Algebraische Kombinatorik 2014

Blatt 7

Abgabe am 06.06.2014 zu Beginn der Übung. Es darf zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Sei G eine Spezies mit $G(\emptyset) = \emptyset$ und $F := \boxed{eM} \circ G$. Zeigen Sie

(a) $G(x) = \log F(x)$

(b) $\tilde{G}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log \tilde{F}(x^k)$

(c) $Z_G(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log Z_F(x_k, x_{2k}, \dots)$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Zeigen Sie

$$Z_{\boxed{Zy}}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - x_k}$$

und folgern Sie daraus die Identität

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - x^k} .$$

Hier bezeichne $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Eulersche Phifunktion.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Seien F, G Spezies. Zeigen Sie die folgenden Identitäten durch Angabe von expliziten Isomorphismen.

(a) $(F + G)' = F' + G'$.

(b) $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$.

(c) $(F \circ G)' = (F' \circ G) \cdot G'$ falls $G(\emptyset) = \emptyset$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $n \geq 1$ und $i \geq 0$. Bestimmen Sie die n-ten Ableitungen von $\boxed{eM_i}$, $\boxed{eM}$, $\boxed{Pm}$ und $\boxed{tO}$.