Testklausur zur Linearen Algebra I (19. 12. 97)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 7 gegebenen Aufgaben für insgesamt 52 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Wenn die Klausur eine Scheinklausur wäre, wären zum Bestehen mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei $F := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, und für $a \in \mathbb{R}$ seien $f_a \in F$ und $g_a \in F$ definiert durch

$$f_a(x) = a \sin x - \tfrac{a}{2}\,, \quad g_a(x) = \sin ax \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Ist die Teilmenge $M_1 = \{ f_a \mid a \in \mathbb{R} \}$ von F ein Teilraum von F?

(b) Ist die Teilmenge $M_2 = \{ g_a \mid a \in \mathbb{R} \}$ von F ein Teilraum von F?

Antwort jeweils mit Beweis. *3 + 2 = 5 Punkte*

Aufgabe 2.
Welche der folgenden Abbildungen sind linear? (Antwort jeweils mit Beweis)

(a) $\varphi\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $[\,a_1, a_2\,] \mapsto [\,a_1^2 - a_2, a_2^2 - a_1\,]$,

(b) $\psi\colon \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2$, $[\,a_1, a_2\,] \mapsto [\,a_1 + a_2, a_1^2 + a_2^2\,]$ (mit $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). *2 + 3 = 5 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei K ein Körper und $V = K^4$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen Endomorphismus φ von V mit $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Bild}\varphi$.

(b) Der Vektorraum K^{1997} besitzt keinen solchen Endomorphismus. *4 + 4 = 8 Punkte*

Aufgabe 4.

(a) Es sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ ist eine Basis von V.

Es kommt hier auf die Formulierung an: Erwartet wird ein Beweis aus vollständigen Sätzen, in dem alle logischen Zusammenhänge und Quantoren klar formuliert sind. Nicht nur Stichworte.

(b) Weiter sei $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in V$ und $\varphi: V \to V$ definiert durch $\varphi(A) = TAT$ für alle $A \in V$. Zeigen Sie, daß φ linear ist.

(c) Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ und eine Basis von $\operatorname{Bild}\varphi$.

(d) Ergänzen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ zu einer Basis von V. (Ohne Beweis.)

4 + 2 + 4 + 1 = 11 Punkte

Aufgabe 5.
Es sei K ein Körper. Beweisen Sie: Zwei endlich dimensionale Vektorräume über K sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben.

Zur Erinnerung: Formulieren Sie die kausalen Zusammenhänge aus (Text!) und erklären Sie alle Bezeichnungen, die Sie verwenden (wie z. B. φ oder V). *6 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$. Wie viele linear unabhängige m-Tupel von Vektoren gibt es in V?

Antwort mit Beweis. *6 Punkte*

Aufgabe 7.
Gegeben seien die Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und die Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\} := \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$ von $V := \mathbb{Q}^{2\times 1}$ sowie der Endomorhismus $\varphi\colon V \to V$, $v \mapsto Av$ (das heißt, $\varphi = \varphi_A$).

(a) Berechnen Sie die Bilder $\varphi(v_1)$ und $\varphi(v_2)$ sowie ihre Koordinatenvektoren $\kappa_{\mathcal{B}}(\varphi(v_1))$ und $\kappa_{\mathcal{B}}(\varphi(v_2))$.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von V, so daß $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = E_2$ ist.

(d) Berechnen Sie die Fasern von v_1 und v_2.

(e) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von V, so daß $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = E_2$ ist.

Vergessen Sie nicht den erläuternden Text. *4 + 1 + 1 + 4 + 1 = 11 Punkte*
