Blatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte).

Bestimme alle diskreten Bewertungen von $\mathbb{Q}$.

(Hinweis: Ist v eine solche Bewertung, so ist $\mathbb{Z} \subseteq R_v$. Nun zeige man, daß es genau eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ gibt, die mit 1 bewertet wird; alle anderen haben Bewertung 0.)

Aufgabe 2 (6=1+1+1+3 Punkte)

Sei v eine diskrete Bewertung auf einem Körper K. Zeige:

(a) Sind $x, y \in K$ mit $|x|_v \neq |y|_v$ dann ist $|x+y|_v = \max\{|x|_v, |y|_v\}$. Folgere, daß jedes Dreieck in K gleichschenklig ist.

(b) Ist $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge in K, so existiert ein $r \in \mathbb{R}$ mit $|a_n|_v \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Ist $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge in K, aber keine Nullfolge, so existieren $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n|_v \geq \delta$ für alle $n \geq N$.

(d) Die Menge der Cauchy-Folgen bilden einen Teilring des Rings aller Folgen in K und die Menge der Nullfolgen sind ein Ideal in diesem Teilring.

Aufgabe 3 (8=1+1+2+2+2 Punkte)

Bestimme die p-adische Entwicklung $\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i$ mit $0 \leq a_i \leq p-1$ für alle $i \geq k$ und $k \in \mathbb{Z}$ der folgenden Zahlen:

(a) $a+b$ und $a \cdot b$ mit $a = 5^{-1}+2+3\cdot 5+4\cdot 5^2+4\cdot 5^3$ und $b = 2\cdot 5^{-2}+4\cdot 5^{-1}+1+3\cdot 5^2 \in \mathbb{Q}_5$.

(b) $-1 \in \mathbb{Q}_p$ mit p beliebig.

(c) $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}_7$.

(d) $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}_5$.

(e) $\frac{1}{5\cdot 13} \in \mathbb{Q}_5$.

Aufgabe 4 (4=1+3 Punkte)

Eine p-adische Entwicklung $\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i$ mit $0 \leq a_i \leq p-1$ für alle $i \geq k$ und $k \in \mathbb{Z}$ heißt endlich, falls $\{i \geq k \mid a_i \neq 0\}$ endlich ist. Sie heißt periodisch falls es ganze Zahlen $N \geq k$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_{i+\ell} = a_i$ für alle $i \geq N$. Zeige:

(a) Ist $x \in \mathbb{N}_0$, so ist die p-adische Entwicklung von x endlich.

(b) Die p-adische Entwicklung von $x \in \mathbb{Q}_p$ ist genau dann periodisch wenn x in $\mathbb{Q}$ liegt.