Ersatzklausur zur Linearen Algebra I (11. 4. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 14 gegebenen Aufgaben für insgesamt 85 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen definieren wir eine Verknüpfung $\circ$ durch

$$a \circ b = a + b + 3 \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Ist $(\mathbb{Z}, \circ)$ eine Gruppe? (Antwort mit Beweis.) *3 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, T ein echter Teilraum von V (also $T \leq V$ und $T \neq V$) und $W = \mathrm{Hom}\,(V, V)$.

(a) Ist $M_1 = \{\varphi \in W \mid T \leq \text{Kern } \varphi\}$ ein Teilraum von W?

(b) Ist $M_2 = \{\varphi \in W \mid \text{Kern } \varphi \leq T\}$ ein Teilraum von W?

Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!) *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei $V = \mathbb{Z}_2^3$ der 3-dimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ mit 2 Elementen. Untersuchen Sie, ob die durch

$$R = \{\, (X, Y) \in V \times V \mid X + Y = 0 \in V\}$$

definierte Relation auf V reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist.

Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!) *1 + 1 + 1 = 3 Punkte*

Aufgabe 4.

Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein konkretes Gegenbeispiel) jeweils die folgenden Behauptungen.

(a) Ist R ein Ring und sind a und b Nullteiler von R, so ist auch $a + b$ ein Nullteiler von R.

(b) Ist R ein Ring und sind a und b Nullteiler von R, so ist auch $a \cdot b$ ein Nullteiler von R.

3 + 3 = 6 Punkte

Aufgabe 5.

Es sei $V \leq \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3, und es sei

$$T = \langle x^3 + x - 2,\; 2x^3 - x^2 - 1,\; 3x^3 - 2x^2 - x \rangle \leq V.$$

Berechnen Sie eine Basis von V/T. (Eine ausreichende Erläuterung der Rechenschritte ist wichtig. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.) *5 Punkte*

Aufgabe 6.

Es sei K ein beliebiger Körper und V ein 3-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis (B_1, B_2, B_3). Wir betrachten die Teilräume $T_1 = \langle B_1 \rangle$ und $T_2 = \langle B_1, B_2 \rangle$ von V. Es sei

$$F = \{\, \varphi \in \mathrm{Hom}\,(V, V) \mid \varphi(T_1) \leq T_1 \;\text{ und }\; \varphi(T_2) \leq T_2 \,\}$$

die Menge aller linearer Abbildungen von V nach V, die T_1 und T_2 jeweils in sich abbilden.

(a) Zeigen Sie, daß F ein Teilraum von $\mathrm{Hom}\,(V, V)$ ist.

(b) Welche Dimension hat F? (Antwort mit Begründung.) *2 + 4 = 6 Punkte*

Aufgabe 7.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Durch die Basiswechselmatrix $_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und die Abbildungsmatrix $_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ seien eine weitere Basis $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ von V und eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix $_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$.

(b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$.

(c) Kann man mit Hilfe der oben genannten Matrizen das Bild $\varphi(X)$ des Vektors $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ aus V berechnen?
(Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?) *2 + 2 + 2 = 6 Punkte*

Aufgabe 8.

In $V = \mathbb{Z}_5^3$ seien die Teilräume $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \right\rangle$ und $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\rangle$ gegeben.

Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $\langle T_1, T_2 \rangle$ und eine Basis von $T_1 \cap T_2$. (Formulieren Sie die Ergebnisse in einem Schlußsatz.) *4 Punkte*

Aufgabe 9.

(a) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 4 Unbekannten, das genau 16 Lösungen hat?

(b) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten, das genau 32 Lösungen hat?

(Antwort jeweils mit konkretem Beispiel und Beweis oder mit Gegenbeweis.
Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 10.

Es sei π die durch

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i\pi$	9	5	1	7	12	6	10	11	3	2	8	4

gegebene Permutation aus S_{12}, und es sei $\rho = (1, 11, 4, 8)(2, 9, 3)(5, 12, 7, 10, 6) \in S_{12}$.

(a) Schreiben Sie π und π^{-1} jeweils als Produkt ziffernfremder Zykel.

(b) Berechnen Sie die Permutationen $\pi\cdot\rho$ und $\rho\cdot\pi$ (in Zykelschreibweise).

(c) Schreiben Sie π als Produkt von Transpositionen.

(d) Kann man ρ als Produkt von Dreierzykeln schreiben? (Antwort mit Begründung.)

(e) Berechnen Sie die Ordnung von π. *1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und φ der durch ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definierte Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre Vielfachheiten.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von φ den zugehörigen Eigenraum.

(c) Berechnen Sie eine Fächerbasis C von $\mathbb{R}^3$ bezüglich φ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$. *3 + 1 + 5 = 9 Punkte*

Aufgabe 12.
Gilt für alle Paare (φ, ψ) von linearen Abbildungen φ und ψ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, daß

(a) Φ_1 mit $\Phi_1(X, Y) = \varphi(X) + \psi(Y)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist,

(b) Φ_2 mit $\Phi_2(X, Y) = \varphi(X) \cdot \psi(Y)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist?

(Antwort jeweils mit Beweis oder konkretem Gegenbeispiel.
Quantoren nicht vergessen!) *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 13.
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie das Radikal von V bezüglich Φ. (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)

(b) Ist Φ ausgeartet? (Antwort mit Begründung.) *5 + 1 = 6 Punkte*

Aufgabe 14.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ sowie die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ an.
(Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)

(b) Ist Φ positiv definit? (Antwort mit Begründung.)

(c) Bestimmen Sie Index und Signatur von Φ. (Mit Erläuterung.)

(d) Durch die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sei eine weitere Basis $\mathcal{A}$ von V gegeben. Berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{A}}\Phi_{\mathcal{A}}$ von Φ bezüglich $\mathcal{A}$. *7 + 1 + 2 + 2 = 12 Punkte*
