Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Sei $C < \mathbb{F}_3^{1\times 4}$ der $\mathbb{F}_3$-lineare Code mit Erzeugermatrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimme das Codegitter L_C sowie das Minimum $\min(L_C)$. Ist L_C isometrisch zum Standardgitter $\mathbb{Z}^{1\times 4}$?

Aufgabe 2 (2 Punkte).
Sei $(V, (-,=))$ ein euklidischer Vektorraum und seien $L' \subseteq L$ zwei volle Gitter in V. Zeige $\det(L') = \det(L) \cdot [L : L']^2$.

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Zeige: $L_{H(\mathbb{F}_2,3)^\perp}$ ist isometrisch zu $\mathbb{E}_7$.

Hinweis: Sei $B := (b_1, \dots, b_7)$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^{1\times 7}$ mit $(b_i, b_i) = \frac{1}{2}$.

- Bestimme eine Basis von $L_{H(\mathbb{F}_2,3)} \leq \langle b_1, \dots, b_7 \rangle_{\mathbb{Z}}$ und dualisiere diese.
- Zeige: Die Zeilen von $S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ bilden ebenfalls eine Basis von $L^{\#}_{H(\mathbb{F}_2,3)}$ bezüglich B.
- Bestimme die Grammatrix bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 4 (9=3+2+4 Punkte).

(a) Sei K ein endlicher Körper oder ein Körper der Charakteristik 0. Weiter sei $f \in K[X] \setminus K$. Da $K[X]$ ein faktorieller Ring ist, besitzt f bekanntlich eine eindeutige Faktorisierung $f(X) = c \cdot f_1(X) \cdot \dots \cdot f_s(X)$ in normierte irreduzible Faktoren $f_i \in K[X] \setminus K$ mit $c \in K$.

Zeige: Es ist $\gcd(f, f') = 1$ genau dann wenn $f_i \neq f_j$ für alle $i \neq j$.

(b) Zeige $X^N - 1 \in \mathbb{F}_q[X]$ zerfällt genau dann in paarweise verschiedene normierte irreduzible Faktoren wenn $\gcd(N, q) = 1$.

(c) Bestimme Erzeuger- und Prüfmatrizen aller $\mathbb{F}_7$-linearer zyklischer Codes der Länge 4.