Algebraische Kombinatorik 2014

Blatt 12

Abgabe am 18.07.2014 zu Beginn der Übung. Es darf zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei Γ ein symmetrisches Assoziationsschema. Beschreiben Sie, wie die Zusammenhangskomponenten von Γ_i aus $(I_n + A_i)^e$ (mit e genügend groß) abgelesen werden können.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Sei Γ ein kommutatives Assoziationsschema. Angenommen, es gibt ein $i \geq 0$ mit $\Gamma_i \neq \Gamma_i^{tr}$. Zeigen Sie, daß A_i einen nicht-reellen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es gelten die Bezeichnungen von Bemerkung 4.48. Bestimmen Sie die Abstandsklassen bezüglich Γ_3 sowie die zugehörige Partition β.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Sei $q \neq 2$ eine Primzahl und Γ das Assoziationsschema des gerichteten Paley-Graphen G der Ordnung q.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen a_1 und a_2.

(b) Bestimmen Sie die Eigenmatrizen P und Q wie in Beispiel 4.52.

(c) Sei $q \equiv 1 \mod 4$. Zeigen Sie, daß G ein stark regulärer ungerichteter Graph ist und bestimmen Sie die zugehörigen Parameter.

(d) Sei $q \equiv 1 \mod 4$. Bestimmen Sie P und Q erneut, dieses Mal mit Hilfe von Aufgabe 2 auf Blatt 10.

Hinweis: Sei $E = \mathbb{F}_q[x]/\langle x^2+1\rangle$ und σ bezeichne den nicht-trivialen Ringmorphismus auf E. Zu $a \in \mathbb{F}_q$ läßt sich $|\{(x,y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \mid x^2+y^2 = a\}|$ mit Hilfe der surjektiven Normabbildung $E \to \mathbb{F}_q,\ x \mapsto x \cdot \sigma(x)$ bestimmen. Man betrachte dazu die Fälle $q \equiv 1 \mod 4$ und $q \equiv 3 \mod 4$ getrennt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Charaktertafel (d.h. erste Eigenmatrix) des Assoziationsschemas des Ikosaedergraphen.