G. Nebe, M. Kirschmer

Lösung 13

Aufgabe 1.

Sei $\varphi \colon N \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein Homomorphismus. Nach dem Elementarteilersatz existieren $a_1, \dots, a_n \in A$ und $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ mit $r \le n$ so, daß $A = \langle a_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle a_n \rangle$ und $N = \langle k_1 a_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle k_n a_n \rangle$.

Für $1 \le i \le r$ gibt es $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ mit $\varphi(k_i a_i) = \lambda_i + \mathbb{Z}$. Dann induziert $a_i \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda_i}{k_i} + \mathbb{Z} & \text{falls } 1 \le i \le r \\ \mathbb{Z} & \text{sonst} \end{cases}$ einen Homomorphismus $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ welcher φ fortsetzt.

Aufgabe 2.

(a) Im Skript haben wir bereits $8[\phi_1] = 0$ und $2[\phi_1] = 2[\psi_1]$ gezeigt. Also ist auch $8[\psi_1] = 0$. Daher genügt es die Behauptung für $k = 1, 3, 5, 7$ zu zeigen. Der Fall $k = 1$ ist klar.

(i) Sei (a, b) eine Basis von $X := \psi_1 \perp \psi_7$. Weiter sei $N = \langle a + b \rangle$. Dann ist $q(N) = 0$ und damit $N < N^\perp$. Wegen $|N| = 4$ und $|X| = 16$ folgt $N = N^\perp$. Also ist $\psi_1 \perp \psi_7$ schwach metabolisch und somit $[\psi_7] = -[\psi_1] = 7[\psi_1]$ da $8[\psi_1] = 0$.

(ii) Sei (a, b, c) eine Basis von $X := \psi_1 \perp \psi_1 \perp \psi_1$. Weiter seien $e := 2(a + b)$ und $f = 2(b + c)$. Setzen wir $N := \langle e, f \rangle = \{0, e, f, e + f = 2(a + c)\}$. Dann ist $q(e) = q(f) = q(e + f) = 0$. Sei $t := xa + yb + yz \in X$. Dann gilt

$$\begin{aligned} t \perp e &\iff q(t + e) - q(t) = 0 \iff (x + 2)^2 + (y + 2)^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2 \equiv_8 0 \\ &\iff x + y \text{ gerade}. \end{aligned}$$

Analog ist $t \perp f \iff y + z$ gerade. Also ist

$$\begin{aligned} N^\perp &= \langle 2a, 2b, a + b, c \rangle \cap \langle a, 2b, b + c, 2c \rangle \\ &= \langle 2a, 2b, a + b, a + b + c \rangle \cap \langle a, 2b, a + b + c, 2c \rangle = \langle 2a, 2b, 2c, a + b + c \rangle \\ &= \langle 2a, 2b, a + b + c \rangle \end{aligned}$$

Weiter ist damit $N^\perp/N = \langle a + b + c + N \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\overline{q}(a + b + c + N) = 3/8$ also folgt $[X] = [(N^\perp/N, \overline{q})] = [\psi_3]$.

(iii) Wie in (i) ist $\psi_3 \perp \psi_5$ schwach metabolisch. Also ist $[\psi_5] = -[\psi_3] = -3[\psi_1] = 5[\psi_1]$ nach dem bereits gezeigten.

(b) Sei (a, b, c, d) eine Basis von $X := \psi_1 \perp \psi_1 \perp \psi_1 \perp \psi_1$. Weiter seien $e := 2(a + b)$, $f = 2(a + c)$ und $g = 2(a + d)$. Setzen wir $N := \langle e, f, g \rangle = \{0\} \cup \{2(x + y) \mid x, y \in \{a, b, c, d\}, x \ne y\}$. Für $x, y \in \{a, b, c, d\}$ mit $x \ne y$ ist $q(x + y) \equiv_{\mathbb{Z}} 0$.

Wie schon zuvor zeigt man, daß $xa + yb + zc + wd \in N^\perp$ genau dann, wenn x, y, z, w entweder alle gerade oder aber alle ungerade sind. Damit ist

$$N^\perp = \langle 2a, 2b, 2c, 2d, a + b + c + d \rangle = \langle 2a, 2b, 2c, a + b + c + d \rangle$$

Nun ist $|N^\perp/N| = 32/8 = 4$ schon recht vielversprechend und aus $|N^\perp/N| = 32/8 = 4$ folgt, daß $N^\perp/N = \langle 2a + n, a + b + c + d + N \rangle$. Weiter ist

$$\overline{q}(2a + N) = \overline{q}(a + b + c + d + N) = \overline{q}(-a + b + c + d + N) = 1/2\,.$$

Also gilt $4[\psi_1] = [(N^\perp/N, = \overline{q})] = [\chi]$.

(c) Sei (a, b) eine Basis von $X := \phi_1 \perp \phi_3$. Weiter sei $N = \langle a + b \rangle$. Dann ist wieder $q(N) = 0$ und damit $N < N^\perp$. Wegen $|N| = 2$ und $|X| = 4$ folgt $N = N^\perp$. Also ist X schwach metabolisch und somit $[X] = 0$. Das war zu zeigen.

Aufgabe 3.

Für $x \in \mathbb{Q}$ bzw. $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sei $e(x) := \exp(2\pi \mathrm{i} x)$. Weiter sei $\zeta_8 := e(1/8)$.

(a) $k = 6$: Nach Blatt 3 ist $\mathbb{E}_6^\# / \mathbb{E}_6 \cong C_3$. Sei $B := (b_1, \ldots, b_6)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{E}_6$ mit

$$\mathcal{G}(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist z.B. $x := \frac{1}{3} \cdot (2b_1 + b_2 + 3b_3 + 2b_4 + b_5 + 3b_6) \in \mathbb{E}_6^\#$ wie man leicht nachprüft. Also ist

$$\begin{aligned} \Gamma((\mathbb{E}_6^\# / \mathbb{E}_6, q)) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(e(0) + e(q(x)) + e(q(-x))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2e(2/3)) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + 2\frac{\sqrt{-3} - 1}{2}\right) = \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

$k = 7$: Nach Blatt 3 ist $\mathbb{E}_7^\# / \mathbb{E}_7 \cong C_2$. Sei $B := (b_1, \ldots, b_7)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{E}_7$ mit

$$\mathcal{G}(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist z.B. $x := \frac{1}{2}(2b_1 + 2b_2 4b_3 + 3b_4 + 2b_5 + b_6 3b_7) \in \mathbb{E}_7^\#$ wie man leicht nachprüft. Also ist

$$\begin{aligned} \Gamma((\mathbb{E}_7^\# / \mathbb{E}_7, q)) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e(0) + e(q(x))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e(3/4)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - I) = \zeta_8^5\,. \end{aligned}$$

$k = 8$: In diesem Fall ist $\mathbb{E}_8 = \mathbb{E}_8^\#$ und somit $\Gamma((\mathbb{E}_8^\# / \mathbb{E}_8, q)) = e(0) = 1$.

(b) Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{Z}^{1 \times n}$ versehen mit dem üblichen Skalarprodukt. Dann ist $\mathbb{D}_n = \{x \in \mathbb{Z}^{1 \times n} \mid x x^{\mathrm{tr}} \in 2\mathbb{Z}\}$. Weiter sei $v_n := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n e_i$.

n gerade: Nach Blatt 3 wird $\mathbb{D}_n^\# / \mathbb{D}_n \cong C_2 \times C_2$ erzeugt von $v_n + \mathbb{D}_n$ und $e_1 + \mathbb{D}_n$. Also ist

$$\begin{aligned} \Gamma((\mathbb{D}_n^\# / \mathbb{D}_n, q)) &= \frac{1}{2}(e(0) + e(q(v_n)) + e(q(e_1)) + e(q(v_n + e_1))) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e(n/8) + e(1/2) + e(1/2 + n/8 + 1/2)) = e(n/8) = \zeta_8^n\,. \end{aligned}$$

n ungerade: Nach Blatt 3 wird $\mathbb{D}_n^\# / \mathbb{D}_n \cong C_4$ erzeugt von $v_n + \mathbb{D}_n$. Also ist

$$\begin{aligned} \Gamma((\mathbb{D}_n^\# / \mathbb{D}_n, q)) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} e(i^2 n/8) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e(n/8) + e(4n/8) + e(9n/8)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e(n/8) + (-1)^n + e(n/8 + n)) = e(n/8) = \zeta_8^n\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$ kein Quadrat. Dann definiert

$$(*) \qquad \begin{aligned} \varphi\colon WQ(\mathbb{Q}_p) &\to WQ(\mathbb{F}_p) \oplus WQ(\mathbb{F}_p) \\ [[1]] &\mapsto ([[1+p\mathbb{Z}_p]], 0) \\ [[\varepsilon]] &\mapsto ([[\varepsilon+p\mathbb{Z}_p]], 0) \\ [[p]] &\mapsto (0, [[1+p\mathbb{Z}_p]]) \\ [[p\varepsilon]] &\mapsto (0, [[\varepsilon+p\mathbb{Z}_p]]) \end{aligned}$$

einen Isomorphismus vgl. (Satz 10.30).

Sei (E, q) ein 4-dimensionaler regulärer quadratischer $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum. Dann gilt für den Wittindex $\operatorname{ind}(E, q) \in \{0, 1, 2\}$. Weiter wird die Isometrieklasse von (E, q) eindeutig durch seine Wittklasse $[(E, q)]$ bestimmt (die Dimension ist ja fix).

Im Fall $\operatorname{ind}(E, q) = 2$ ist $(E, q) \cong \mathbb{H}(\mathbb{Q}_p)^2$.

Sei nun $\operatorname{ind}(E, q) = 0$. Weiter sei $\varphi([(E, q)]) = ((E_1, q_1), (E_2, q_2))$ mit anisotropen quadratischen $\mathbb{F}_p$-Vektorräumen (E_i, q_i). Sei $n := \dim_{\mathbb{F}_p}(E_1) + \dim_{\mathbb{F}_p}(E_2)$. Bekanntlich ist $\dim_{\mathbb{F}_p}(E_i) \leq 2$, also $n \leq 4$. Nach der Definition von φ gibt es auch einen anisotropen quadratischen $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum (F, q') mit $\dim_{\mathbb{Q}_p}(F) = n$ und $\varphi([(F, q')]) = ((E_1, q_1), (E_2, q_2))$. Da (E, q) anisotrop ist, folgt $4 = \dim(E) \leq \dim(F) = n$. Also ist $n = 4$ und somit $(E_i, q_i) \cong (\mathbb{F}_{p^2}, N)$ die einzige Möglichkeit.
Umgekehrt ist klar, daß ein solcher Raum (E, q) existiert, denn:
Im Fall $p \equiv_4 1$ ist $[1, \varepsilon + p\mathbb{Z}_p] \cong (\mathbb{F}_{p^2}, N)$ und somit $[1, \varepsilon, p, p\varepsilon]$ tuts.
Im Fall $p \equiv_4 -1$ ist $[1, 1] \cong (\mathbb{F}_{p^2}, N)$ und somit $[1, 1, p, p]$ tuts.

Sei nun $\operatorname{ind}(E, q) = 1$. Dann ist $(E, q) \cong \mathbb{H}(\mathbb{Q}_p) \perp [x, y]$ mit $x, y \in \{1, \varepsilon, p, p\varepsilon\}$ und $[x, y]$ anisotrop.

$p \equiv_4 1$: Aus $(*)$ und der Beschreibung der Wittgruppe von $\mathbb{F}_p$ (siehe Blatt 12), folgt daß $[x, y]$ genau dann anisotrop ist, falls $x \neq y$ gilt. Also existieren für die Isometrieklasse von $[x, y]$ genau 6 Möglichkeiten, nämlich:

$$[1, \varepsilon],\ [1, p],\ [1, p\varepsilon],\ [\varepsilon, p],\ [\varepsilon, p\varepsilon],\ [p, p\varepsilon]$$

Diese Räume sind paarweise nicht isometrisch, da deren Bilder unter φ paarweise verschieden sind.

$p \equiv_4 -1$: Aus $(*)$ und der Beschreibung der Wittgruppe von $\mathbb{F}_p$, folgt $[1, \varepsilon] \cong \mathbb{H}$ und $[1, 1] \cong [\varepsilon, \varepsilon]$. Also existieren für die Isometrieklasse von $[x, y]$ genau 6 Möglichkeiten, nämlich:

$$[1, 1]\, [1, p],\ [1, p\varepsilon],\ [\varepsilon, p],\ [\varepsilon, p\varepsilon],\ [p, p\varepsilon]$$

Diese Räume sind paarweise nicht isometrisch, da deren Bilder unter φ paarweise verschieden sind.

Es existieren somit genau 1 Klasse mit Wittindex 0, 6 Klassen mit Wittindex 1 und 1 Klasse mit Index 2.