Mathematische Grundlagen

Klausur am 4. März 2011

Denken Sie daran, alle Ihre Behauptungen ausreichend zu begründen und Rechenwege nachvollziehbar zu dokumentieren.

Aufgabe 1. *(3 Punkte)*
Es seien A und B mathematische Aussagen. Zeigen Sie:

$$((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A) \iff (A \Rightarrow B)\,.$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Es seien $M := \{1,3,5,3,-3,5,-1,-3,5,-1\}$ und $N := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}, p \leq 10\}$. Bestimmen Sie

$$|M|, \quad |N|, \quad (M \setminus N) \times (N \setminus M), \quad \mathrm{Pot}(M \cap N), \quad |\mathrm{Pot}(M \cup N)|.$$

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} k^2 \;=\; n(2n-1).$$

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Prüfen Sie, ob 33 in $\mathbb{Z}_{274}$ invertierbar ist, und geben Sie gegebenenfalls das Inverse an.

Aufgabe 5. *(2+2+2 Punkte)*
Es seien $a, n \in \mathbb{N}$ und

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_{an}, \quad x \mapsto a \cdot x, \qquad\qquad \psi : \mathbb{Z}_{an} \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad x \mapsto x \bmod n.$$

Untersuchen Sie die Abbildung φ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Zeigen Sie außerdem:

a) Die Abbildung φ ist ein Gruppenhomomorphismus bezüglich der Addition, aber für $a > 1$ kein Ringhomomorphismus.

b) Es ist $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_n}$ genau dann, wenn $n \mid (a-1)$.

Aufgabe 6. *(2+2 Punkte)*
Es seien A, B, M und N Mengen, mit $A \neq \emptyset \neq B$ und $M \subseteq A, N \subseteq B$. Weiter sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) $f^{-1}(\complement N) = \complement(f^{-1}(N))$.

b) Falls f surjektiv ist, so gilt $\complement(f(M)) \subseteq f(\complement M)$.

(Die Komplemente sind bezüglich A bzw. B gebildet.)

Aufgabe 7. *(4 Punkte)*
Auf der Menge $M := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ Funktion}\}$ sei die Relation $\preceq$ definiert durch

$$f \preceq g :\iff f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\preceq$ eine Ordnung ist. Ist $\preceq$ eine Totalordnung?

Aufgabe 8. *(4 Punkte)*
Die Relation $\sim$ auf $\mathbb{C}$ sei definiert durch

$$z \sim w :\iff \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(w) \; = \; \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(w).$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Bestimmen Sie ein Vertretersystem von $\mathbb{C}$ bezüglich $\sim$.

Aufgabe 9. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie das Inverse der folgenden Matrix über den komplexen Zahlen.

$$A := \begin{bmatrix} i & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1-i \\ -1 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Aufgabe 10. *(3 Punkte)*
Es sei R ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{A \in R^{n\times n} \mid A \text{ invertierbar mit } A^{-1} = A^T\}$$

eine Untergruppe der invertierbaren Matrizen in $R^{n\times n}$ bezüglich Matrixmultiplikation ist.