Klausur zu “Lineare Algebra I für Informatiker”, SS 07

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur in Lineare Algebra I
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ Matr.-Nr. | | | | | | |

Vorname: ______________________ Unterschrift: ______________________

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	Σ	Note
Typ	E	E	E	S	S	—	—
Maximalpunkte	14	14	8	11	11	58	—
Punkte							
1. Nachkorrektur							
2. Nachkorrektur							

Aufgabentyp E:

Bei Aufgaben diesen Typs sollen die Ergebnisse zu allen Teilaufgaben, die Sie gelöst haben, auf einem gesonderten Blatt zusammengefasst werden. Für die Abgabe sollen die Blätter dann so gestapelt werden, daß das Ergebnisblatt oben liegt und die Blätter mit den Rechnungen zur selben Aufgabe folgen. Korrigiert werden nur die Ergebnisse, nicht die Rechnungen. **Die Rechnungen müssen trotzdem mit abgegeben werden.** Für das richtige Ergebnis gibt es die angegebene Punktzahl, für eine falsche Antwort Null Punkte. Bitte führen Sie selbständig geeignete Proberechnungen durch, bevor Sie Ihre Ergebnisse aufschreiben.

Aufgabentyp S:

Bei diesen Aufgaben ist der Lösungsweg strukturiert darzulegen und alle Aussagen sind ausführlich zu begründen. Aussagen aus der Vorlesung brauchen nicht noch einmal beweisen zu werden, es sei denn, es ist explizit gefordert.

Fangen Sie bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt an, um die Korrektur zu erleichtern.

Lösungsblatt 19.09.2007 (2. Termin), Gruppe **A**

Klausur zu "Lineare Algebra I für Informatiker", SS 07

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur in Lineare Algebra I
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (Typ E, 14 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, wobei a ein Parameter aus $\mathbb{Q}$ ist.

a) Wie lautet das charakteristische Polynom von A? (2 P.)

$\chi_A(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. (2P)

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie deren Vielfachheiten als Nullstellen des charakteristischen Polynoms an. (3 P.)

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1),$$

d.h. die Eigenwerte lauten 2 und -1. (2P)
Dabei ist 2 doppelter Eigenwert und -1 ist einfacher Eigenwert. (1P)

c) Berechnen sie zu jedem Eigenwert von A die Dimension und eine Basis des zugehörigen Eigenraums. (7 P.)
(Hinweis: Falls nötig, ist hier eine Fallunterscheidung für a zu machen.)

$\dim V(-1, A) = 1$. (1P)
Basis von $V(-1, A)$: $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$. (1P)
Beim Eigenwert 2 unterscheiden sich die Fälle $a \neq -4$ und $a = -4$. (1P)
Im Fall $a \neq -4$ ist $\dim V(2, A) = 1$ (1P) und $(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $V(-1, A)$ (1P).
Im Fall $a = -4$ ist $\dim V(2, A) = 2$ (1P) und $(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix})$ eine Basis von $V(-1, A)$ (1P).

d) Für welche Werte von a ist A diagonalisierbar? (2 P.)

A ist diagonalisierbar genau dann, wenn $a = -4$ (weil nur dann die Vielfachheiten der Eigenwerte mit den Dimensionen der Eigenräume übereinstimmen). (2P)

Aufgabe 2. (Typ E, 14 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Z}_2$. Es bezeichne γ die lineare Abbildung

$$\gamma : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^5, \quad x \mapsto Gx.$$

a) Wieviele Elemente hat der Spaltenraum $\mathrm{SR}(G)$ von G? (2 P.)

$|SR(G)| = 2^3 = 8$. (2P)

b) Ist γ injektiv? (1 P.)

ja (weil G “vollen” Rang hat). (1P)

c) Ist γ surjektiv? (1 P.)

nein (weil $\mathrm{Rg}\ G < 5$). (1P)

Gesucht ist nun eine Matrix H über $\mathbb{Z}_2$, für die $\mathbb{L}_0(H) = \mathrm{SR}(G)$ gilt.

d) Welchen Rang muß H haben? (1 P.)

$\mathrm{Rg}\ H = 5 - \mathrm{Rg}\ G = 2$ (1P)

e) Geben Sie eine solche Matrix H an. Welche Probe können Sie für Ihr Ergebnis machen? (4 P.)
(Hinweis: Als Probe reicht die Angabe einer Formel, die H enthält.)

$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3P)
Probe: $\mathrm{Rg}\ H = 2$ und $H \cdot G = 0$. (1P)

Gesucht ist nun eine Matrix B über $\mathbb{Z}_2$ so, daß $\delta \circ \gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2^3}$ gilt für die lineare Abbildung

$$\delta : \mathbb{Z}_2^5 \to \mathbb{Z}_2^3, \quad y \mapsto By.$$

f) Welche Größe muß B haben? (1 P.)

3×5. (1P)

g) Geben Sie eine solche Matrix B an. Welche Probe können Sie für Ihr Ergebnis machen? (4 P.)
(Hinweis: Als Probe reicht die Angabe einer Formel, die B enthält.)

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3P)
Probe: $\mathrm{Rg}\ B = 3$ und $B \cdot G = E_3$. (1P)

Aufgabe 3. (Typ E, 8 Punkte)

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei U der von den folgenden Vektoren erzeugte Unterraum:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Welche Dimension hat U? (2 P.)

$\dim U = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$ (2P)

b) Geben Sie eine Orthogonalbasis von U an. Welche Probe ist für das Ergebnis möglich? (6 P.)
(Hinweis: Die Basis muß nicht notwendigerweise eine Ortho*normal*basis sein.)

Orthogonalbasis: (w_1, w_2, w_3) mit $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(1P), w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(2P), w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(2P)$. Probe: $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle = \langle w_2, w_3 \rangle = 0$. (1P)

Aufgabe 4. (Typ S, 11 Punkte)

Wir betrachten Endomorphismen in der euklidischen Ebene $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Sei $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß φ_A eine Spiegelung beschreibt und berechnen Sie die Spiegelachse. (5 P.)

$A^t \cdot A = E_2$, also ist A orthogonal. (2P)
$\det A = -1$. (1P) Zusammen folgt, daß A eine Spiegelung beschreibt.
Ansatz: Spiegelachse $= V(1, A)$ oder Spiegelachse $= \langle v + Av \rangle$ für jedes $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathfrak{o}\}$. (1P)
$V(1, A) = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. (1P)

b) Bestimmen Sie umgekehrt A so, daß φ_A die Spiegelung an der Achse $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ist. (6 P.)
(Hinweis: Hier ist nicht mit trigonometrischen Funktionen zu rechnen, sondern ein lineares Gleichungssystem für die Einträge von A aufzustellen.)

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, denn jede Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$ hat laut Vorlesung diese Form. (2P)
Ansatz: $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2P)
Rechnung: Löse das LGS $2a + b = 2, 2b - a = 1$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Ergebnis: $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. (2P)

Aufgabe 5. (Typ S, 11 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt geschrieben als $\langle , \rangle$. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal, geschrieben $x \perp y$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ ist. Es sei U ein Unterraum von V, und die Menge $U^\perp$ sei definiert als

$$U^\perp := \{v \in V \mid u \perp v \text{ für alle } u \in U\}.$$

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Zeigen Sie, daß $U^\perp$ ein Unterraum von V ist. (4 P.)

Unterraumkriterium: $U^\perp$ nicht leer, abgeschlossen unter Addition, abgeschlossen unter skalarer Multiplikation. (1P)
$< u, \mathfrak{o} >= 0$ für alle $u \in U$, also $\mathfrak{o} \in U^\perp$, also $U^\perp$ nicht leer. (1P)
$v, v' \in U^\perp \Rightarrow < u, v + v' >=< u, v > + < u, v' >= 0 + 0 = 0$ für alle $u \in U$, d.h. $v + v' \in U^\perp$. (1P)
$\lambda \in \mathbb{R}, v \in U^\perp \Rightarrow < u, \lambda v >= \lambda < u, v >= \lambda 0 = 0$ für alle $u \in U$, d.h. $\lambda v \in U^\perp$. (1P)

b) Zeigen Sie: $U \cap U^\perp = \{\mathfrak{o}\}$. (3 P.)

Ansatz: Sei $v \in U \cap U^\perp$. Wir zeigen: $v = \mathfrak{o}$. (1P)
Wegen $v \in U^\perp$ ist $u \perp v$ für alle $u \in U$. Da v auch in U liegt, ist also insbesondere $v \perp v$. (1P)
D.h. $\langle v, v \rangle = 0$, woraus nach einem Axiom $v = 0$ folgt. (1P)

Für alle $x \in V$ bezeichnet $\|x\|$ die Länge von x, die als $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definiert ist.

c) Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in V$ gilt: (4 P.)

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y. \quad \text{(Satz von Pythagoras)}$$

(Hinweis: Falls Sie hierfür die Polarisationsidentität verwenden wollen, dann ist diese erst noch zu zeigen! Besser ist es, die Aussage gleich direkt zu beweisen.)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\overset{(1P)}{=} \langle x + y, x + y \rangle \overset{(1P)}{=} \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\overset{(1P)}{=} \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Also gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ genau dann, wenn $\langle x, y \rangle = 0$; also genau dann, wenn $x \perp y$. (1P)

Viel Erfolg!