

Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil B

Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.

Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabe 1. Es seien K ein Körper und $A, A', T \in K^{n \times n}$ (nicht notwendig invertierbar) mit $AT = TA'$. Dann gilt:

- | | | |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\det A = \det A'$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det A \cdot \det T = \det A' \cdot \det T$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det(A + A') = \det A + \det A'$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det A = \det A'$, wenn AT invertierbar ist | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\det(TA') = \det(TA)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen ($x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 147 & 7 & 0 \\ \pi & \tan(x) & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3. Es seien K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten X über K . Es seien $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$.

- | | | |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| $\text{Grad}(f + g) = \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Grad}(fg) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Grad}(f + g) = \text{Grad}(f - g)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt $q, r \in K[X]$ mit $f = q \cdot g + r$ mit $\text{Grad}(rq) < \text{Grad}(g)$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist g ein Teiler von f , dann ist jede Nullstelle von f auch eine von g . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 4. Es seien K ein Körper und $A \in K^{k \times l}$, $B \in K^{l \times m}$ und $C \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

- | | | |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\text{Rang}(AB) \leq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B))$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang}(AB) \geq \min(\text{Rang}(A), \text{Rang}(B))$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang}(ABC) = \text{Rang}(AB) + \text{Rang}(BC) - \text{Rang}(B)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang}(ABC) \leq \min\{k, l, m, n\}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang}(ABC) > 0$ wenn, $ABC \neq 0$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 5. Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl und S_n die symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, \dots, n\}$.

Es seien σ und τ Permutationen aus S_n . Dann gilt:

- | | | |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\tau \circ \sigma)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{sgn}(\tau \circ \tau) = +1$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $(1, 2, 3) \circ (2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Jede Permutation ist ein Produkt von Dreierzykeln. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt ein $\tau \in S_n$ mit $\tau^{-1} \circ (1, 2)(3, 4) \circ \tau = (1, 2, 3, 4)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 6. Sei K ein Körper, $M \in K^{n \times n}$, χ_M das charakteristische Polynom von M , $t \in K$ und $(X - t)^2$ ein Teiler von χ_M . Dann gilt:

- | | | |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| t ist Eigenwert von M . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| M hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert t . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\chi_M(M)$ bildet jeden Eigenvektor von M auf 0 ab. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Der Rang von M ist gleich n , wenn X kein Teiler von χ_M ist. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Das Minimalpolynom von M ist durch $(X - t)$ teilbar. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 7. Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 1999\}$ und $B := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2000\}$.

- | | | |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| Es gibt eine surjektive Abbildung $\varphi : A \rightarrow B$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Jede Abbildung $\varphi : B \rightarrow A$ ist surjektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Die Abbildung $\varphi : A \times B \rightarrow B, (a, b) \mapsto b$ ist surjektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine injektive Abbildung $\varphi : A \rightarrow B$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Jede Abbildung $\varphi : B \rightarrow A$ ist injektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 8. Sind die folgenden Aussagen richtig?

- | | | |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Eine $n \times n$ -Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n verschiedene Eigenwerte hat. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Jede $n \times n$ -Matrix ist diagonalisierbar. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Eine $n \times n$ -Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie 0 nicht als Eigenwert hat. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes einer $n \times n$ -Matrix ist immer kleiner oder gleich der geometrischen Vielfachheit. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 9.

Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Man berechne $\det(A)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 10.

Seien $V := \mathbb{R}^{3 \times 1}$ und

$$\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \quad \text{sowie} \quad \varphi : V \rightarrow V, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass \mathcal{B} eine Basisfolge von V ist. (3 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)
- (c) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$. (4 Punkte)

Aufgabe 11.

Sei $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\varphi, \psi \in \text{End } V$ definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= A^T & \text{für } A \in V & \quad (\text{Transponierte zu } A) \\ \psi(A) &= A^T + 3A & \text{für } A \in V \end{aligned}$$

- (a) Man beweise, dass φ und ψ diagonalisierbar sind. Man bestimme die Eigenwerte von φ und von ψ . (4 Punkte)
- (b) Für $n = 2$ gebe man explizit eine Basis von V an, die aus Eigenvektoren von ψ besteht. (4 Punkte)

Aufgabe 12.

Sei $A \in \mathbb{F}_5^{3 \times 3}$ die folgende Matrix ($\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$):

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A . (4 Punkte)
 - (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A . (2 Punkte)
 - (c) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von A . (2 Punkte)
 - (d) Geben Sie für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Vielfachheit an. (1 Punkt)
-

Aufgabe 13.

Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

(8 Punkte)