G. Nebe, M. Kirschmer Abgabe am 20.01.2009.

Gitter und Codes, WS 08/09

Blatt 12

Aufgabe 1 (5=2+3 Punkte).
Sei $n \in \mathbb{N}$ und q eine Primzahlpotenz. Weiter sei $\Gamma = \Gamma(n, q)$ der Graph mit der Eckenmenge $\mathcal{M}(n, q)$. Zwei Ecken $C, D \in \mathcal{M}(n, q)$ seien genau dann in Γ verbunden, falls $\dim(C \cap D) = \frac{n}{2} - 1$ gilt. Zeige:

(a) Für $C, D \in \mathcal{M}(n, q)$ ist $d(C, D) := \frac{n}{2} - \dim(C \cap D)$ die Länge eines kürzesten Weges von C nach D in Γ.

(b) Die Einschränkung von $\Gamma(n, 2)$ auf die doppeltgeraden Codes in $\mathbb{F}_2^n$ ist zusammenhängend.

Aufgabe 2 (3 Punkte).
Sei K ein Körper. Zeige, daß jede Klasse in $WQ(K)$ einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten anisotropen Vertreter enthält.

Aufgabe 3 (8 = 3+5 Punkte).

(a) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeige $WQ(K) = \langle [[a]] \mid a \in K^*/(K^*)^2 \rangle$ und es gilt die Identität

$$(*)\quad [[a]] + [[b]] = \begin{cases} 0 & \text{falls } a + b = 0 \\ [[a+b]] + [[(a+b)ab]] & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } a, b \in K^* .$$

(b) Für $K \in \{\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{R}\}$ wähle jeweils ein Vertretersystem $(a_1, \dots, a_s)$ von $K^*/(K^*)^2$. Bestimme die durch $(*)$ induzierten Relationen zwischen $[[a_i]]$ und $[[a_j]]$ für $1 \leq i < j \leq s$ explizit und zeige, daß diese eine Menge definierender Relationen bilden.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Sei q eine Primzahlpotenz. Bestimme den Isomorphietyp von $WQ(\mathbb{F}_q)$ (Hinweis: Beispiel 10.5).