G. Nebe, M. Kirschmer Abgabe am 31.10.2008.

Gitter und Codes, WS 08/09

Blatt 3

Aufgabe 1 (7=3+2+2 Punkte).
Es gelten die Bezeichnungen von Aufgabe 1 auf Blatt 2.

(a) Sei $v := \frac{1}{3}(-2e_1 - 2e_2 - 2e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8 + e_9)$. Zeige, daß

$$\mathbb{E}_8 = \langle e_1 - e_2,\, e_2 - e_3,\, \ldots, e_7 - e_8, v\rangle_{\mathbb{Z}}$$

gilt. (Genauer: obiges Gitter besitzt eine Grammatrix wie in Beispiel 1.16 im Skript). Zeige weiter, daß $\mathbb{A}_8 \subseteq \mathbb{E}_8 \subseteq \mathbb{A}_8^{\#}$ gilt und folgere $\mathbb{E}_8 = \mathbb{E}_8^{\#}$.

(b) Sei $w := e_9 - e_8$ ($\in \mathbb{A}_8 \subseteq \mathbb{E}_8$). Zeige $\mathbb{E}_7 = \langle w\rangle_{\mathbb{Z}}^{\perp,\mathbb{E}_8}$ und folgere $\det(\mathbb{E}_7) = 2$.

(c) Sei $w' = e_8 - e_7$. Zeige $\mathbb{E}_6 = \langle w, w'\rangle_{\mathbb{Z}}^{\perp,\mathbb{E}_8}$ und folgere $\det(\mathbb{E}_6) = 3$.

Aufgabe 2 (6=4+2 Punkte).
Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $L = \langle(1,4,-3),\ (3,-2,3),\ (2,-2,2)\rangle_{\mathbb{Z}}$. Weiter seien $U_1 = \langle(1,1,1)\rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 = \langle(1,0,-2),\, (2,1,1)\rangle_{\mathbb{R}}$. Ferner bezeichne $\pi_i : V \to U_i$ die Projektion von $V = U_1 \oplus U_2$ auf U_i.

(a) Bestimme Gitterbasen für $L_1 := L \cap U_1$, $L_2 := L \cap U_2$, $L_1' := L\pi_1$ und $L_2' := L\pi_2$.

(b) Bestätige durch direkte Rechnung, daß

$$L_1'/L_1 \;\cong\; L_2'/L_2 \;\cong\; (L_1' \oplus L_2')/L \;\cong\; L/(L_1 \oplus L_2)\ .$$

(Hinweis: Computeralgebrasystem wie z.B. Maple)

Aufgabe 3 (9=2+2+4+1 Punkte)
Sei $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(\omega)$ mit $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Sei C der $\mathbb{F}_4$-lineare Code mit Erzeugermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & 1 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 & 0 & \omega & 0 \\ \omega & \omega^2 & 0 & \omega^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

(a) Bestimme den Minimalabstand $d(C)$.

(b) Ist C ein perfekter Code?

(c) Bestimme einen MDD (minimal distance decoder) für C; d.h. gib eine geeignete Liste von Nebenklassenrepräsentanten in $\mathbb{F}_4^{1\times 6}/C$ an.

(d) Decodiere mit dem in (c) erstellten MDD das Wort $x := (1, \omega^2, 1, 1, \omega, 0)$ zu einem Codewort aus C.