Klausur zu "Lineare Algebra I für Informatiker", SS 08

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur in Lineare Algebra I
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Aufgabe 1. (Typ MC, 3 Punkte)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Wenn n ungerade ist, dann gibt es einen Eigenvektor von A. ☐ Ja ☐ Nein

b) Wenn v Eigenvektor sowohl von A als auch von B ist, dann auch von AB. ☐ Ja ☐ Nein

c) Wenn v Eigenvektor sowohl von A als auch von B ist, dann auch von $A+B$. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2. (Typ MC, 3 Punkte)

Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften?

a) $\varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐ Ja ☐ Nein

b) $\varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐ Ja ☐ Nein

c) $\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. (Typ E, 9 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$, die den Eigenwert 1 besitzt.

a) Wie lautet das charakteristische Polynom von A? (3 P.)

b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie deren algebraische Vielfachheiten an. (2 P.)

c) Berechnen Sie alle Eigenräume und geben Sie jeweils eine Basis an. (4 P.)

Probe-Hinweis: A ist diagonalisierbar.

Aufgabe 4. (Typ S, 6 Punkte)

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalisierbar? (5 P.)

Wie lauten, in den diagonalisierbaren Fällen, die Diagonaleinträge der Diagonalform? (1 P.)

— bitte wenden —

Aufgabe 5. (Typ E, 13 Punkte)

Es sei V der euklidische Raum $\mathbb{R}^3$, also $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt, und $\mathcal{E}$ bezeichne die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad v := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne $\varphi := \pi_U : V \to V$ die orthogonale Projektion von V auf den Unterraum U.

a) Wie lauten $\operatorname{Rg}\varphi$ und $\operatorname{Def}\varphi$? (2 P.)

b) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von U. (2 P.)

c) Berechnen Sie $\varphi(v)$. (2 P.)

d) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ an, für die $M_\varphi^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist. (2 P.)

Tip: Das Ergebnis von c) verwenden.

e) Wie lautet $M_\varphi^\mathcal{E}$? (3 P.)

Probe-Hinweis: Kürzt man alle Einträge, so ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner gleich 6; weiter kann die Determinante zur Probe verwendet werden.

f) Wieviele 2-dimensionale φ-invariante Unterräume von $\mathbb{R}^3$ gibt es? Beschreiben Sie in Worten, welche Unterräume das sind. (2 P.)

Tip: Beantworten Sie f) aus der geometrischen Anschauung heraus!

Aufgabe 6. (Typ S, 12 Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{F}_5^{2\times 2} \to \mathbb{F}_5^{2\times 3}, \quad X \mapsto X \cdot A, \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Basis von $\operatorname{Ker}\varphi$ und eine Basis von $\operatorname{Im}\varphi$ an. (4 P.)

b) Bestimmen Sie eine Matrix B über $\mathbb{F}_5$ so, daß für $\psi : \mathbb{F}_5^{2\times 3} \to \mathbb{F}_5^{2\times 2}, X \mapsto X \cdot B$ gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. (4 P.)

c) Wieviele verschiedene Matrizen B gibt es, die das erfüllen? Die Antwort ist zu begründen. (2 P.)

d) Gibt es eine Matrix B' über $\mathbb{F}_5$ so, daß für $\psi' : \mathbb{F}_5^{2\times 3} \to \mathbb{F}_5^{2\times 2}, \quad X \mapsto B' \cdot X$ gilt $\varphi \circ \psi' = \mathrm{id}$? Die Antwort ist zu begründen. (2 P.)

Aufgabe 7. (Typ S, 4 Punkte)

Zeigen Sie, daß für jedes $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Matrix $A := S^t S$ positiv definit ist.
(Zu zeigen ist, dass A symmetrisch ist und $x^t A x > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt.)

Bonus-Aufgabe. (Typ S, 4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum der Dimension 2. Zeigen Sie: Wenn für ein $0 \neq \varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt $\varphi^2 = 0$, so hat φ die Abbildungsmatrix $M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ für eine geeignete Basis von V.

Viel Erfolg!