

Test 2 im WS99/00

Es sei K ein Körper und U, V und W K -Vektorräume.

T1) Ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{R} -linear, so gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

- | | | |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| $\varphi(0) = 0$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(1) = 1$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(a \cdot b) = a \cdot \varphi(b)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Bild $\varphi = \mathbb{R}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

T2) Ist $\varphi : V \rightarrow W$ linear, so ist:

- | | | |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| Kern $\varphi = \{\varphi(v) v = \underline{0}\}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Kern $\varphi = \{v \in V \varphi(v) = \underline{0}\}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| φ surjektiv $\iff \varphi$ injektiv | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| φ injektiv \iff Kern $\varphi = \{\underline{0}\}$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

T3) Sind $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen, so gilt:

- | | | |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern φ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern ψ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Kern $(\psi \circ \varphi) \supseteq$ Kern φ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild φ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Bild $(\psi \circ \varphi) \supseteq$ Bild ψ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

T4) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 als \mathbb{R} -Vektorräume)

- | | | |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, x_1)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2, x \mapsto x^2$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

T5) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- | | | |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| Jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist surjektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine injektive, \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist injektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine injektive, \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

T6) Es sei $\varphi : V \rightarrow W$ linear und \mathcal{B} Basis von V . Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- | | | |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| Ist φ injektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von W . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist φ surjektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ Erzeugendensystem von W . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist $V \cong W$, so ist φ ein Isomorphismus. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist φ ein Isomorphismus, so ist $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)\}$ für jedes n -Tupel $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ eine Basis von W . | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

T7) Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- | | | |
|--|-----------------------------|-------------------------------|
| ist lösbar, wenn $n \geq m$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| ist eindeutig lösbar, wenn $\text{Rg } [a_{ij}] = 0$ ist. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| ist für $m > n$ nie eindeutig lösbar. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| hat einen Lösungsraum der Dimension $\text{Rg } [a_{ij}]$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| hat einen Lösungsraum der Dimension $n - m$, falls $b_1 = \dots = b_m = 0$ ist. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| ist eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung hat. | <input type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.