

Algebraische Kombinatorik 2014

Blatt 2

Abgabe am 02.05.2014 zu Beginn der Übung. Es darf zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien (M, G) und (N, H) endliche Operationen mit disjunkten Mengen M und N . Bestimmen Sie den Zykelzähler $Z_{(M \uplus N, G \times H)}$ der Operation

$$(G \times H) \times (M \uplus N) \rightarrow M \uplus N, ((g, h), x) \mapsto \begin{cases} gx & \text{falls } x \in M, \\ hx & \text{falls } x \in N, \end{cases}$$

in Abhängigkeit von $Z_{(M, G)}$ und $Z_{(N, H)}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es seien (M, G) und (N, H) endliche Operationen. Dann operiert $G \times H$ auf $M \times N$ vermöge

$$(G \times H) \times (M \times N) \rightarrow M \times N, ((g, h), (m, n)) \mapsto (gm, hn).$$

Zeigen Sie, daß

$$Z_{(M \times N, G \times H)} = \frac{1}{|G||H|} \sum_{(g, h) \in G \times H} \prod_{i=1}^{|G|} \prod_{k=1}^{|H|} z_{\text{kgV}(i, k)}^{\text{ggT}(i, k) a_i(\bar{g}) a_k(\bar{h})}$$

gilt und bestimmen Sie damit die Anzahl der unnummerierten bipartiten Graphen mit $5 + 5$ Ecken.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die Ecken, Kanten und Seitenflächen eines Ikosaeders (zusammen mit der leeren Menge und dem Ikosaeder selbst) bilden einen Verband auf dem A_5 operiert.

- Bestimmen Sie die Matrizen A^\vee und A^\wedge dieses Verbands mit der Gruppe A_5 .
- Wie viele Seitenpaare des Ikosaeders schneiden sich in einer vorgegebenen Ecke, einer vorgegebenen Kante, einer vorgegebenen Seite oder aber gar nicht?
- Die A_5 operiert auch auf dem Verband der durch ein Dodekaeder (dem zum Ikosaeder dualen platonischen Körper) gegeben ist. Bestimmen Sie die Matrizen A^\vee und A^\wedge für diesen Verband mit der Gruppe A_5 .
- Das Supremum wievieler Eckenpaare eines Dodekaeders ist eine vorgegebene Seite, eine vorgegebene Kante, eine vorgegebene Ecke oder aber das ganze Dodekaeder?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es seien $0 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, daß $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}[x]$ teilerfremd zu $x(x-1)$ ist.