# Algebraische Kombinatorik 2014

## Blatt 8

Abgabe am 20.06.2014 zu Beginn der Übung. Es darf zu zweit abgegeben werden.

**Aufgabe 1** (4 Punkte)
Bestimmen Sie einen expliziten Isomorphismus zwischen $\boxed{tO} \times \boxed{S}$ und $\boxed{tO} \times \boxed{tO}$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Zeigen Sie $\boxed{Wi} = \boxed{wB} + \boxed{Wi} \cdot \boxed{wB}$ und folgern Sie daraus die Identität

$$n^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} k^k (n-k)^{n-k-1} \qquad (n \geq 1)\ .$$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die durchschnittliche Anzahl der Zusammenhangskomponenten $\kappa_n(\boxed{sG})$ in einem zufälligen schlichten Graphen mit $n$ Kanten gegeben ist durch

$$\kappa_n(\boxed{sG}) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{\binom{n-i}{2}} |\boxed{zG}(\underline{i})|\ .$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)
Sei $F$ eine Spezies und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Wir definieren

$$F^{\bullet n} = \begin{cases} F & \text{falls } n = 0, \\ (F^{\bullet(n-1)})^{\bullet} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$F^{\bullet n} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \boxed{eM_1}^k \cdot F^{(k)}$$

wobei $F^{(k)}$ die $k$-te Ableitung von $F$ und $S(n,k)$ die Stirlingschen Zahlen 2. Art bezeichnen (vgl. Aufgabe 4 auf Blatt 6).

**Aufgabe 5** (4 Punkte)
Für eine Permutation $\sigma$ sei $\mathrm{zyk}(\sigma)$ die Anzahl der Zykel in einer disjunkten Zykelzerlegung. Es sei $\boxed{S_w}$ die Spezies $\boxed{S}$ versehen mit der Gewichtsfunktion $w\colon S(M) \to \mathbb{Z}[\alpha],\ \sigma \mapsto \alpha^{\mathrm{zyk}(\sigma)}$. Zeigen Sie

$$\boxed{S_w}(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha} \qquad \widetilde{\boxed{S_w}}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^k}\right)^{v_k(\alpha)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\alpha x^k}$$

$$Z_{\boxed{S_w}}(x_1, x_2, \dots) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x_k}\right)^{v_k(\alpha)}$$

wobei $v_k(\alpha) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \phi(d) \alpha^{k/d}$.
(Hinweis: Man verwende Definition 9 und Proposition 11 auf S. 84f in Bergeron, Labelle, Leroux: Combinatorial species and tree-like structures.)