Klausur, 28.09.2010

Lineare Algebra I, SS 2010, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

	Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.
1	Es sei $A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & -12 \\ 3 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. Geben Sie Basen für die Eigenräume von A an. *(5 Punkte)*
2	Es sei $\mathbb{F}_3 = \{-1, 0, 1\}$ der Körper mit 3 Elementen. Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_3^5$ mit $Ax = b$ an, wobei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_3^4$ die folgenden sind: *(4 Punkte)* $A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Ergebnis:
3	Es sei $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. (a) Geben Sie die Eigenwerte von A an. *(2 Punkte)* (b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $A^n = E_3$? *(2 Punkte)* (c) Geben Sie ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ kleinsten Grades an, für das $f(A) = A^{-1}$ ist. $f =$ *(2 Punkte)*

4	Es sei $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(A) = AX - XA$ für alle $A \in V$. (a) Geben Sie eine Basis $\mathcal{K}$ des Kerns von φ an. *(2 Punkte)* $\mathcal{K} =$ (b) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des Bildes von φ an. *(2 Punkte)* $\mathcal{B} =$
5	Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $a_{ij} := j - i$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Geben Sie den Rang von A an. *5 Punkte* $\mathrm{Rang}(A) = \boxed{}$
6	Es sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt gegeben. Es sei U der von $x = (1, 0, -1, 0)^t, \quad y = (0, 1, 0, 1)^t$ und $z = (0, 1, 1, 1)^t$ erzeugte Unterraum. (a) Geben Sie einen zu x und y orthogonalen Vektor aus U an. *(3 Punkte)* (b) Geben Sie einen normierten Vektor aus $U^\perp$ an. *(3 Punkte)*

Name:________________________ Matrikelnummer:________________________

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
7	Es sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi((v_1, v_2, \ldots, v_n)^t) = (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)^t$. (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von φ. *(2 Punkte)* (b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von φ. *(3 Punkte)*
8	Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Ein $\tau \in \mathrm{GL}(V)$ heißt *Transvektion*, falls ein $(n-1)$-dimensionaler τ-invarianter Unterraum W existiert mit $$\tau_W = \mathrm{id}_W \text{ und } \tau(v) - v \in W \text{ für alle } v \in V.$$ (a) Bestimmen Sie die Determinante einer Transvektion. *(2 Punkte)* (b) Zeigen Sie: Sind $x, y \in V$ linear unabhängig, dann existiert eine Transvektion τ mit $\tau(x) = y$. *(3 Punkte)*
9	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie: A ist genau dann ähnlich zu einer Diagonalmatrix $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{bmatrix}$ mit $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ für alle $1 \leq i \leq n$, wenn $A^2 = E_n$ ist. *(5 Punkte)*
10	Es seien U, W und V endlich dimensionale Vektorräume, sowie $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ Homomorphismen, sodass φ injektiv, ψ surjektiv und $\mathrm{Kern}(\psi) = \mathrm{Bild}(\varphi)$ ist. Zeigen Sie, dass $\dim V = \dim U + \dim W$ ist. *(5 Punkte)*