5.1.2007

Nachholklausur Intensivkurs Lineare Algebra I

Prof. Dr. G. Nebe

Tragen Sie auf diesem Deckblatt bitte Ihren Namen in *Blockbuchstaben* sowie Ihre Matrikelnummer ein.

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
erlaubte Hilfsmittel: keine

Aufgabe	maximal	erreicht	Korrektor
1	10		
2	10		
3	18		
4	26		
5	10		
6	6		
Summe	80		

Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.
Beachten Sie, daß der Lösungsweg und die Rechnungen mit in die Bewertung eingehen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 5}$. Weiter seien $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = c$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien $p(X) = X^3 + \omega X + \omega + 1$ und $q(X) = X^2 + \omega X \in \mathbb{F}_4[X]$.
Bestimmen Sie $f(X)$ und $g(X) \in \mathbb{F}_4[X]$ mit $f(X)\cdot p(X) + g(X)\cdot q(X) = \mathrm{ggT}(p(X), q(X))$.

Aufgabe 3 (4+7+2+5=18 Punkte)

Es bezeichne $E = (E_1, \ldots, E_4)$ die Standardbasis von $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{4\times 1}$. Weiter sei Φ die symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$ mit

$$_E\Phi^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} .$$

Ferner sei $\mathcal{U} := \langle E_1, E_2 \rangle \leq \mathcal{V}$.

(a) Zeigen Sie, daß Φ positiv definit ist.

(b) Geben Sie Orthonormalbasen von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^\perp$ an.

(c) Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$ an.

(d) Bestimmen Sie die beste Approximation von $E_1 + E_3 - 2E_4$ an $\mathcal{U}$.

(Hinweis: (a) und (b) können gleichzeitig bearbeitet werden.)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 ((3+3)+(5+9+2+1+3)=26 Punkte)

Sei $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{n\times n}$ versehen mit dem Skalarprodukt $\Phi\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$, $(X,Y)\mapsto \operatorname{Spur}(X\cdot Y^{tr})$.

(a) Für $A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sei $\varphi_A\colon \mathcal{V}\to\mathcal{V}$, $X\mapsto AXA^{-1}$. Zeigen Sie:

  (i) Es ist $\varphi_A\in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V})$.

  (ii) Ist A symmetrisch, so ist φ_A selbstadjungiert.

(b) Sei $n=2$ und $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. Weiter sei

$$B = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

eine Basis von $\mathcal{V}$.

  (i) Zeigen Sie ${}^{B}\varphi_A^{B} = M$, wobei $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0\\ -2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}$.

  (ii) Bestimmen Sie $\mu_{\varphi_A}(X)$ sowie alle Eigenwerte und Eigenräume von φ_A.

  (iii) Zeigen Sie, daß M diagonalisierbar ist und finden Sie ein $T\in\mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ so, daß $T^{-1}MT$ Diagonalgestalt annimmt.

  (iv) Berechnen Sie $\operatorname{Spur}(M^{2007})$.

  (v) Geben Sie $\chi_M(X)$ und $\det(M)$ an unter Verwendung von (ii).

Hinweis: Beim Bearbeiten von (ii)-(v) dürfen Sie ${}^{B}\varphi_A^{B} = M$ voraussetzen, auch wenn Sie (i) nicht gezeigt haben.

Aufgabe 5 (6+4 Punkte)

Es sei K ein Körper und $A\in K^{n\times n}$ die Matrix, deren Einträge alle gleich 1 sind. Weiter sei $B = A - cI_n$ mit $c\in K$.

(a) Zeigen Sie $\operatorname{Rang}(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } c = 0\\ n-1 & \text{falls } c = n\\ n & \text{sonst}\end{cases}$.

(b) Sei $\mathcal{V}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(B_1,\dots,B_n)$. Weiter seien $V = \sum_{i=1}^{n} B_i$ und $V_i = V - c\cdot B_i$ für alle $1\le i\le n$.

Für welche $c\in K$ bildet $(V_1,\dots,V_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Sei K ein Körper und $\mathcal{V}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie:

Es gibt genau dann ein $\varphi\in\operatorname{End}_K(\mathcal{V})$ mit $\operatorname{Bild}(\varphi) = \operatorname{Kern}(\varphi)$, wenn $\operatorname{Dim}(\mathcal{V})$ gerade ist.