Algebraische Kombinatorik 2014

Blatt 4

Abgabe am 16.05.2014 zu Beginn der Übung. Es darf zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Sei M eine endliche Menge. Zeigen Sie:

(a) Die Young-Untergruppen von S_M bilden einen Verband bezüglich Schnitt und Erzeugnisbildung.

(b) Es gibt einen S_M-verträglichen Verbandsisomorphismus zwischen der Menge der Young-Untergruppen und dem Verband der Partitionen von M.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Die A_4 operiert auf den Seiten und Kanten eines Tetraeders. Bestimmen Sie die Anzahl der simultanen Färbungen der Seiten und Kanten mit zwei Farben in Abhängigkeit des Ähnlichkeitstyps (d.h. der Konjugiertenklasse des gemeinsamen Stabilisators).

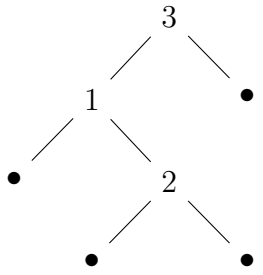
Aufgabe 3 (4 Punkte)
Wie oft muß man die Potenzmengenbildung iterieren, bis man aus $\underline{5}$ alle Konjugiertenklassen von Untergruppen der S_5 als Stabilisatoren bekommt?

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Sei F eine Spezies und $\sigma\colon U \to V$ eine Bijektion zwischen zwei endlichen Mengen. Zeigen Sie, daß $F[\sigma]$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Inverse.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Die Menge $bB[U]$ der Binärbäume über einer endlichen Menge U ist definiert durch

$$bB[U] = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{falls } U = \emptyset, \\ \{(L, w, R) \mid L \in bB[S],\ R \in bB[T],\ U = S \uplus \{w\} \uplus T\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Binärbaum $((\emptyset, 1, (\emptyset, 2, \emptyset)), 3, \emptyset)$ über $\underline{3}$ kann z.B. wie folgt visualisiert werden:



(a) Wie muß man $bB[\sigma]$ für eine Bijektion $\sigma\colon U \to V$ von endlichen Mengen U, V definieren, damit bB eine Spezies wird?

(b) Bestimmen Sie die verschiedenen Isomorphietypen von $bB[\underline{4}]$.