Falls $f \in K[X]$ ein Polynom mit $\mu_A   f$ ist (d.h. $\mu_A$ ist ein Teiler von $f$ ), dann ist $f(A) = 0$ (Nullmatrix).	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6	<p>Es sei <math>\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}</math> der Körper mit zwei Elementen und <math>V</math> der <math>\mathbb{F}_2</math>-Vektorraum</p> $V := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\} \leq \mathbb{F}_2^{2 \times 2}.$ <p>Weiter sei die lineare Abbildung <math>\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2^{2 \times 2}, X \mapsto AXB</math> gegeben, wobei <math>A = \begin{bmatrix} 1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 \end{bmatrix}</math> und <math>B = \begin{bmatrix} 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 \end{bmatrix}</math>. Bestimmen Sie <math>\text{Kern}(\varphi)</math> und eine Basis von <math>\text{Bild}(\varphi)</math>.</p> <p style="text-align: right;">Kern(<math>\varphi</math>) = <span style="border: 1px solid black; display: inline-block; width: 200px; height: 30px; vertical-align: middle;"></span> <span style="float: right;">(3 Punkte)</span></p> <p style="text-align: right;">Basis von Bild(<math>\varphi</math>) = <span style="border: 1px solid black; display: inline-block; width: 200px; height: 30px; vertical-align: middle;"></span> <span style="float: right;">(3 Punkte)</span></p>
7	<p>Es sei <math>M \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}</math> die folgende Matrix:</p> $M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ <p>Berechnen Sie eine Basis von <math>\mathbb{Q}^{3 \times 1}</math>, die aus Eigenvektoren von <math>M</math> besteht.</p> <p style="text-align: right;">Eigenvektorbasis: <span style="border: 1px solid black; display: inline-block; width: 200px; height: 40px; vertical-align: middle;"></span> <span style="float: right;">(6 Punkte)</span></p>
8	<p>Es sei <math>\beta</math> die folgende Bilinearform auf dem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum <math>\mathbb{R}^{1 \times 3}</math>:</p> $\beta : \mathbb{R}^{1 \times 3} \times \mathbb{R}^{1 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}, \beta([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 + x_2y_1.$ <p>Berechnen Sie die Gram-Matrix von <math>\beta</math> bezüglich der Basis <math>\mathcal{B} := ([1, 1], [1, -1])</math>.</p> <p style="text-align: right;"><math>M_{\mathcal{B}}(\beta) = </math> <span style="border: 1px solid black; display: inline-block; width: 80px; height: 80px; vertical-align: middle; text-align: center; line-height: 80px;">+</span> <span style="float: right;">(4 Punkte)</span></p>
<p><b>Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.</b></p>	
9	<p>Es seien <math>K</math> ein Körper, <math>V</math> und <math>W</math> Vektorräume über <math>K</math> und <math>\varphi : V \rightarrow W</math> eine lineare Abbildung. Weiter seien <math>v_1, v_2 \in V</math> mit <math>v_1 \neq v_2</math> und <math>\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0</math>. Zeigen Sie, dass <math>(v_1, v_2)</math> linear unabhängig ist. <span style="float: right;">(4 Punkte)</span></p>
10	<p>Es seien <math>K</math> ein Körper, <math>V</math> und <math>W</math> Vektorräume über <math>K</math> der Dimension <math>n</math>. Zeigen Sie, dass jede injektive lineare Abbildung <math>\varphi : V \rightarrow W</math> auch surjektiv ist. <span style="float: right;">(4 Punkte)</span></p>
11	<p>Eine Matrix <math>A \in \mathbb{R}^{n \times n}</math> heißt <b>schiefsymmetrisch</b>, wenn <math>A^t = -A</math> ist. Zeigen Sie, dass jede <math>(n \times n)</math>-Matrix über <math>\mathbb{R}</math> die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix ist. <span style="float: right;">(4 Punkte)</span></p>
12	<p>Es sei <math>K</math> ein Körper, <math>V</math> ein <math>n</math>-dimensionaler <math>K</math>-Vektorraum mit <math>n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}</math> und <math>\varphi \in \text{End}_K(V)</math>. Zeigen Sie:</p> <p style="margin-left: 20px;">(a) Ist <math>\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi)</math>, dann ist <math>n</math> gerade. <span style="float: right;">(3 Punkte)</span></p> <p style="margin-left: 20px;">(b) Ist <math>n</math> gerade, dann gibt es ein <math>\varphi \in \text{End}_K(V)</math> mit <math>\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi)</math>. <span style="float: right;">(3 Punkte)</span></p>

## Vordiplomsklausur, 27.3.2006

### Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

**Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben:** Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei $K$ ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $\chi_A$ das charakteristische Polynom von $A$ und $\mu_A$ das Minimalpolynom von $A$ . Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn $A$ diagonalisierbar ist, dann zerfällt $\chi_A$ in Linearfaktoren.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Falls $f \in K[X]$ ein Polynom mit $\mu_A   f$ ist (d.h. $\mu_A$ ist ein Teiler von $f$ ), dann ist $f(A) = 0$ (Nullmatrix).	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$A$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\mu_A$ in Linearfaktoren zerfällt.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
2	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?	
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens 2 Lösungen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit weniger Unbekannten als Gleichungen hat keine Lösungen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn $b$ im Spaltenraum von $A$ liegt.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
3	Es sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $A, B, C \in K^{n \times n}$ .	
	Es gilt $\det(A - B) = \det(A) - \det(B) + \det(AB)$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\det(ABC) \neq 0$ , dann sind $A$ und $B$ invertierbar und $C = B^{-1}A^{-1}$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $A$ invertierbar, so ist $\text{Spur}(A) \neq 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $A$ invertierbar, so gilt $\det(A + A^t) \neq 0$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
4	Es seien $V$ und $W$ $K$ -Vektorräume der Dimension größer oder gleich 3 und $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ . Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn $\varphi$ surjektiv ist und $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig ist, dann ist auch $(v_1, v_2, v_3)$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $(v_1, v_2, v_3)$ linear abhängig ist, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ auch linear abhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $\varphi$ injektiv ist und $(v_1, v_2, v_3)$ linear unabhängig ist, dann ist auch $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
5	Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .	
	Ist $v$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $a$ und $w$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $b$ und ist $a \neq b$ , dann ist $v + w$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $a + b$ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Hat $A$ paarweise verschiedene Eigenwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und ist $B = A^3$ , dann ist $B$ diagonalisierbar.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$B$ hat höchstens $n$ verschiedene Eigenwerte.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6	<p>Es sei <math>\beta</math> die folgende Bilinearform auf dem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum <math>\mathbb{R}^{1 \times 3}</math>:</p> $\beta : \mathbb{R}^{1 \times 3} \times \mathbb{R}^{1 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}, \beta([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - x_1 y_2 + x_2 y_1.$ <p>Berechnen Sie die Gram-Matrix von <math>\beta</math> bezüglich der Basis <math>\mathcal{B} := ([1, 1], [1, -1])</math>.</p> <div style="text-align: right; margin-top: 20px;"> <math>M_{\mathcal{B}}(\beta) = </math> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; width: 100px; height: 80px; vertical-align: middle;"> <tr><td style="width: 50px; height: 50px;"></td><td style="width: 50px; height: 50px;"></td></tr> <tr><td style="width: 50px; height: 50px;"></td><td style="width: 50px; height: 50px;"></td></tr> </table> <span style="margin-left: 20px;">(4 Punkte)</span> </div>				
7	<p>Es sei <math>\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}</math> der Körper mit zwei Elementen und <math>V</math> der <math>\mathbb{F}_2</math>-Vektorraum</p> $V := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\} \leq \mathbb{F}_2^{2 \times 2}.$ <p>Weiter sei die lineare Abbildung <math>\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_2^{2 \times 2}, X \mapsto AXB</math> gegeben, wobei <math>A = \begin{bmatrix} 1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 \end{bmatrix}</math> und <math>B = \begin{bmatrix} 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 \end{bmatrix}</math>. Bestimmen Sie <math>\text{Kern}(\varphi)</math> und eine Basis von <math>\text{Bild}(\varphi)</math>.</p> <div style="text-align: right; margin-top: 20px;"> <math>\text{Kern}(\varphi) = </math> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; width: 200px; height: 40px; vertical-align: middle;"> <tr><td style="width: 100%; height: 40px;"></td></tr> </table> <span style="margin-left: 20px;">(3 Punkte)</span> </div> <div style="text-align: right; margin-top: 20px;"> <math>\text{Basis von Bild}(\varphi) = </math> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; width: 200px; height: 40px; vertical-align: middle;"> <tr><td style="width: 100%; height: 40px;"></td></tr> </table> <span style="margin-left: 20px;">(3 Punkte)</span> </div>				
8	<p>Es sei <math>M \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}</math> die folgende Matrix:</p> $M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ <p>Berechnen Sie eine Basis von <math>\mathbb{Q}^{3 \times 1}</math>, die aus Eigenvektoren von <math>M</math> besteht.</p> <div style="text-align: right; margin-top: 20px;"> <math>\text{Eigenvektorbasis:}</math> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; width: 300px; height: 60px; vertical-align: middle;"> <tr><td style="width: 100%; height: 60px;"></td></tr> </table> <span style="margin-left: 20px;">(6 Punkte)</span> </div>				
<p>Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.</p>					
9	<p>Es seien <math>K</math> ein Körper, <math>V</math> und <math>W</math> Vektorräume über <math>K</math> und <math>\varphi : V \rightarrow W</math> eine lineare Abbildung. Weiter seien <math>v_1, v_2 \in V</math> mit <math>v_1 \neq v_2</math> und <math>\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0</math>. Zeigen Sie, dass <math>(v_1, v_2)</math> linear unabhängig ist. <span style="float: right;">(4 Punkte)</span></p>				
10	<p>Es seien <math>K</math> ein Körper, <math>V</math> und <math>W</math> Vektorräume über <math>K</math> der Dimension <math>n</math>. Zeigen Sie, dass jede injektive lineare Abbildung <math>\varphi : V \rightarrow W</math> auch surjektiv ist. <span style="float: right;">(4 Punkte)</span></p>				
11	<p>Eine Matrix <math>A \in \mathbb{R}^{n \times n}</math> heißt <b>schiefsymmetrisch</b>, wenn <math>A^t = -A</math> ist. Zeigen Sie, dass jede <math>(n \times n)</math>-Matrix über <math>\mathbb{R}</math> die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix ist. <span style="float: right;">(4 Punkte)</span></p>				
12	<p>Es sei <math>K</math> ein Körper, <math>V</math> ein <math>n</math>-dimensionaler <math>K</math>-Vektorraum mit <math>n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}</math> und <math>\varphi \in \text{End}_K(V)</math>. Zeigen Sie:</p> <p>(a) Ist <math>\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi)</math>, dann ist <math>n</math> gerade. <span style="float: right;">(3 Punkte)</span></p> <p>(b) Ist <math>n</math> gerade, dann gibt es ein <math>\varphi \in \text{End}_K(V)</math> mit <math>\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi)</math>. <span style="float: right;">(3 Punkte)</span></p>				