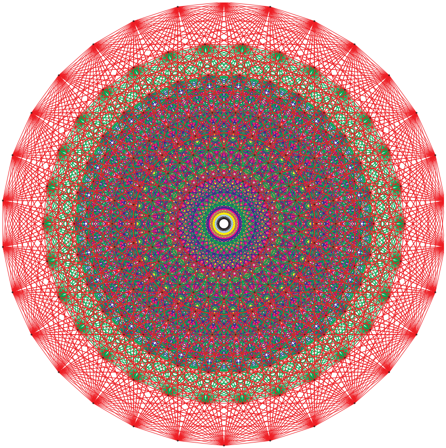
Wie schaffte es E_8 in die Schlagzeilen?

Max Neunhöffer



Eine Nachrichtengeschichte

Am 20. März 2007 titelte The New York Times:

The Scientific Promise of Perfect Symmetry

It is one of the most symmetrical mathematical structures in the universe. It may underlie the Theory of Everything that physicists seek to describe the universe.

Einige andere Zitate:

- *248-dimensionales Mathe-Rätsel gelöst*
- *Die „Struktur“ ist durch eine riesige Matrix beschrieben.*
- *Die 248-dimensionale Struktur E8 zu kartografieren dauerte vier Jahre und produzierte mehr Daten als das Menschliche Genomprojekt, sagen Forscher.*

Klassifikation

Die unitären Darstellungen der zerfallenden reellen Form der komplexen Lie-Gruppe E_8 sind klassifiziert.

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- sowohl eine glatte $\mathbb{K}$-Mannigfaltigkeit als auch
- eine Gruppe mit glatter Multiplikation und Inversion.

(Vorstellung: abgeschlossene Untergruppe einer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$)

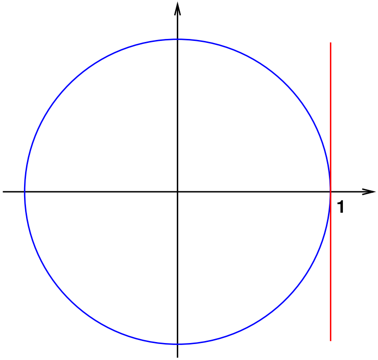
Beispiele:

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$	„allgemeine lineare“
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$	„allgemeine lineare“
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$	„spezielle lineare“
$\mathrm{U}_n := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \overline{A^T} = \mathbf{1}\}$	„unitäre“
$\mathrm{SU}_n := \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	„spezielle unitäre“
$\mathrm{O}_n := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = \mathbf{1}\}$	„orthogonale“
$\mathrm{SO}_n := \mathrm{O}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	„spezielle orth.“

Das einfachste Beispiel

$$\mathrm{SO}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \middle| 0 \leq \alpha < 2\pi \right\} < \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

Das ist S^1: Wir identifizieren Punkte auf der Sphäre mit Rotationen der Ebene um den Ursprung.



Man sieht, dass S^1 glatt und kompakt ist!

(=abgeschlossen+beschränkt)

Was bedeutet E_8?

Theorem (Lie-Korrespondenz)

Eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist (bis auf eine diskrete zentrale Erweiterung) bestimmt durch ihre Lie-Algebra, die der Tangentialraum an der Identität ist.

Die einfachen komplexen Lie-Algebren sind durch ihren Dynkin-Typ A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 oder G_2 klassifiziert (Killing, 1887).

Klassifikation

Dies führt zu einer Klassifikation der einfachen zusammenhängenden komplexen Lie-Gruppen.

E_8 ist die größte der fünf exzeptionellen Lie-Gruppen.

Reell und komplex

Beispiel: Das Reelle und Komplexe sind verwandt!

Betrachte $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und zwei Involutionen:

Automorphismen:	$c : A \mapsto \overline{A}$	$t : A \mapsto \overline{A^{-T}}$
Invarianten:	$G^c = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$G^t = \mathrm{SU}_n$
Topologie:	nicht kompakt	kompakt
Name:	„zerfallend“	kompakt

Def: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(n)$ sind reelle Formen von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ist die Komplexifikation von beiden.

Theorem (Cartan, 1890)

Eine zusammenhängende halbeinfache komplexe Lie-Gruppe hat nur endlich viele reelle Formen. Es gibt immer eine zerfallende Form; diese ist nicht kompakt.

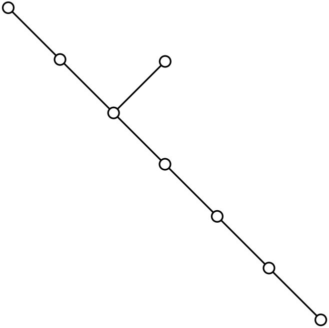
Die zerfallende reelle Form ${E_8}^8$ von E_8 ...

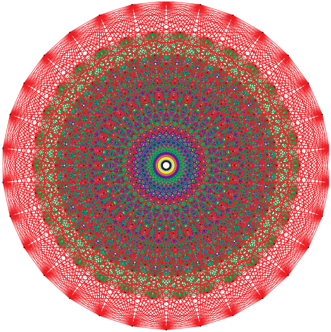
... ist eine 248-dim. reelle nicht-kompakte Lie-Gruppe.

E_8 ist beschrieben durch ihr Wurzelsystem im $\mathbb{R}^8$:

$$\Phi := \left\{a \in \{\pm\tfrac{1}{2}\}^8 \mid \sum a_i \text{ gerade}\right\} \cup \left\{a \in \{0, \pm 1\}^8 \mid \sum (a_i)^2 = 2\right\} \subseteq \mathbb{R}^8$$

$\langle\Phi\rangle_{\mathbb{Z}}$ ist das E_8-Gitter: $\left\{a \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \tfrac{1}{2})^8 \mid \sum a_i \text{ gerade}\right\}$





${E_8}^8$ sind Symmetrien einer 57-dimensionalen Varietät.

Darstellungen

Definition (Darstellung)

Eine Darstellung einer Lie-Gruppe G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $D : G \to \mathrm{GL}(V)$.

(V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum)

irreduzibel $:\Longleftrightarrow$ $\{0\}$ und V sind die einzigen $D(G)$-invarianten abg. Teilräume

unitär $:\Longleftrightarrow$ $D(G) \subseteq U(V) < \mathrm{GL}(V)$ (dafür muss V ein Hilbertraum sein)

Tatsache

Eine irreduzible Darstellung $D : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist bis auf Äquivalenz durch ihren Charakter bestimmt:

$$\chi_D : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{Tr}(D(g)).$$

Charaktere sind Funktionen auf G, die konstant auf den Konjugiertenklassen sind.

Def: $\mathrm{Irr}(G) :=$ {Charaktere irreduzibler Darstellungen}

Das Atlas-Projekt

Ziel

Es sollen Informationen über halbeinfache Lie-Gruppen und deren unitäre Darstellungen gesammelt und bereitgestellt werden.

`http://www.liegroups.org/`

Personen: Der harte Kern

Jeffrey Adams	(University of Maryland),
Dan Barbasch	(Cornell),
John Stembridge	(University of Michigan),
Peter Trapa	(University of Utah),
Marc van Leeuwen	(Poitiers),
David Vogan	(MIT) und
Fokko du Cloux	(Lyon, bis zu seinem Tod in 2006)

Fragen zu Charaktertafeln

Fundamentale Fragen

1. Wie kann ein Charakter in endlicher Weise beschrieben werden, wenn G unendlich viele Konjugiertenklassen hat?
2. Wie kann eine endliche Rechnung oder Datensammlung unendlich viele, teilweise unendlich-dimensionale, irreduzible unitäre Darstellungen beschreiben?

Gute Nachrichten über kompakte Lie-Gruppen:

- Jede endlich-dimensionale irreduzible Darstellung ist äquivalent zu einer unitären.
- Jede unitäre Darstellung ist eine direkte Summe endlich-dimensionaler irreduzibler (Peter und Weyl).

Maximale Tori

Definition (Torus)

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ein Torus ist ein direktes Produkt

$$\mathbb{T} := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{r \text{ Faktoren}}.$$

$\mathbb{T}$ ist eine kompakte abelsche Lie-Gruppe,
mit Charakteren $\{\chi_a(s) = \prod_{i=1}^{r} s_i^{a_i} \mid a \in \mathbb{Z}^r\}$.

Theorem (Maximale Tori)

Jede zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe G enthält einen maximalen Torus $\mathbb{T}$.
Der Normalisator $N_G(\mathbb{T})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe und $N_G(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ ist eine endliche Gruppe, die Weyl-Gruppe W.
Jede Konjugiertenklasse von G schneidet $\mathbb{T}$.
$x, y \in \mathbb{T}$ konjugiert in G $\iff$ x, y konjugiert in $N_G(\mathbb{T})$

Charaktertafeln für kompakte Lie-Gruppen

Theorem (Weylsche Charakterformel)

G: zush. kompakte Lie-Gruppe, $\mathbb{T}$: ein maximaler Torus

$$\mathrm{Irr}(G) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \Big\{ \underbrace{\text{„Dominante Gewichte“}}_{\text{kommen vom Wurzelsystem}} \Big\}$$

Jeder Charakter ist explizit als ein Quotient zweier endlicher ganzzahliger Linearkombinationen von Charakteren von $\mathbb{T}$ gegeben.

$$G = SU_2 \quad = \quad \left\{ \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}$$

$$\mathbb{T} = S^1 \quad = \quad \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; |z|^2 = 1 \right\}$$

Die Charaktere von $\mathbb{T}$ sind indiziert durch $\mathbb{Z}$, die dominanten Gewichte sind $\mathbb{N} \cup \{0\}$, der Charakter χ_n auf $\mathbb{T}$ ist

$$\chi_n(z) = \frac{z^{n+1} - z^{-(n+1)}}{z - z^{-1}}.$$

Schwierigkeiten

- Es gibt irreduzible Darstellungen, die nicht äquivalent zu unitären sind.
- Es gibt unendlich-dimensionale unitäre irreduzible Darstellungen.
- Die Operatoren $D(g) \in \mathrm{GL}(V)$ haben nicht unbedingt eine Spur, wenn $\dim(V) = \infty$ ist!
  Charaktere sind Distributionen (Harish-Chandra).

Theorem (Langlands, Knapp-Zuckerman)

Es sei G eine reduktive algebraische Lie-Gruppe. Dann sind die irreduziblen Charaktere klassifiziert.

Große Fragen:

Welche davon sind unitär und was sind ihre Dimensionen und Charakterwerte?

Charaktere nicht-kompakter Lie-Gruppen

Theorem (Jantzen-Zuckerman „Translationsprinzip")

$$\mathrm{Irr}(G) = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} \mathcal{F}_i \qquad \text{(„Translationsfamilien")}$$

Jedes $\mathcal{F}_i$ ist durch die Menge $\mathrm{IChar}(G)$ der infinitesimalen Charaktere indiziert: $\mathcal{F}_i = \{\chi_i^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{IChar}(G)\}$.

$$\chi_i^\lambda = \sum_{j=1}^{N} P_{i,j}(1) \cdot \Theta_j^\lambda \qquad \text{für } 1 \le i \le N$$

für gewisse Funktionen $\Theta_1^\lambda, \ldots, \Theta_N^\lambda$ (Harish-Chandra).

Die Polynome $P_{i,j} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ sind die berühmten Kazhdan-Lusztig-Vogan-Polynome.

Die $P_{i,j}$ hängen nicht von λ ab und $P_{i,j} = 0$ für $i < j$.

$\rightarrow$ Sehr tiefliegende Resultate über Schnitthomologie von Kazhdan, Lusztig, Beĭlinson, Bernstein, Brylinski, Kashiwara, Vogan, …

Die ${E_8}^8$-Rechnung

Tatsachen:

- Bei ${E_8}^8$ gibt es 453060 Translationsfamilien.
  $\Longrightarrow$ $453060^2/2$ Polynome, Grad bis zu 31
- Diese können mit dem Kazhdan-Lusztig-Algorithmus berechnet werden.
- Es war keine Abschätzung für die Koeffizienten bekannt!

Größe der Rechnung:

- Zunächst schienen 480 GB RAM notwendig!
- Durch Tricks: Reduktion auf etwa 150 GB
- Schließlich klappte es durch getrennte Rechnungen modulo 251, 253, 255 und 256.
- Insgesamt braucht die Rechnung jetzt rund 50 Stunden und produziert 60 GB Ausgabe.

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „Science“ zu erreichen
- Presseerklärung durch das AIM und die Beteiligten
- Lange arbeitsintensive Vorbereitungen

Zutaten:

- Benötigt: „Aufhänger“, die jeder versteht: Symmetrie, Größe, Teamarbeit, Folgen für die Forschung
- Unabdingbar: eine gute begleitende Webseite
- Notwendig: ein passendes Bild
- Gut: Verbindung der Presseerklärung mit Ereignis
- Hilfreich: Professionelle PR-Hilfe
- Extrem wertvoll: Zitate von externen Experten