Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 10.
Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ an:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Wieviele Lösungen gibt es? (4 Punkte)

Aufgabe 11.
Es sei K ein Körper. Für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei $p_i \in \operatorname{Abb}(K, K)$ durch $p_i(x) = x^i$ definiert (wobei $p_0(0) := 1$).

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M} := \{p_0+p_1, p_0+p_1+p_2\}$ linear unabhängig in $\operatorname{Abb}(K, K)$ ist. (2 Punkte)

(b) Ergänzen Sie $\mathcal{M}$ zu einer Basis von $P_3(K) = \langle\{p_0, p_1, p_2, p_3\}\rangle$. (2 Punkte)

Aufgabe 12.

(a) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\operatorname{Kern}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & x & x \\ y & y & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\operatorname{Bild}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} \;?$$

(2 Punkte)

(b) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\operatorname{Kern}(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\operatorname{Bild}(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} \;?$$

(3 Punkte)

Geben Sie jeweils entweder eine solche Abbildung an oder beweisen Sie, dass es keine gibt.

Bitte wenden →

Aufgabe 13.

(a) Ist die Abbildung $f : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$, $x \mapsto x^2 + x$ surjektiv? (2 Punkte)

(b) Ist die Abbildung $f : \mathbb{F}_3^{2\times 3} \to \mathbb{F}_3^{2\times 3}$, $X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$ surjektiv? (3 Punkte)

Aufgabe 14.
Sei K ein Körper, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V = K^{2\times 2}$ und $\varphi : \ V \longrightarrow V$ definiert durch $\varphi(X) = AX - XA$ für alle $X \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(b) Geben Sie je eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. (3 Punkte)

(c) Ergänzen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ zu einer Basis von V. (2 Punkte)

Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.
Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 3 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, W ein K-Vektorraum und V_1 und V_2 Teilräume von W. Dann gilt:

$W = \{k \cdot w \mid k \in K \text{ und } w \in W\}$	☐ Ja	☐ Nein
$W = V_1 + V_2$	☐ Ja	☐ Nein
$W \times K = \{w \cdot k \mid k \in K \text{ und } w \in W\}$	☐ Ja	☐ Nein
$V_1 \cap V_2$ ist Teilraum von W	☐ Ja	☐ Nein
$W + V_1 = W + V_2$	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper, V und W K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\mathrm{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Bild}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{es existiert ein } v \in V \text{ mit } w = \varphi(v)\}$	☐ Ja	☐ Nein
Für $M \subseteq W$ ist $\varphi^{-1}(M) = \{v \in V \mid \text{für alle } w \in M \text{ ist } \varphi(v) = w\}$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi(v \cdot w) = \varphi(v) \cdot \varphi(w)$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid \varphi(v_1 - v_2) = 0\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf V	☐ Ja	☐ Nein

---

Aufgabe 3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^3$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^2$	☐ Ja	☐ Nein
$\emptyset$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^2$	☐ Ja	☐ Nein
$\langle\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}\rangle$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^2$	☐ Ja	☐ Nein
$\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist linear}\}$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	☐ Ja	☐ Nein

---

Aufgabe 4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{(1, 0, 1), (1, 2), (0, 1, 0)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(1, 2, 3), (0, 2, 0)\}$ ist Basis des Teilraums $\langle(1, 1, 1), (1, 0, 1)\rangle$ von $\mathbb{R}^3$	☐ Ja	☐ Nein

Bitte wenden →

Aufgabe 5. K sei ein Körper, V ein K-Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Ist X Basis von V, dann ist X endlich	☐ Ja	☐ Nein
Ist X Basis von V, dann ist X auch Erzeugendensystem von V	☐ Ja	☐ Nein
Ist X linear abhängig, dann ist X kein Erzeugendensystem von V	☐ Ja	☐ Nein
Ist X linear unabhängig, dann existiert kein $v \in X$ mit $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$	☐ Ja	☐ Nein
Wenn ein $v \in V \setminus \langle X \rangle$ existiert, dann ist $X \setminus \{v\}$ keine Basis von V	☐ Ja	☐ Nein

---

Aufgabe 6. Es sei K ein Körper und alle K^n $(n \in \mathbb{N})$ seien als K-Vektorräume aufgefasst. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$\varphi : K^2 \to K^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2 + x_1, x_1)$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : K^2 \to K, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1) \cdot (x_2 + 1)$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : K \to K, x \mapsto 1$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : K \to K^2, x \mapsto (x, x + x)$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : K \to K, x \mapsto 0$	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe 7. Es sei K ein Körper und V und W K-Vektorräume. $\varphi : V \to W$ und $\psi : V \to W$ seien zwei lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\mathrm{Kern}(\varphi + \psi) \supseteq \mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Kern}(\psi)$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Bild}(\varphi + \psi) \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\psi)$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Kern}(\varphi + \psi) = \mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Kern}(\psi)$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Bild}(\varphi - \psi) \supseteq \mathrm{Bild}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\psi)$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Kern}(\varphi + \psi) = \mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Kern}(\psi)$	☐ Ja	☐ Nein

---

Aufgabe 8. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2000} \to \mathbb{R}^{1999}$ ist surjektiv.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \to \mathbb{R}^{2000}$.	☐ Ja	☐ Nein
Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \to \mathbb{R}^{2000}$ ist injektiv.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2000} \to \mathbb{R}^{1999}$.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \to \mathbb{R}^{2000}$.	☐ Ja	☐ Nein

---

Aufgabe 9. Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem über einem Körper

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

— heißt homogen, wenn $b_1 = 0$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
— ist lösbar, wenn $m = n$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
— hat einen Lösungsraum der Dimension $n - \mathrm{Rg}\,[a_{ij}]$, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
— kann unlösbar sein, wenn $b_1 \neq 0$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
— hat immer die Lösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$.	☐ Ja	☐ Nein