Nachholklausur zur Linearen Algebra I Teil 1 (WS 92/93)

<u>Lesezeit: 15 Minuten</u> | <u>Bearbeitungszeit: 120 Minuten</u>

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen `wesentlichen` Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{Z}$ sind reflexiv, welche symmetrisch und welche transitiv? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)

1. $x \sim y \Leftrightarrow x + y$ gerade. *3 Punkte*
2. $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y - 1$. *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei $\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ der <u>Körper mit drei Elementen</u>. Man bestimme die <u>Dimensionen</u> von T_1, T_2 und des Durchschnitts der Teilräume

$$T_1 = \langle \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix} \rangle \text{ und } T_2 = \langle \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \rangle \text{ von } {\mathbb{F}_3}^4.$$

4 Punkte

Aufgabe 3.
Es sei $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ der Vektorraum aller Polynome $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\operatorname{Grad} p \leq 2$. Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis für den Teilraum
$T = \{p \in V \mid p(5) = 0\}$. *3 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $T = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$.

a) Man berechne eine Basis von T und ergänze sie zu einer Basis von V. *3 Punkte*

b) Man gebe eine Basis von V/T an. *1 Punkt*

Aufgabe 5.
Es sei $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ der Vektorraum aller Polynome $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\operatorname{Grad} p \leq 2$ und φ die lineare Abbildung von V nach V mit $\varphi : V \to V, p \to \varphi(p)$ mit $(\varphi(p))(x) = p'(x) + p'(x+1)$, wobei p' wie üblich die Ableitung von p nach x bezeichnet. (Die Linearität von φ braucht <u>nicht</u> gezeigt zu werden.) Man bestimme alle Elemente von V, die durch φ auf $x - 2$ abgebildet werden. *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei V ein K-Vektorraum, und es seien X, Y und Z drei verschiedene Vektoren aus V. Man widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels) oder beweise die folgende Behauptung: Sind die Mengen $\{X, Y\}$, $\{Y, Z\}$ und $\{Z, X\}$ linear unabhänigig, so ist auch die Menge $\{X, Y, Z\}$ linear unabhängig. *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $V = \mathbb{Q}^3$, $W = \mathbb{Q}^2$, B eine Basis von V und C eine Basis von W. Es seien lineare Abbildungen φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 gegeben mit ${}_B{\varphi_1}_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ${}_B{\varphi_2}_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ${}_C{\varphi_3}_B = ({}_B{\varphi_1}_C)^t$ und ${}_C{\varphi_4}_B = ({}_B{\varphi_2}_C)^t$. Welche der Abbildungen sind injektiv, welche sind surjektiv? (kurze Begründung) *4 Punkte*

Aufgabe 8.
Man beweise oder widerlege: Der Vektorraum $V = K^5$ hat für jeden Körper K mit p Elementen (p Primzahl) genauso viele ein- wie vierdimensionale Teilräume. *5 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Teilräume? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)

a) $M_1 = \{f \in V \mid f(5) = f(-5)\}$ *3 Punkte*

b) $M_2 = \{f \in V \mid f(5) \cdot f(-5) = 0\}$ *3 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei $V = \mathbb{Q}^3$ und $W = \mathbb{Q}^2$. Dann ist $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von V und $D = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ Basis von W. Es sei weiter eine lineare Abbildung φ von V nach W definiert durch $\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Man bestimme die Matrix ${}_D\varphi_B$ der linearen Abbildung φ. *3 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei V ein Vektorraum, T ein Teilraum von V, der nicht nur aus dem Nullvektor besteht, und $X_1, ..., X_n \in V$, so daß $(T + X_1, ..., T + X_n)$ eine Basis von V/T ist. Man beweise oder widerlege:

a) $(X_1, ..., X_n)$ ist ein Erzeugendensystem von V. *1 Punkt*

b) $(X_1, ..., X_n)$ ist linear unabhängig in V. *2 Punkte*

c) $(X_1, ..., X_n)$ ist eine Basis von V. *1 Punkt*

Aufgabe 12.
Es sei $\mathbb{F}_4$ der Körper mit vier Elementen. Wieviele invertierbare Matrizen gibt es in ${\mathbb{F}_4}^{3\times 3}$? *4 Punkte*