12.12.2003

Scheinklausur zur Linearen Algebra I, WS 03/04, 1. Teil

Prof. Dr. H. Pahlings

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vornamme: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	8	9	10	11	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Gruppe A

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Mengen Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$?	
	$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5 \text{ teilt } a-b\}$	☐ Ja ☐ Nein
	$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5 \text{ teilt } a+b\}$	☐ Ja ☐ Nein
	$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^3 = b^3\}$	☐ Ja ☐ Nein
2	Sind die folgenden Aussagen wahr?	
	Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x,y) \mapsto x^2 + y$ ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x,y) \mapsto (x^2 + y, x)$ ist injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3, x \mapsto x^2$ ist injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
3	Sind die folgenden Mengen Teilräume in den jeweils angegebenen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen?	
	$\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \mid \text{es gibt } c \in \mathbb{Q} \text{ mit } \lvert f(x)\rvert \leq c \text{ für alle } x \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$	☐ Ja ☐ Nein
	$\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n \mid a_n = a_1 + \dots + a_{n-1}\} \subseteq \mathbb{Q}^n$	☐ Ja ☐ Nein
	$\left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid a_{1,1}a_{2,2} = a_{1,2}a_{2,1} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}$	☐ Ja ☐ Nein
4	Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit m Gleichungen in n Unbekannten ...	
	... hat keine Lösung, wenn $m > n$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	... ist nicht eindeutig lösbar, falls $m < n$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	... ist lösbar, wenn $m < n$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	... ist eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{Rg}\, A = n$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
5	Wir betrachten $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,1)$ und $v_4 = (1,2,3)$ in $\mathbb{R}^3$.	
	Ist $v_4 \in \langle v_1, v_2 \rangle$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?	☐ Ja ☐ Nein
6	Welche der folgenden Abbildungen sind linear?	
	$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \cdot y$	☐ Ja ☐ Nein
	$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} \mapsto x_{1,2} + x_{2,1}$	☐ Ja ☐ Nein
	$\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(f)(x) = f(x+1)$ für $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $x \in \mathbb{R}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2, x \mapsto x^2$ (hier ist natürlich $\mathbb{Z}_2$-linear gemeint)	☐ Ja ☐ Nein

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003, Rechenteil, **Gruppe A**

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

7	Bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{Z}_2^5$ mit $$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \end{array}$$ Nur Ergebnis eintragen: ________ *(3 Punkte)*

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003, **Gruppe A**

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

8	Es sei $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ die Matrix mit den Einträgen $$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$ Berechnen Sie (mit Beweis!) A^k für $k = 1, 2, \ldots, n$. *(4 Punkte)*
9	Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v, w \in V$ Vektoren. Weiter sei $\varphi : V \to K$ eine K-lineare Abbildung mit $\varphi(v) = \varphi(w) = 1$. Man zeige: $\{v, w\}$ ist linear unabhängig. *(4 Punkte)*
10	Es sei $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{Z}_2^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{v_1, v_2, v\}$ Basis von $\mathbb{Z}_2^3$ ist, wobei $v_1 = (1, 1, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 0)$ ist. Begründen Sie Ihr Ergebnis. *(4 Punkte)*
11	Es sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, X \mapsto AX - XA$ gegeben mit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie, dass φ linear ist und geben Sie eine Basis von Kern φ und Bild φ an (natürlich auch mit Beweis). *(5 Punkte)*

Gruppe B

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Mengen Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$?		
	$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^5 = b^5\}$	☐ Ja	☐ Nein
	$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid$ 7 teilt $a - b\}$	☐ Ja	☐ Nein
	$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid$ 7 teilt $a + b\}$	☐ Ja	☐ Nein
2	Sind die folgenden Aussagen wahr?		
	Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x,y) \mapsto x^3 - y$ ist surjektiv.	☐ Ja	☐ Nein
	Die Abbildung $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3, x \mapsto x^2$ ist surjektiv.	☐ Ja	☐ Nein
	Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x,y) \mapsto (x^2 + y, x^2)$ ist injektiv.	☐ Ja	☐ Nein
3	Sind die folgenden Mengen Teilräume in den jeweils angegebenen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen?		
	$\left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid a_{1,1}a_{2,2} = a_{1,2}a_{2,1} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}$	☐ Ja	☐ Nein
	$\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Q}^n \mid a_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + 1\} \subseteq \mathbb{Q}^n$	☐ Ja	☐ Nein
	$\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \mid$ es gibt $c \in \mathbb{Q}$ mit $\lvert f(x)\rvert \leq c$ für alle $x \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$	☐ Ja	☐ Nein
4	Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit m Gleichungen in n Unbekannten ...		
	... ist eindeutig lösbar, wenn Rg $A = m$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
	... hat eine Lösung, wenn $m \leq n$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
	... ist eindeutig lösbar, falls $m = n$ ist und Rg $A = n$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
	... ist unlösbar, wenn $m > n$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
5	Wir betrachten $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,-1)$ und $v_4 = (1,2,4)$ in $\mathbb{R}^3$.		
	Ist $v_4 \in \langle v_2, v_1 \rangle$?	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $\langle v_2, v_1 \rangle = \langle v_4, v_3 \rangle$?	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?	☐ Ja	☐ Nein
6	Welche der folgenden Abbildungen sind linear?		
	$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} \mapsto x_{1,2} - x_{2,1}$	☐ Ja	☐ Nein
	$\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(f)(x) = f(2 \cdot x + 1)$ für $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $x \in \mathbb{R}$.	☐ Ja	☐ Nein
	$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \cdot (y+1)$	☐ Ja	☐ Nein
	$\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2, x \mapsto x^2$ (hier ist natürlich $\mathbb{Z}_2$-linear gemeint)	☐ Ja	☐ Nein

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003, Rechenteil, **Gruppe B**

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.	
7	Bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{Z}_2^5$ mit $$\begin{array}{ccccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \end{array}$$ Nur Ergebnis eintragen: $\boxed{}$ *(3 Punkte)*

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003, **Gruppe B**

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
8	Es sei $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ die Matrix mit den Einträgen $$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$ Berechnen Sie (mit Beweis!) A^k für $k = 1, 2, \ldots, n$. *(4 Punkte)*
9	Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v, w \in V$ Vektoren. Weiter sei $\varphi : V \to K$ eine K-lineare Abbildung mit $\varphi(v) = \varphi(w) = 1$. Man zeige: $\{v, w\}$ ist linear unabhängig. *(4 Punkte)*
10	Es sei $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{Z}_2^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{v_1, v_2, v\}$ Basis von $\mathbb{Z}_2^3$ ist, wobei $v_1 = (1, 1, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 0)$ ist. Begründen Sie Ihr Ergebnis. *(4 Punkte)*
11	Es sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}, X \mapsto AX - XA$ gegeben mit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$. Zeigen Sie, dass φ linear ist und geben Sie eine Basis von Kern φ und Bild φ an (natürlich auch mit Beweis). *(5 Punkte)*