Auf- und Abzählung sehr langer Bahnen

Max Neunhöffer

20. Juni 2004

0 Bahnaufzählung

G (endliche) Gruppe, die auf der (endlichen) Menge Ω operiert:

$$\begin{array}{rcl} \Omega \times G & \to & \Omega \\ (\omega, g) & \mapsto & \omega \cdot g \end{array} \qquad \text{mit} \quad (\omega \cdot g) \cdot h = \omega \cdot (g \cdot h) \quad \forall\, \omega \in \Omega, g, h \in G$$

Grundlegende Annahmen:

- können Elemente von Ω speichern und vergleichen
- Operation gegeben durch die Möglichkeit, $\omega \cdot g_i$ zu berechnen für alle $\omega \in \Omega$ und alle $g_i \in \{g_1, \ldots, g_r\}$ mit $\langle g_1, \ldots, g_r \rangle = G$. [häufig $k = 2$]
- $\Longrightarrow$ können Wörter in den g_i anwenden

Bahnalgorithmus:
Gegeben: $\omega_0 \in \Omega, g_1, \ldots, g_r$
Gesucht: $\omega_0 \cdot G$ (oder zumindest $|\omega_0 \cdot G|$)

```
l := [ω_o]
für ω in l:
    für g in {g_1, ..., g_r}:
        wenn nicht(ω · g in l):
            hänge ω · g an l an
Resultat ist l
```

ACHTUNG: Stelle sicher, dass äußere Schleife neue Elemente noch durchläuft!
[Beweisidee]
Bemerkungen:

- Kleine Variation liefert ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Stab}_G(\omega_0)$.
- Wenn $|\omega_0 G|$ (oder äq. $|\mathrm{Stab}_G(\omega_0)|$) bekannt ist, kann man früher aufhören.

Wir haben die folgenden elementaren Operationen gebraucht:

- WENDE Erzeuger g auf ein bereits gefundenes ω an
- TESTE, ob $\omega \cdot g$ bekannt ist
- ERFASSE $\omega \cdot g$

Was ist zu tun, wenn der Speicher nicht reicht, um die ganze Bahn zu speichern?
[Probleme]

1 Trick 1

$u < G$ operiere auf Ω', $\pi : \Omega \to \Omega'$ sei U-Mengen-Hom., d.h. $\pi(\omega \cdot u) = \pi(\omega) \cdot u \,\forall\, \omega \in \Omega, u \in U$.
Ω' klein, so dass wir es komplett speichern können plus Zusatzinfo.
Zerlege $\Omega' = \omega_1' \cdot U \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, \omega_n' \cdot U$ in U-Bahnen.

Definition:
Nenne in jeder U-Bahn von Ω' **genau ein** Element „U**-minimal**“.
$\omega \in \Omega$ ist U-minimal $:\iff \pi(\omega)$ ist U-minimal.

Idee: Speichere ganze U-Bahnen durch Speichern der U-minimalen Elemente darin.

Vorbereitung: Berechne für jedes $\omega' \in \Omega'$ ein $u \in U$, so dass $\omega' \cdot u$ U-minimal ist.
Speichere also Abbildung $m : \Omega' \to U$ mit: $\omega' \cdot m(\omega')$ ist U-minimal.

Definition:
Für $\omega \in \Omega$ nenne $\min_U(\omega) := \omega \cdot m(\pi(\omega))$ die U**-Minimalisierung** von ω, sie ist U-minimal:

$$\pi(\omega \cdot m(\pi(\omega))) = \pi(\omega) \cdot m(\pi(\omega))$$

[Bemerkung: Wahlen!]

Problem: Es gibt womöglich mehrere U-minimale Punkte in $\omega \cdot U$, nämlich: $\omega \cdot \mathrm{Stab}_U(\pi(\omega))$.

ERFASSE $\omega \cdot U$:
  speichere alle U-minimalen Elemente in $\omega \cdot U$ (mit $x := \min_U(\omega)$ sind dies $x \cdot \mathrm{Stab}_U(\pi(x))$)

TESTE $\omega \cdot U$:
  schlage $\min_U(\omega)$ nach

WENDE g **auf** $\omega \cdot U$ **AN**:
  nimm beliebigen Punkte aus $\omega \cdot U$
  zähle U-Bahn auf
  wende g auf jedes Element an

[Folie mit G-Bahn nach U-Bahnen]