

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Wie schaffte es E_8 in die Schlagzeilen?

Einführung

Lie-Gruppen
Was bedeutet E_8 ?
Reell und komplex
Darstellungen

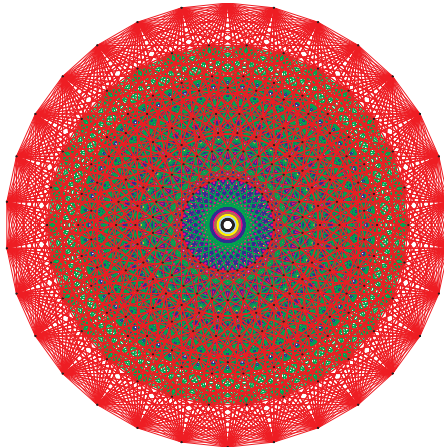
Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen
Klassifikation von
Darstellungen
Kompakte Lie-Gruppen
Nicht-kompakte
Lie-Gruppen
Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Max Neunhoffer



Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen
Was bedeutet E_8 ?
Reell und komplex
Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen
Klassifikation von
Darstellungen
Kompakte Lie-Gruppen
Nicht-kompakte
Lie-Gruppen
Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Eine Nachrichtengeschichte

Am 20. März 2007 titelte **The New York Times**:

The Scientific Promise of Perfect Symmetry

It is one of the most symmetrical mathematical structures in the universe. It may underlie the Theory of Everything that physicists seek to describe the universe.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen
Was bedeutet E_8 ?
Reell und komplex
Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen
Klassifikation von
Darstellungen
Kompakte Lie-Gruppen
Nicht-kompakte
Lie-Gruppen
Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Eine Nachrichtengeschichte

Am 20. März 2007 titelte **The New York Times**:

The Scientific Promise of Perfect Symmetry

It is one of the most symmetrical mathematical structures in the universe. It may underlie the Theory of Everything that physicists seek to describe the universe.

Einige andere Zitate:

- *248-dimensionales Mathe-Rätsel gelöst*

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen
Was bedeutet E_8 ?
Reell und komplex
Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen
Klassifikation von
Darstellungen
Kompakte Lie-Gruppen
Nicht-kompakte
Lie-Gruppen
Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Eine Nachrichtengeschichte

Am 20. März 2007 titelte **The New York Times**:

The Scientific Promise of Perfect Symmetry

It is one of the most symmetrical mathematical structures in the universe. It may underlie the Theory of Everything that physicists seek to describe the universe.

Einige andere Zitate:

- *248-dimensionales Mathe-Rätsel gelöst*
- *Die „Struktur“ ist durch eine riesige Matrix beschrieben.*

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen
Was bedeutet E_8 ?
Reell und komplex
Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen
Klassifikation von
Darstellungen
Kompakte Lie-Gruppen
Nicht-kompakte
Lie-Gruppen
Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Eine Nachrichtengeschichte

Am 20. März 2007 titelte **The New York Times**:

The Scientific Promise of Perfect Symmetry

It is one of the most symmetrical mathematical structures in the universe. It may underlie the Theory of Everything that physicists seek to describe the universe.

Einige andere Zitate:

- *248-dimensionales Mathe-Rätsel gelöst*
- *Die „Struktur“ ist durch eine riesige Matrix beschrieben.*
- *Die 248-dimensionale Struktur E_8 zu kartografieren dauerte vier Jahre und produzierte mehr Daten als das Menschliche Genomprojekt, sagen Forscher.*

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen
Was bedeutet E_8 ?
Reell und komplex
Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen
Klassifikation von
Darstellungen
Kompakte Lie-Gruppen
Nicht-kompakte
Lie-Gruppen
Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Eine Nachrichtengeschichte

Am 20. März 2007 titelte **The New York Times**:

The Scientific Promise of Perfect Symmetry

It is one of the most symmetrical mathematical structures in the universe. It may underlie the Theory of Everything that physicists seek to describe the universe.

Einige andere Zitate:

- *248-dimensionales Mathe-Rätsel gelöst*
- *Die „Struktur“ ist durch eine riesige Matrix beschrieben.*
- *Die 248-dimensionale Struktur E_8 zu kartografieren dauerte vier Jahre und produzierte mehr Daten als das Menschliche Genomprojekt, sagen Forscher.*

Klassifikation

Die unitären Darstellungen der zerfallenden reellen Form der komplexen Lie-Gruppe E_8 sind klassifiziert.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- sowohl eine glatte $\mathbb{K}$ -Mannigfaltigkeit als auch
- eine Gruppe mit glatter Multiplikation und Inversion.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- sowohl eine glatte $\mathbb{K}$ -Mannigfaltigkeit als auch
- eine Gruppe mit glatter Multiplikation und Inversion.

(Vorstellung: abgeschlossene Untergruppe einer $GL_n(\mathbb{K})$)

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- sowohl eine glatte $\mathbb{K}$ -Mannigfaltigkeit als auch
- eine Gruppe mit glatter Multiplikation und Inversion.

(Vorstellung: abgeschlossene Untergruppe einer $GL_n(\mathbb{K})$)

Beispiele:

$GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ „allgemeine lineare“

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- sowohl eine glatte $\mathbb{K}$ -Mannigfaltigkeit als auch
- eine Gruppe mit glatter Multiplikation und Inversion.

(Vorstellung: abgeschlossene Untergruppe einer $GL_n(\mathbb{K})$)

Beispiele:

$$GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} \quad \text{„allgemeine lineare“}$$

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} \quad \text{„allgemeine lineare“}$$

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- sowohl eine glatte $\mathbb{K}$ -Mannigfaltigkeit als auch
- eine Gruppe mit glatter Multiplikation und Inversion.

(Vorstellung: abgeschlossene Untergruppe einer $GL_n(\mathbb{K})$)

Beispiele:

$GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ „allgemeine lineare“

$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ „allgemeine lineare“

$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$ „spezielle lineare“

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- **sowohl** eine glatte $\mathbb{K}$ -Mannigfaltigkeit **als auch**
- eine **Gruppe** mit glatter Multiplikation und Inversion.

(**Vorstellung**: abgeschlossene Untergruppe einer $GL_n(\mathbb{K})$)

Beispiele:

$GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ „allgemeine lineare“

$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ „allgemeine lineare“

$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$ „spezielle lineare“

$U_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \overline{A^T} = \mathbf{1}\}$ „unitäre“

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- **sowohl** eine glatte $\mathbb{K}$ -Mannigfaltigkeit **als auch**
- eine **Gruppe** mit glatter Multiplikation und Inversion.

(**Vorstellung**: abgeschlossene Untergruppe einer $GL_n(\mathbb{K})$)

Beispiele:

$$GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

„allgemeine lineare“

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

„allgemeine lineare“

$$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$$

„spezielle lineare“

$$U_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \overline{A^T} = \mathbf{1}\}$$

„unitäre“

$$SU_n := U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$$

„spezielle unitäre“

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- **sowohl** eine glatte $\mathbb{K}$ -Mannigfaltigkeit **als auch**
- eine **Gruppe** mit glatter Multiplikation und Inversion.

(**Vorstellung**: abgeschlossene Untergruppe einer $GL_n(\mathbb{K})$)

Beispiele:

$$GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

„allgemeine lineare“

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

„allgemeine lineare“

$$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$$

„spezielle lineare“

$$U_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \overline{A^T} = \mathbf{1}\}$$

„unitäre“

$$SU_n := U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$$

„spezielle unitäre“

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = \mathbf{1}\}$$

„orthogonale“

Was ist eine Lie-Gruppe?

Es sei $\mathbb{K}$ entweder gleich $\mathbb{R}$ oder gleich $\mathbb{C}$.

Eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ ist

- **sowohl** eine glatte $\mathbb{K}$ -Mannigfaltigkeit **als auch**
- eine **Gruppe** mit glatter Multiplikation und Inversion.

(**Vorstellung**: abgeschlossene Untergruppe einer $GL_n(\mathbb{K})$)

Beispiele:

$$GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

„allgemeine lineare“

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

„allgemeine lineare“

$$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$$

„spezielle lineare“

$$U_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \overline{A^T} = \mathbf{1}\}$$

„unitäre“

$$SU_n := U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$$

„spezielle unitäre“

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = \mathbf{1}\}$$

„orthogonale“

$$SO_n := O_n \cap SL_n(\mathbb{C})$$

„spezielle orth.“

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffner

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Das einfachste Beispiel

$$\mathrm{SO}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi \right\} < \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffner

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Das einfachste Beispiel

$$\mathrm{SO}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi \right\} < \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

Das ist S^1 : Wir **identifizieren Punkte** auf der Sphäre mit **Rotationen** der Ebene um den Ursprung.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

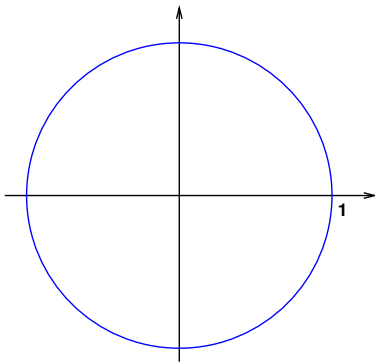
Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Das einfachste Beispiel

$$SO_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi \right\} < GL_2(\mathbb{R})$$

Das ist S^1 : Wir **identifizieren Punkte** auf der Sphäre mit **Rotationen** der Ebene um den Ursprung.



Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

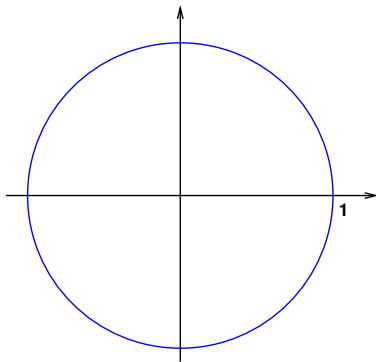
Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Das einfachste Beispiel

$$SO_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi \right\} < GL_2(\mathbb{R})$$

Das ist S^1 : Wir **identifizieren Punkte** auf der Sphäre mit **Rotationen** der Ebene um den Ursprung.



Man **sieht**, dass S^1 **glatt** und **kompakt** ist!

(=abgeschlossen+beschränkt)

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

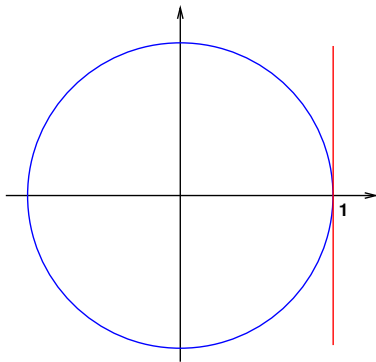
Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Das einfachste Beispiel

$$SO_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi \right\} < GL_2(\mathbb{R})$$

Das ist S^1 : Wir **identifizieren Punkte** auf der Sphäre mit **Rotationen** der Ebene um den Ursprung.



Man **sieht**, dass S^1 **glatt** und **kompakt** ist!

(=abgeschlossen+beschränkt)

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Was bedeutet E_8 ?

Theorem (Lie-Korrespondenz)

*Eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist (bis auf eine diskrete zentrale Erweiterung) bestimmt durch ihre **Lie-Algebra**, die der Tangentialraum an der Identität ist.*

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Was bedeutet E_8 ?

Theorem (Lie-Korrespondenz)

*Eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist (bis auf eine diskrete zentrale Erweiterung) bestimmt durch ihre **Lie-Algebra**, die der Tangentialraum an der Identität ist.*

Die einfachen komplexen Lie-Algebren sind durch ihren **Dynkin-Typ** $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ oder G_2 klassifiziert (Killing, 1887).

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Was bedeutet E_8 ?

Theorem (Lie-Korrespondenz)

*Eine **zusammenhängende Lie-Gruppe** ist (bis auf eine diskrete zentrale Erweiterung) bestimmt durch ihre **Lie-Algebra**, die der **Tangententialraum an der Identität** ist.*

Die einfachen komplexen Lie-Algebren sind durch ihren **Dynkin-Typ** $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ oder G_2 klassifiziert (Killing, 1887).

Klassifikation

Dies führt zu einer Klassifikation der **einfachen zusammenhängenden komplexen Lie-Gruppen**.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Was bedeutet E_8 ?

Theorem (Lie-Korrespondenz)

*Eine **zusammenhängende Lie-Gruppe** ist (bis auf eine diskrete zentrale Erweiterung) bestimmt durch ihre **Lie-Algebra**, die der **Tangententialraum an der Identität** ist.*

Die einfachen komplexen Lie-Algebren sind durch ihren **Dynkin-Typ** $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ oder G_2 klassifiziert (Killing, 1887).

Klassifikation

Dies führt zu einer Klassifikation der **einfachen zusammenhängenden komplexen Lie-Gruppen**.

E_8 ist die **größte** der **fünf exzeptionellen** Lie-Gruppen.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffner

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Reell und komplex

Beispiel: Das Reelle und Komplexe sind verwandt!

Betrachte $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und zwei **Involutionen**:

Automorphismen:	$c : A \mapsto \bar{A}$	$t : A \mapsto \overline{A^{-T}}$
-----------------	-------------------------	-----------------------------------

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffner

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Reell und komplex

Beispiel: Das Reelle und Komplexe sind verwandt!

Betrachte $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und zwei **Involutionen**:

Automorphismen:	$c : A \mapsto \bar{A}$	$t : A \mapsto \overline{A^{-T}}$
Invarianten:	$G^c = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$G^t = \mathrm{SU}_n$

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffner

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Reell und komplex

Beispiel: Das Reelle und Komplexe sind verwandt!

Betrachte $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und zwei **Involutionen**:

Automorphismen:	$c : A \mapsto \bar{A}$	$t : A \mapsto \bar{A}^{-T}$
Invarianten:	$G^c = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$G^t = \mathrm{SU}_n$
Topologie:	nicht kompakt	kompakt

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffner

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Reell und komplex

Beispiel: Das Reelle und Komplexe sind verwandt!

Betrachte $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und zwei **Involutionen**:

Automorphismen:	$c : A \mapsto \bar{A}$	$t : A \mapsto \overline{A^{-T}}$
Invarianten:	$G^c = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$G^t = \mathrm{SU}_n$
Topologie:	nicht kompakt	kompakt
Name:	„zerfallend“	kompakt

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Reell und komplex

Beispiel: Das Reelle und Komplexe sind verwandt!

Betrachte $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und zwei **Involutionen**:

Automorphismen:	$c : A \mapsto \bar{A}$	$t : A \mapsto \bar{A}^{-T}$
Invarianten:	$G^c = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$G^t = \mathrm{SU}_n$
Topologie:	nicht kompakt	kompakt
Name:	„zerfallend“	kompakt

Def: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(n)$ sind **reelle Formen** von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Reell und komplex

Beispiel: Das Reelle und Komplexe sind verwandt!

Betrachte $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und zwei **Involutionen**:

Automorphismen:	$c : A \mapsto \bar{A}$	$t : A \mapsto \bar{A}^{-T}$
Invarianten:	$G^c = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$G^t = \mathrm{SU}_n$
Topologie:	nicht kompakt	kompakt
Name:	„zerfallend“	kompakt

Def: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(n)$ sind **reelle Formen** von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.
 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ist die **Komplexifikation** von beiden.

Reell und komplex

Beispiel: Das Reelle und Komplexe sind verwandt!

Betrachte $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und zwei **Involutionen**:

Automorphismen:	$c : A \mapsto \bar{A}$	$t : A \mapsto \bar{A}^{-T}$
Invarianten:	$G^c = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$G^t = \mathrm{SU}_n$
Topologie:	nicht kompakt	kompakt
Name:	„zerfallend“	kompakt

Def: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(n)$ sind **reelle Formen** von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.
 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ist die **Komplexifikation** von beiden.

Theorem (Cartan, 1890)

Eine zusammenhängende halbeinfache komplexe Lie-Gruppe hat nur endlich viele reelle Formen. Es gibt immer eine zerfallende Form; diese ist nicht kompakt.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Die zerfallende reelle Form E_8^8 von E_8 ...
... ist eine 248-dim. reelle nicht-kompakte Lie-Gruppe.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Die zerfallende reelle Form E_8^8 von E_8 ...

... ist eine 248-dim. reelle nicht-kompakte Lie-Gruppe.

E_8 ist beschrieben durch ihr **Wurzelsystem** im $\mathbb{R}^8$:

$$\begin{aligned} \Phi := & \{a \in \{\pm \tfrac{1}{2}\}^8 \mid \sum a_i \text{ gerade}\} \\ & \cup \{a \in \{0, \pm 1\}^8 \mid \sum (a_i)^2 = 2\} \end{aligned} \quad \subseteq \mathbb{R}^8$$

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

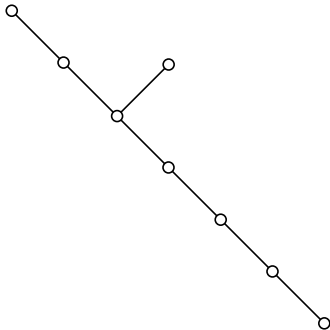
Wie kann man das
erklären?

Die zerfallende reelle Form E_8^8 von E_8 ...

... ist eine 248-dim. reelle nicht-kompakte Lie-Gruppe.

E_8 ist beschrieben durch ihr **Wurzelsystem** im $\mathbb{R}^8$:

$$\begin{aligned} \Phi := & \{a \in \{\pm \tfrac{1}{2}\}^8 \mid \sum a_i \text{ gerade}\} \\ & \cup \{a \in \{0, \pm 1\}^8 \mid \sum (a_i)^2 = 2\} \end{aligned} \quad \subseteq \mathbb{R}^8$$



Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

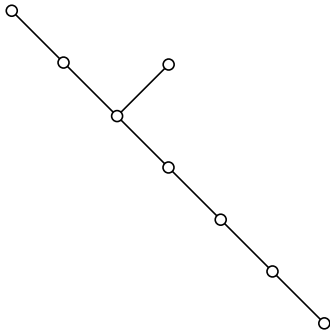
Die zerfallende reelle Form E_8^8 von E_8 ...

... ist eine 248-dim. reelle nicht-kompakte Lie-Gruppe.

E_8 ist beschrieben durch ihr **Wurzelsystem** im $\mathbb{R}^8$:

$$\begin{aligned} \Phi := & \{a \in \{\pm \tfrac{1}{2}\}^8 \mid \sum a_i \text{ gerade}\} \\ & \cup \{a \in \{0, \pm 1\}^8 \mid \sum (a_i)^2 = 2\} \end{aligned} \quad \subseteq \mathbb{R}^8$$

$\langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}}$ ist das **E_8 -Gitter**: $\{a \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \tfrac{1}{2})^8 \mid \sum a_i \text{ gerade}\}$



Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

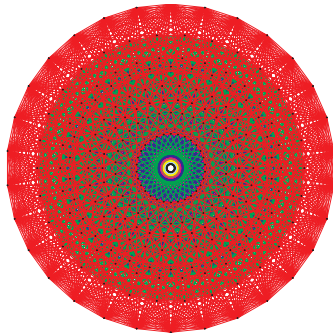
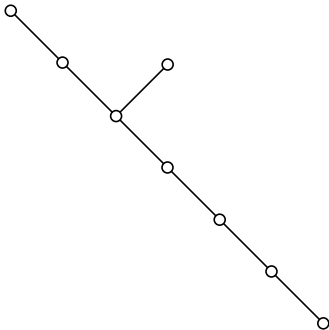
Die zerfallende reelle Form E_8^8 von E_8 ...

... ist eine 248-dim. reelle nicht-kompakte Lie-Gruppe.

E_8 ist beschrieben durch ihr **Wurzelsystem** im $\mathbb{R}^8$:

$$\Phi := \left\{ a \in \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}^8 \mid \sum a_i \text{ gerade} \right\} \cup \left\{ a \in \{0, \pm 1\}^8 \mid \sum (a_i)^2 = 2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^8$$

$\langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}}$ ist das **E_8 -Gitter**: $\{ a \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 \mid \sum a_i \text{ gerade} \}$



Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

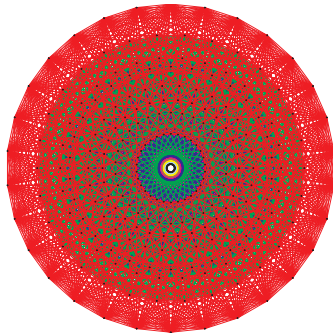
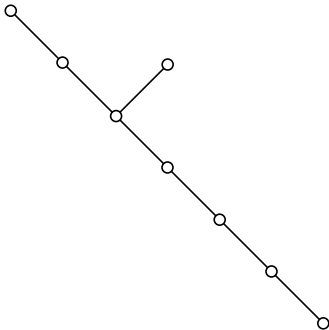
Die zerfallende reelle Form E_8^8 von E_8 ...

... ist eine 248-dim. reelle nicht-kompakte Lie-Gruppe.

E_8 ist beschrieben durch ihr **Wurzelsystem** im $\mathbb{R}^8$:

$$\Phi := \left\{ a \in \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}^8 \mid \sum a_i \text{ gerade} \right\} \cup \left\{ a \in \{0, \pm 1\}^8 \mid \sum (a_i)^2 = 2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^8$$

$\langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}}$ ist das **E_8 -Gitter**: $\{ a \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 \mid \sum a_i \text{ gerade} \}$



E_8^8 sind Symmetrien einer 57-dimensionalen Varietät.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Darstellungen

Definition (Darstellung)

Eine **Darstellung** einer Lie-Gruppe G ist ein **stetiger Gruppenhomomorphismus** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$.
(V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum)

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Darstellungen

Definition (Darstellung)

Eine **Darstellung** einer Lie-Gruppe G ist ein **stetiger Gruppenhomomorphismus** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$.

(V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum)

irreduzibel $:\iff \{0\}$ und V sind die einzigen
 $D(G)$ -invarianten abg. Teilräume

Darstellungen

Definition (Darstellung)

Eine **Darstellung** einer Lie-Gruppe G ist ein **stetiger Gruppenhomomorphismus** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$.

(V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum)

irreduzibel $:\iff \{0\}$ und V sind die einzigen
 $D(G)$ -invarianten abg. Teilräume

unitär $:\iff D(G) \subseteq U(V) < \mathrm{GL}(V)$
(dafür muss V ein Hilbertraum sein)

Darstellungen

Definition (Darstellung)

Eine **Darstellung** einer Lie-Gruppe G ist ein **stetiger Gruppenhomomorphismus** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$.

(V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum)

irreduzibel $:\iff \{0\}$ und V sind die einzigen
 $D(G)$ -invarianten abg. Teilräume

unitär $:\iff D(G) \subseteq U(V) < \mathrm{GL}(V)$
(dafür muss V ein Hilbertraum sein)

Tatsache

Eine **irreduzible Darstellung** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist **bis auf Äquivalenz** durch ihren **Charakter** **bestimmt**:

$$\chi_D : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{Tr}(D(g)).$$

Darstellungen

Definition (Darstellung)

Eine **Darstellung** einer Lie-Gruppe G ist ein **stetiger Gruppenhomomorphismus** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$.

(V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum)

irreduzibel $:\iff \{0\}$ und V sind die einzigen
 $D(G)$ -invarianten abg. Teilräume

unitär $:\iff D(G) \subseteq U(V) < \mathrm{GL}(V)$
(dafür muss V ein Hilbertraum sein)

Tatsache

Eine **irreduzible Darstellung** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist **bis auf Äquivalenz** durch ihren **Charakter** **bestimmt**:

$$\chi_D : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{Tr}(D(g)).$$

Charaktere sind **Funktionen auf G** ,

Darstellungen

Definition (Darstellung)

Eine **Darstellung** einer Lie-Gruppe G ist ein **stetiger Gruppenhomomorphismus** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$.

(V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum)

irreduzibel $:\iff \{0\}$ und V sind die einzigen
 $D(G)$ -invarianten abg. Teilräume

unitär $:\iff D(G) \subseteq U(V) < \mathrm{GL}(V)$
(dafür muss V ein Hilbertraum sein)

Tatsache

Eine **irreduzible Darstellung** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist **bis auf Äquivalenz** durch ihren **Charakter** **bestimmt**:

$$\chi_D : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{Tr}(D(g)).$$

Charaktere sind **Funktionen** auf G , die **konstant auf den Konjugiertenklassen** sind.

Darstellungen

Definition (Darstellung)

Eine **Darstellung** einer Lie-Gruppe G ist ein **stetiger Gruppenhomomorphismus** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$.

(V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum)

irreduzibel $:\iff \{0\}$ und V sind die einzigen
 $D(G)$ -invarianten abg. Teilräume

unitär $:\iff D(G) \subseteq U(V) < \mathrm{GL}(V)$
(dafür muss V ein Hilbertraum sein)

Tatsache

Eine **irreduzible Darstellung** $D : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist **bis auf Äquivalenz** durch ihren **Charakter** **bestimmt**:

$$\chi_D : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{Tr}(D(g)).$$

Charaktere sind **Funktionen auf G** , die **konstant auf den Konjugiertenklassen** sind.

Def: $\mathrm{Irr}(G) := \{\text{Charaktere irreduzibler Darstellungen}\}$

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Das Atlas-Projekt

Ziel

Es sollen Informationen über halbeinfache Lie-Gruppen und deren unitäre Darstellungen **gesammelt** und **bereitgestellt** werden.

<http://www.liegroups.org/>

Personen: Der harte Kern

Jeffrey Adams	(University of Maryland),
Dan Barbasch	(Cornell),
John Stembridge	(University of Michigan),
Peter Trapa	(University of Utah),
Marc van Leeuwen	(Poitiers),
David Vogan	(MIT) und
Fokko du Cloux	(Lyon, bis zu seinem Tod in 2006)

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen
Was bedeutet E_8 ?
Reell und komplex
Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen
Klassifikation von
Darstellungen
Kompakte Lie-Gruppen
Nicht-kompakte
Lie-Gruppen
Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Fragen zu Charaktertafeln

Fundamentale Fragen

- 1 Wie kann ein Charakter in endlicher Weise beschrieben werden, wenn G unendlich viele Konjugiertenklassen hat?

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Fragen zu Charaktertafeln

Fundamentale Fragen

- 1 Wie kann ein Charakter in endlicher Weise beschrieben werden, wenn G unendlich viele Konjugiertenklassen hat?
- 2 Wie kann eine endliche Rechnung oder Datensammlung unendlich viele, teilweise unendlich-dimensionale, irreduzible unitäre Darstellungen beschreiben?

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Fragen zu Charaktertafeln

Fundamentale Fragen

- 1 Wie kann ein Charakter in endlicher Weise beschrieben werden, wenn G unendlich viele Konjugiertenklassen hat?
- 2 Wie kann eine endliche Rechnung oder Datensammlung unendlich viele, teilweise unendlich-dimensionale, irreduzible unitäre Darstellungen beschreiben?

Gute Nachrichten über kompakte Lie-Gruppen:

- Jede endlich-dimensionale irreduzible Darstellung ist äquivalent zu einer unitären.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Fragen zu Charaktertafeln

Fundamentale Fragen

- 1 Wie kann ein Charakter in endlicher Weise beschrieben werden, wenn G unendlich viele Konjugiertenklassen hat?
- 2 Wie kann eine endliche Rechnung oder Datensammlung unendlich viele, teilweise unendlich-dimensionale, irreduzible unitäre Darstellungen beschreiben?

Gute Nachrichten über kompakte Lie-Gruppen:

- Jede endlich-dimensionale irreduzible Darstellung ist äquivalent zu einer unitären.
- Jede unitäre Darstellung ist eine direkte Summe endlich-dimensionaler irreduzibler (Peter und Weyl).

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Maximale Tori

Definition (Torus)

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ein **Torus** ist ein direktes Produkt

$$\mathbb{T} := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{r \text{ Faktoren}}.$$

$\mathbb{T}$ ist eine **kompakte abelsche Lie-Gruppe**,

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Maximale Tori

Definition (Torus)

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ein **Torus** ist ein direktes Produkt

$$\mathbb{T} := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{r \text{ Faktoren}}.$$

$\mathbb{T}$ ist eine **kompakte abelsche Lie-Gruppe**,

mit **Charakteren** $\{\chi_a(s) = \prod_{i=1}^r s_i^{a_i} \mid a \in \mathbb{Z}^r\}$.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Maximale Tori

Definition (Torus)

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ein **Torus** ist ein direktes Produkt

$$\mathbb{T} := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{r \text{ Faktoren}}.$$

$\mathbb{T}$ ist eine **kompakte abelsche Lie-Gruppe**,
mit **Charakteren** $\{\chi_a(s) = \prod_{i=1}^r s_i^{a_i} \mid a \in \mathbb{Z}^r\}$.

Theorem (Maximale Tori)

*Jede zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe G
enthält einen maximalen Torus $\mathbb{T}$.*

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Maximale Tori

Definition (Torus)

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ein **Torus** ist ein direktes Produkt

$$\mathbb{T} := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{r \text{ Faktoren}}$$

$\mathbb{T}$ ist eine **kompakte abelsche Lie-Gruppe**,
mit **Charakteren** $\{\chi_a(s) = \prod_{i=1}^r s_i^{a_i} \mid a \in \mathbb{Z}^r\}$.

Theorem (Maximale Tori)

Jede zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe G enthält einen maximalen Torus $\mathbb{T}$.

Der Normalisator $N_G(\mathbb{T})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe und $N_G(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ ist eine endliche Gruppe, die Weyl-Gruppe W .

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Maximale Tori

Definition (Torus)

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ein **Torus** ist ein direktes Produkt

$$\mathbb{T} := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{r \text{ Faktoren}}.$$

$\mathbb{T}$ ist eine **kompakte abelsche Lie-Gruppe**,
mit **Charakteren** $\{\chi_a(s) = \prod_{i=1}^r s_i^{a_i} \mid a \in \mathbb{Z}^r\}$.

Theorem (Maximale Tori)

Jede zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe G enthält einen maximalen Torus $\mathbb{T}$.

Der Normalisator $N_G(\mathbb{T})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe und $N_G(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ ist eine endliche Gruppe, die Weyl-Gruppe W .

Jede Konjugiertenklasse von G schneidet $\mathbb{T}$.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Maximale Tori

Definition (Torus)

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ein **Torus** ist ein direktes Produkt

$$\mathbb{T} := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{r \text{ Faktoren}}.$$

$\mathbb{T}$ ist eine **kompakte abelsche Lie-Gruppe**,
mit **Charakteren** $\{\chi_a(s) = \prod_{i=1}^r s_i^{a_i} \mid a \in \mathbb{Z}^r\}$.

Theorem (Maximale Tori)

Jede zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe G enthält einen maximalen Torus $\mathbb{T}$.

Der Normalisator $N_G(\mathbb{T})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe und $N_G(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ ist eine endliche Gruppe, die Weyl-Gruppe W .

Jede Konjugiertenklasse von G schneidet $\mathbb{T}$.

$x, y \in \mathbb{T}$ konjugiert in $G \iff x, y$ konjugiert in $N_G(\mathbb{T})$

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Charaktertafeln für kompakte Lie-Gruppen

Theorem (Weylsche Charakterformel)

G : zush. kompakte Lie-Gruppe, $\mathbb{T}$: ein maximaler Torus

Charaktertafeln für kompakte Lie-Gruppen

Theorem (Weylsche Charakterformel)

G : zush. kompakte Lie-Gruppe, $\mathbb{T}$: ein maximaler Torus

$$\mathrm{Irr}(G) \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \underbrace{\text{„Dominante Gewichte“}}_{\text{kommen vom Wurzelssystem}} \right\}$$

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Charaktertafeln für kompakte Lie-Gruppen

Theorem (Weylsche Charakterformel)

G : zush. kompakte Lie-Gruppe, $\mathbb{T}$: ein maximaler Torus

$$\mathrm{Irr}(G) \xrightarrow{1-1} \left\{ \underbrace{\text{„Dominante Gewichte“}}_{\text{kommen vom Wurzelssystem}} \right\}$$

Jeder Charakter ist **explizit** als ein Quotient zweier
endlicher ganzzahliger Linearkombinationen von
Charakteren von $\mathbb{T}$ gegeben.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Charaktertafeln für kompakte Lie-Gruppen

Theorem (Weylsche Charakterformel)

G : zush. kompakte Lie-Gruppe, $\mathbb{T}$: ein maximaler Torus

$$\text{Irr}(G) \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \underbrace{\text{„Dominante Gewichte“}}_{\text{kommen vom Wurzelssystem}} \right\}$$

Jeder Charakter ist **explizit** als ein Quotient zweier
endlicher ganzzahliger Linearkombinationen von
Charakteren von $\mathbb{T}$ gegeben.

$$G = SU_2 = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}$$
$$\mathbb{T} = S^1 = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid |z|^2 = 1 \right\}$$

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Charaktertafeln für kompakte Lie-Gruppen

Theorem (Weylsche Charakterformel)

G : zush. kompakte Lie-Gruppe, $\mathbb{T}$: ein maximaler Torus

$$\mathrm{Irr}(G) \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \underbrace{\text{„Dominante Gewichte“}}_{\text{kommen vom Wurzelsystem}} \right\}$$

Jeder Charakter ist **explizit** als ein **Quotient** zweier
endlicher ganzzahliger Linearkombinationen von
Charakteren von $\mathbb{T}$ gegeben.

$$G = SU_2 = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}$$

$$\mathbb{T} = S^1 = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid |z|^2 = 1 \right\}$$

Die Charaktere von $\mathbb{T}$ sind indiziert durch $\mathbb{Z}$, die dominanten Gewichte sind $\mathbb{N} \cup \{0\}$, der Charakter χ_n auf $\mathbb{T}$ ist

$$\chi_n(z) = \frac{z^{n+1} - z^{-(n+1)}}{z - z^{-1}}.$$

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Schwierigkeiten

- Es gibt **irreduzible** Darstellungen, die nicht äquivalent zu **unitären** sind.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Schwierigkeiten

- Es gibt **irreduzible** Darstellungen, die nicht äquivalent zu **unitären** sind.
- Es gibt **unendlich-dimensionale unitäre irreduzible** Darstellungen.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffner

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Schwierigkeiten

- Es gibt **irreduzible** Darstellungen, die nicht äquivalent zu **unitären** sind.
- Es gibt **unendlich-dimensionale unitäre irreduzible** Darstellungen.
- Die **Operatoren** $D(g) \in GL(V)$ haben nicht unbedingt eine Spur, wenn $\dim(V) = \infty$ ist!
Charaktere sind **Distributionen** (Harish-Chandra).

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Schwierigkeiten

- Es gibt **irreduzible** Darstellungen, die nicht äquivalent zu **unitären** sind.
- Es gibt **unendlich-dimensionale unitäre irreduzible** Darstellungen.
- Die **Operatoren** $D(g) \in GL(V)$ haben nicht unbedingt eine Spur, wenn $\dim(V) = \infty$ ist!
Charaktere sind **Distributionen** (Harish-Chandra).

Theorem (Langlands, Knapp-Zuckerman)

Es sei G eine reduktive algebraische Lie-Gruppe. Dann sind die irreduziblen Charaktere klassifiziert.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Schwierigkeiten

- Es gibt **irreduzible** Darstellungen, die nicht äquivalent zu **unitären** sind.
- Es gibt **unendlich-dimensionale unitäre irreduzible** Darstellungen.
- Die **Operatoren** $D(g) \in GL(V)$ haben nicht unbedingt eine Spur, wenn $\dim(V) = \infty$ ist!
Charaktere sind **Distributionen** (Harish-Chandra).

Theorem (Langlands, Knapp-Zuckerman)

Es sei G eine reduktive algebraische Lie-Gruppe. Dann sind die irreduziblen Charaktere klassifiziert.

Große Fragen:

Welche davon sind **unitär** und was sind ihre **Dimensionen** und **Charakterwerte**?

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Charaktere nicht-kompakter Lie-Gruppen

Theorem (Jantzen-Zuckerman „Translationsprinzip“)

$$\mathrm{Irr}(G) = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{F}_i \quad (\text{„Translationsfamilien“})$$

Jedes $\mathcal{F}_i$ ist durch die Menge **$\mathrm{IChar}(G)$** der *infinitesimalen Charaktere* indiziert: $\mathcal{F}_i = \{\chi_i^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{IChar}(G)\}.$

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhoffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Charaktere nicht-kompakter Lie-Gruppen

Theorem (Jantzen-Zuckerman „Translationsprinzip“)

$$\mathrm{Irr}(G) = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{F}_i \quad (\text{„Translationsfamilien“})$$

Jedes $\mathcal{F}_i$ ist durch die Menge $\mathbf{IChar}(G)$ der infinitesimalen Charaktere indiziert: $\mathcal{F}_i = \{\chi_i^\lambda \mid \lambda \in \mathbf{IChar}(G)\}$.

$$\chi_i^\lambda = \sum_{j=1}^N P_{i,j}(1) \cdot \Theta_j^\lambda \quad \text{für } 1 \leq i \leq N$$

für gewisse Funktionen $\Theta_1^\lambda, \dots, \Theta_N^\lambda$ (**Harish-Chandra**).

Charaktere nicht-kompakter Lie-Gruppen

Theorem (Jantzen-Zuckerman „Translationsprinzip“)

$$\text{Irr}(G) = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{F}_i \quad (\text{„Translationsfamilien“})$$

Jedes $\mathcal{F}_i$ ist durch die Menge **ICChar**(G) der *infinitesimalen Charaktere* indiziert: $\mathcal{F}_i = \{\chi_i^\lambda \mid \lambda \in \text{ICChar}(G)\}$.

$$\chi_i^\lambda = \sum_{j=1}^N P_{i,j}(1) \cdot \Theta_j^\lambda \quad \text{für } 1 \leq i \leq N$$

für gewisse Funktionen $\Theta_1^\lambda, \dots, \Theta_N^\lambda$ (**Harish-Chandra**).

Die Polynome $P_{i,j} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ sind die berühmten **Kazhdan-Lusztig-Vogan-Polynome**.

Charaktere nicht-kompakter Lie-Gruppen

Theorem (Jantzen-Zuckerman „Translationsprinzip“)

$$\mathrm{Irr}(G) = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{F}_i \quad (\text{„Translationsfamilien“})$$

Jedes $\mathcal{F}_i$ ist durch die Menge **IChar(G)** der *infinitesimalen Charaktere* indiziert: $\mathcal{F}_i = \{\chi_i^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{IChar}(G)\}$.

$$\chi_i^\lambda = \sum_{j=1}^N P_{i,j}(1) \cdot \Theta_j^\lambda \quad \text{für } 1 \leq i \leq N$$

für gewisse Funktionen $\Theta_1^\lambda, \dots, \Theta_N^\lambda$ (**Harish-Chandra**).

Die Polynome $P_{i,j} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ sind die berühmten **Kazhdan-Lusztig-Vogan-Polynome**.

Die $P_{i,j}$ **hängen nicht** von λ ab

Charaktere nicht-kompakter Lie-Gruppen

Theorem (Jantzen-Zuckerman „Translationsprinzip“)

$$\text{Irr}(G) = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{F}_i \quad (\text{„Translationsfamilien“})$$

Jedes $\mathcal{F}_i$ ist durch die Menge **IChar**(G) der *infinitesimalen Charaktere* indiziert: $\mathcal{F}_i = \{\chi_i^\lambda \mid \lambda \in \text{IChar}(G)\}$.

$$\chi_i^\lambda = \sum_{j=1}^N P_{i,j}(1) \cdot \Theta_j^\lambda \quad \text{für } 1 \leq i \leq N$$

für gewisse Funktionen $\Theta_1^\lambda, \dots, \Theta_N^\lambda$ (**Harish-Chandra**).

Die Polynome $P_{i,j} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ sind die berühmten **Kazhdan-Lusztig-Vogan-Polynome**.

Die $P_{i,j}$ **hängen nicht** von λ ab und $P_{i,j} = 0$ für $i < j$.

Charaktere nicht-kompakter Lie-Gruppen

Theorem (Jantzen-Zuckerman „Translationsprinzip“)

$$\text{Irr}(G) = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{F}_i \quad (\text{„Translationsfamilien“})$$

Jedes $\mathcal{F}_i$ ist durch die Menge **IChar**(G) der *infinitesimalen Charaktere* indiziert: $\mathcal{F}_i = \{\chi_i^\lambda \mid \lambda \in \text{IChar}(G)\}$.

$$\chi_i^\lambda = \sum_{j=1}^N P_{i,j}(1) \cdot \Theta_j^\lambda \quad \text{für } 1 \leq i \leq N$$

für gewisse Funktionen $\Theta_1^\lambda, \dots, \Theta_N^\lambda$ (**Harish-Chandra**).

Die Polynome $P_{i,j} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ sind die berühmten **Kazhdan-Lusztig-Vogan-Polynome**.

Die $P_{i,j}$ **hängen nicht** von λ ab und $P_{i,j} = 0$ für $i < j$.

→ **Sehr tiefliegende Resultate** über **Schnitthomologie** von Kazhdan, Lusztig, Beilinson, Bernstein, Brylinski, Kashiwara, Vogan, ...

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Die E_8 -Rechnung

Tatsachen:

- Bei E_8 gibt es **453060** Translationsfamilien.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Die E_8 -Rechnung

Tatsachen:

- Bei E_8 gibt es **453060** Translationsfamilien.
 $\implies 453060^2/2$ Polynome, Grad bis zu 31

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von

Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte

Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Die E_8 -Rechnung

Tatsachen:

- Bei E_8 gibt es **453060** Translationsfamilien.
 $\implies 453060^2/2$ Polynome, Grad bis zu 31
- Diese können mit dem **Kazhdan-Lusztig-Algorithmus** berechnet werden.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Die E_8 -Rechnung

Tatsachen:

- Bei E_8 gibt es **453060** Translationsfamilien.
 $\implies 453060^2/2$ Polynome, Grad bis zu 31
- Diese können mit dem **Kazhdan-Lusztig-Algorithmus** berechnet werden.
- Es war **keine Abschätzung** für die Koeffizienten bekannt!

Die E_8 -Rechnung

Tatsachen:

- Bei E_8 gibt es **453060** Translationsfamilien.
 $\implies 453060^2/2$ Polynome, Grad bis zu 31
- Diese können mit dem **Kazhdan-Lusztig-Algorithmus** berechnet werden.
- Es war **keine Abschätzung** für die Koeffizienten bekannt!

Größe der Rechnung:

- Zunächst schienen **480 GB RAM** notwendig!

Die E_8 -Rechnung

Tatsachen:

- Bei E_8 gibt es **453060** Translationsfamilien.
 $\implies 453060^2/2$ Polynome, Grad bis zu 31
- Diese können mit dem **Kazhdan-Lusztig-Algorithmus** berechnet werden.
- Es war **keine Abschätzung** für die Koeffizienten bekannt!

Größe der Rechnung:

- Zunächst schienen **480 GB RAM** notwendig!
- Durch Tricks: Reduktion auf etwa **150 GB**

Die E_8 -Rechnung

Tatsachen:

- Bei E_8 gibt es **453060** Translationsfamilien.
 $\implies 453060^2/2$ Polynome, Grad bis zu 31
- Diese können mit dem **Kazhdan-Lusztig-Algorithmus** berechnet werden.
- Es war **keine Abschätzung** für die Koeffizienten bekannt!

Größe der Rechnung:

- Zunächst schienen **480 GB RAM** notwendig!
- Durch Tricks: Reduktion auf etwa **150 GB**
- Schließlich klappte es durch getrennte Rechnungen modulo 251, 253, 255 und 256.

Die E_8 -Rechnung

Tatsachen:

- Bei E_8 gibt es **453060** Translationsfamilien.
 $\implies 453060^2/2$ Polynome, Grad bis zu 31
- Diese können mit dem **Kazhdan-Lusztig-Algorithmus** berechnet werden.
- Es war **keine Abschätzung** für die Koeffizienten bekannt!

Größe der Rechnung:

- Zunächst schienen **480 GB RAM** notwendig!
- Durch Tricks: Reduktion auf etwa **150 GB**
- Schließlich klappte es durch getrennte Rechnungen modulo **251, 253, 255 und 256**.
- Insgesamt braucht die Rechnung jetzt rund **50 Stunden** und produziert **60 GB** Ausgabe.

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen
Was bedeutet E_8 ?
Reell und komplex
Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen
Klassifikation von
Darstellungen
Kompakte Lie-Gruppen
Nicht-kompakte
Lie-Gruppen
Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „Science“ zu erreichen

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen
Was bedeutet E_8 ?
Reell und komplex
Darstellungen

Was sie gemacht haben

Der Atlas der Lie-Gruppen
Klassifikation von
Darstellungen
Kompakte Lie-Gruppen
Nicht-kompakte
Lie-Gruppen
Die E_8 -Rechnung

Was die Presse davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „Science“ zu erreichen
- Presseerklärung durch das AIM und die Beteiligten

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „Science“ zu erreichen
- Presseerklärung durch das AIM und die Beteiligten
- Lange arbeitsintensive Vorbereitungen

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „**Science**“ zu erreichen
- **Presseerklärung** durch das AIM und die Beteiligten
- Lange arbeitsintensive Vorbereitungen

Zutaten:

- Benötigt: „Aufhänger“, die jeder versteht: **Symmetrie**, **Größe**, **Teamarbeit**, **Folgen für die Forschung**

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „**Science**“ zu erreichen
- **Presseerklärung** durch das AIM und die Beteiligten
- Lange arbeitsintensive Vorbereitungen

Zutaten:

- Benötigt: „Aufhänger“, die jeder versteht: **Symmetrie**, **Größe**, **Teamarbeit**, **Folgen für die Forschung**
- Unabdingbar: eine gute begleitende **Webseite**

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „Science“ zu erreichen
- Presseerklärung durch das AIM und die Beteiligten
- Lange arbeitsintensive Vorbereitungen

Zutaten:

- Benötigt: „Aufhänger“, die jeder versteht: **Symmetrie**, **Größe**, **Teamarbeit**, **Folgen für die Forschung**
- Unabdingbar: eine gute begleitende **Webseite**
- Notwendig: ein passendes **Bild**

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „**Science**“ zu erreichen
- **Presseerklärung** durch das AIM und die Beteiligten
- Lange arbeitsintensive Vorbereitungen

Zutaten:

- Benötigt: „Aufhänger“, die jeder versteht: **Symmetrie**, **Größe**, **Teamarbeit**, **Folgen für die Forschung**
- Unabdingbar: eine gute begleitende **Webseite**
- Notwendig: ein passendes **Bild**
- Gut: Verbindung der Presseerklärung mit **Ereignis**

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „**Science**“ zu erreichen
- **Presseerklärung** durch das AIM und die Beteiligten
- Lange arbeitsintensive Vorbereitungen

Zutaten:

- Benötigt: „Aufhänger“, die jeder versteht: **Symmetrie**, **Größe**, **Teamarbeit**, **Folgen für die Forschung**
- Unabdingbar: eine gute begleitende **Webseite**
- Notwendig: ein passendes **Bild**
- Gut: Verbindung der Presseerklärung mit **Ereignis**
- Hilfreich: Professionelle **PR-Hilfe**

Wie schaffte es E_8
in die
Schlagzeilen?

Max Neunhöffer

Einführung

Lie-Gruppen

Was bedeutet E_8 ?

Reell und komplex

Darstellungen

Was sie gemacht
haben

Der Atlas der Lie-Gruppen

Klassifikation von
Darstellungen

Kompakte Lie-Gruppen

Nicht-kompakte
Lie-Gruppen

Die E_8 -Rechnung

Was die Presse
davon hielt

Wie kann man das
erklären?

Wie kann man das öffentlich erklären?

Konzept:

- Idee: Mathematik der Öffentlichkeit näher bringen
- Ursprünglicher Plan: Wissenschafts- und Technologiemedien wie „**Science**“ zu erreichen
- **Presseerklärung** durch das AIM und die Beteiligten
- Lange arbeitsintensive Vorbereitungen

Zutaten:

- Benötigt: „Aufhänger“, die jeder versteht: **Symmetrie**, **Größe**, **Teamarbeit**, **Folgen für die Forschung**
- Unabdingbar: eine gute begleitende **Webseite**
- Notwendig: ein passendes **Bild**
- Gut: Verbindung der Presseerklärung mit **Ereignis**
- Hilfreich: Professionelle **PR-Hilfe**
- Extrem wertvoll: **Zitate** von **externen Experten**