Algebraische Kombinatorik 2014

Blatt 6

Abgabe am 30.05.2014 zu Beginn der Übung. Es darf zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien F, G Spezies und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeigen Sie:

(a) $\boxed{n} \cdot F = nF := F + \cdots + F$ (n Summanden).

(b) $F \cdot G = \boxed{0}$ impliziert $F = \boxed{0}$ oder $G = \boxed{0}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei $\boxed{tO}$ die Spezies der Totalordnungen.

(a) Zeigen Sie $\boxed{tO_i} = \boxed{eM_1}^i$ für alle $i \geq 1$.

(b) Begründen Sie die Identitäten

$$\boxed{tO} = \sum_{i=0}^{\infty} \boxed{eM_1}^i = \boxed{1} + \boxed{eM_1} \cdot \boxed{tO} = \prod_{i=0}^{\infty} (\boxed{1} + \boxed{eM_1}^{2^i}) .$$

Leiten Sie daraus die erzeugenden Funktionen von $\boxed{tO}$ sowie Identitäten für diese her.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Seien $a = a(x_1, x_2, \ldots)$ und $b = b(x_1, x_2, \ldots)$ aus $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \ldots]]$. Weiter sei $\mu \colon \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ die Moebiusfunktion. Zeigen Sie

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} a_k \iff a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} b_k .$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Weiter sei $\boxed{S^{(k)}}$ die Spezies der Permutationen welche genau k Zykel haben und $\boxed{Pa^{(k)}}$ die Spezies der Partitionen mit genau k Blöcken.
Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sind $s(n,k) := |\boxed{S^{(k)}}(\underline{n})|$ bzw. $S(n,k) := |\boxed{Pa^{(k)}}(\underline{n})|$ die Stirlingschen Zahlen erster bzw. zweiter Art. Zeigen Sie:

(a) $$\boxed{S^{(k)}} = \boxed{eM_k} \circ \boxed{Zy} \qquad \boxed{Pa^{(k)}} = \boxed{eM_k} \circ \boxed{eM_+}$$

(b) $$\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(-\log(1-x))^k}{k!} \qquad \sum_{n=k}^{\infty} S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(\exp(x) - 1)^k}{k!}$$

(c) Für $n \geq 0$ und $k \geq 1$ gelten

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) + n \cdot s(n,k) \qquad \sum_{i=0}^{n} s(n,i) x^i = x^{(n)}$$

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + k \cdot S(n,k) \qquad \sum_{i=0}^{n} S(n,i) x_{(i)} = x^n$$

mit $x^{(\ell)} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+\ell-1)$ und $x_{(\ell)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-\ell+1)$.