Aufgabenblatt 1 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (18. 9. 1997)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

Es sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$.

(a) Ist $M_1 = \{A \in V \mid \operatorname{Spur} A = 0\}$ ein Teilraum von V?

(b) Ist $M_2 = \{A \in V \mid \det A = 0\}$ ein Teilraum von V?

Antwort jeweils mit Begründung. *3 + 2 = 5 Punkte*

(Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalglieder.)

Aufgabe 2.

Es sei $V \leq \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3, und es sei

$$T = \langle\, x^3 + x^2 + 1,\ x^2 + x + 2,\ 2x^3 + x^2 - x \,\rangle \leq V.$$

Berechnen Sie eine Basis von V/T.

Erläutern Sie Ihre Rechnung und formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz. *5 Punkte*

Aufgabe 3.

Über dem Körper $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ mit 5 Elementen seien der Vektorraum $V = \mathbb{Z}_5^3$ sowie die Teilräume $T_1 = \langle \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{4} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \rangle$ und $T_2 = \langle \begin{bmatrix} \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{3} \\ \overline{4} \\ \overline{0} \end{bmatrix} \rangle$ gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $\langle T_1, T_2 \rangle$ und eine Basis von $T_1 \cap T_2$.

Formulieren Sie die Ergebnisse in einem Schlußsatz. *4 Punkte*

Aufgabe 4.

(a) Beweisen Sie: Es gibt höchstens vier verschiedene (also nicht isomorphe) Körper, über denen es ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau 64 Lösungen gibt.

(b) Über welchen dieser vier Körper gibt es ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten, das genau 64 Lösungen hat?

Anleitung: Geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel für ein solches Gleichungssystem an, oder beweisen Sie, daß es kein solches Gleichungssytem gibt.

(Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *4 + 4 = 8 Punkte*

Aufgabe 5.

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ seien zwei Basen $\mathcal{B} = (B_1, B_2)$ und $\mathcal{C} = (C_1, C_2)$ mit der Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ gegeben. Es sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir betrachten den durch ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = A$ definierten Endomorphismus φ von V und das durch ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A$ definierte Skalarprodukt Φ auf V.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$ sowie die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$.

(b) Welche Eigenschaft des Basisvektors C_1 (bzw. C_2) kann man aus den Nullen in ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ ablesen?

(c) Welche Eigenschaft des Basisvektors B_1 (bzw. B_2) kann man aus den Nullen in ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ ablesen?

(d) Welche Eigenschaft der Basisvektoren C_1 und C_2 kann man aus den Nullen in ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ ablesen?

(e) Kann man das Bild $\varphi(X)$ des Vektors $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in V$ mit Hilfe der oben genannten Matrizen berechnen? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht? *4 + 1 + 1 + 1 + 2 = 9 Punkte*

Aufgabenblatt 2 zur
Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (18. 9. 1997)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 6.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie:

(a) Ist n gerade, so gibt es einen Endomorphismus φ von V mit $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Bild}\varphi$. (Konkretes Beispiel mit Begründung.)

(b) Ist n ungerade, so gibt es keinen solchen Endomorphismus. *5 + 3 = 8 Punkte*

Aufgabe 7.

Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. (Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluß die Matrix A^{-1} explizit angeben.)
Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche (das Ergebnis ist ganzzahlig). *5 Punkte*

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & -10 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. Berechnen Sie

(a) die Eigenwerte von A und ihre Vielfachheiten,

(b) zu jedem Eigenwert von A den zugehörigen Eigenraum,

(c) eine Matrix $T \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, so daß $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat. *3 + 3 + 1 = 7 Punkte*

Aufgabe 9.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie das Radikal von V bezüglich Φ. (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz. Beachten Sie dabei, daß $\mathcal{B}$ nicht die Standardbasis von V zu sein braucht.)

(b) Ist Φ ausgeartet? (Antwort mit Begründung.) *5 + 1 = 6 Punkte*

Aufgabe 10.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ sowie die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ an.

(Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)

(b) Ist Φ positiv definit? (Antwort mit Begründung.)

(c) Bestimmen Sie Index und Signatur von Φ. (Mit Erläuterung.) *7 + 1 + 2 = 10 Punkte*
