G. Nebe, M. Kirschmer Abgabe am 25.11.2008.

Gitter und Codes, WS 08/09

Blatt 6

Aufgabe 1 (2 Punkte).
Zeige, daß die Länge eines Typ II Codes durch 8 teilbar ist.

Hinweis: Seien $a := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$ in der Gruppe G_{II}. Betrachte $(ab)^3$.

Aufgabe 2 (6=3+3 Punkte).
Sei $C = C^\perp < \mathbb{F}_2^N$ doppelt gerade. Bestimme p_C in den folgenden zwei Fällen:

(a) $N = 48$ und $d(C) = 12$.

(b) $N = 72$ und $d(C) = 16$.

Aufgabe 3 (13=1+2+5+4+1 Punkte).
Sei $n > 0$ durch 4 teilbar. Wir setzen

$$\begin{aligned}
g_n &:= \langle (1, \dots, 1) \rangle^\perp < \mathbb{F}_2^n \\
d_{2n} &:= \{(c, c) \mid c \in g_n\} < \mathbb{F}_2^{2n} \\
d_{2n}^+ &:= \langle d_{2n}, v \rangle < \mathbb{F}_2^{2n} \\
z_{2n} &:= \langle d_{2n}, w \rangle < \mathbb{F}_2^{2n} \\
d_{2n}^- &:= \langle d_{2n}, v + w \rangle < \mathbb{F}_2^{2n}
\end{aligned}$$

wobei $v := (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, 0 \dots, 0) \in \mathbb{F}_2^{2n}$ und $w := (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}_2^{2n}$.

(a) Zeige, daß d_{2n}^+ und d_{2n}^- äquivalente Codes sind.

(b) Zeige, daß d_{2n}^+ und z_{2n} jeweils selbstdual sind.

(c) Zeige die folgenden Isometrien:

(i) $L_{z_{2n}}$ ist isometrisch zum Standardgitter.

(ii) $L_{d_{2n}} \cong \mathbb{D}_{2n}$.

(iii) $L_{d_{2n}^+} \cong \mathbb{D}_{2n}^+$ wobei $\mathbb{D}_{2n}^+$ das Gitter L_1 aus Aufgabe 4d von Blatt 2 bezeichne.

Hinweis: Es ist $L_{d_{2n}}$ das gerade Teilgitter von $L_{z_{2n}}$ und $\mathbb{D}_{2n}$ ist das gerade Teilgitter des Standardgitters. Weiter sind $L_{d_{2n}^+}$ und $L_{d_{2n}^-}$ ganz. Ferner wurde in Aufgabe 4d auf Blatt 2 $L_1 \cong L_2$ gezeigt.

(d) Bestimme die Hamminggewichtszähler von g_n, d_{2n}, d_{2n}^+ und z_{2n}.

(e) Zeige, daß d_{16}^+ ein extremaler Code ist.