

Untersuchungen zu James' Vermutung über Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker

Max Neunhöffer

aus Heidelberg

Berichter: Universitätsprofessor Dr. Gerhard Hiß

Universitätsprofessor Dr. Herbert Pahlings

Tag der mündlichen Prüfung: 23.4.2003

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar.

Danksagungen

Ich danke Gerhard Hiß und Meinolf Geck dafür, dass sie mir das interessante und vielseitige Thema dieser Arbeit als Promotionsprojekt vorgeschlagen haben. Insbesondere Gerhard Hiß möchte für die hervorragende Betreuung in den letzten Jahren danken. Er stand von der ersten Einarbeitungsphase bis zur Abfassung und Korrektur dieses Textes stets für Fragen und Diskussionen zur Verfügung und hatte immer nützliche Hinweise und Literaturreferenzen parat. Obgleich er mir absolute Freiheit ließ, wann ich wie viel und in welche Richtung an diesem Projekt arbeitete, wusste er doch jederzeit über den aktuellen Stand der Dinge Bescheid.

Auch Meinolf Geck stand immer bei gelegentlichen Treffen oder per Email als Ratgeber bereit. Ich danke ihm außerdem dafür, dass er meinen dreimonatigen Gastaufenthalt am Institut Girard Desargues in Lyon ermöglicht hat, währenddessen wesentliche Teile dieser Arbeit entstanden. Ich danke auch den Kollegen in Lyon für die freundliche Aufnahme.

Besonders hervorheben möchte ich an dieser Stelle auch die familiäre und anregende Atmosphäre am Lehrstuhl D für Mathematik. Die Tatsache, dass man jederzeit auch mit „dummen“ Fragen zu Kollegen gehen kann und Antworten und ein offenes Ohr für Diskussionen findet, hilft unheimlich, Irrwege zu vermeiden und auch komplizierte Sachverhalte zu verstehen. Auch die täglichen Kaffeerunden mit interessanten mathematischen und anderen Debatten sind sehr hilfreich für die Produktion von Ideen und machen viel Spaß. Die Stimmung im Institut war in den letzten Jahren immer gut und es wurde viel gelacht. Dafür danke ich allen meinen Kollegen am Lehrstuhl herzlich, stellvertretend für alle seien Christoph Köhler, Felix Noeske, Frank Himstedt, Frank Lübeck, Jürgen Müller, Reinhard Waldmüller und Thomas Breuer genannt.

Ich danke Magdolna Szóke dafür, dass sie diese Arbeit sehr sorgfältig gelesen hat und mich auf etliche mathematische sowie sprachliche Unstimmigkeiten hingewiesen hat.

Helmut Neunhöffer, Joachim Neubüser und Manfred Hirsch danke ich für ihre kritischen Kommentare zur Einleitung dieser Arbeit.

Herbert Pahlings danke ich für die Bereitschaft, als Zweitgutachter zur Verfügung zu stehen.

Last but not least bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mir — neben vielem Anderen — die Ausbildung ermöglicht haben, ohne die ich die vorliegende Arbeit nicht hätte erstellen können.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Einleitung	5
Gebiet der Arbeit	5
James' Vermutung	6
Inhalt der Arbeit	7
Bemerkungen zum Text	10
I Bezeichnungen und Grundlagen	11
I.1 Moduln und Bimoduln	11
I.2 Algebren	12
I.3 Wechsel des Grundrings	14
II Vollständigkeit und Heben von Idempotenten	18
II.1 Lineare Topologien und additive Bewertungen	18
II.2 Lineare Topologien auf Ordnungen	25
II.3 Vervollständigung	29
II.4 Heben von Idempotenten	36
II.5 Semilokale und semiperfekte Ringe	38
II.6 Verbesserung von Idempotenten	41
III Der Polynomring über $\mathbb{Z}$	43
III.1 Primideale von $\mathbb{Z}[v]$	43
III.2 Primidealketten und nicht-diskrete Bewertungen	45
III.3 Semiperfekte Ordnungen über Bewertungsringen in $\mathbb{Q}(v)$	50
IV Idempotente aus Matrixdarstellungen zu projektiven Moduln	52
IV.1 Grundlagen und Definitionen	52
IV.2 Symmetrische Algebren über Körpern	55
IV.3 Schur-Relationen	56
IV.4 Primitive Idempotente	60
V Zerlegungsabbildungen und Brauer-Reziprozität	64
V.1 Grundlagen und Definitionen	64
V.2 Zerlegungsabbildungen	68
V.3 Klebeabbildungen	70
V.4 Brauer-Reziprozität	72
V.5 Faktorisierung von Zerlegungsabbildungen	73
VI Iwahori-Hecke-Algebren	77
VI.1 Grundlagen und Definitionen	77
VI.2 Kazhdan-Lusztig-Basen	80
VI.3 Ergebnisse über Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A	86

VI.4	Kazhdan-Lusztig-Basis und Wedderburn-Zerlegung im Typ A	96
VI.5	Lusztig's asymptotische Algebra $\mathcal{J}$	100
VI.6	Parabolische Unteralgebren und Induktion von Zellmoduln	104
VI.7	Projektive Zellmoduln	108
VII	Die James-Geck-Vermutung	112
VII.1	Bisherige Formulierungen	112
VII.2	Neue Formulierungen mit Brauer-Reziprozität	115
VII.3	Neue Formulierungen mit Gram-Matrizen	119
VII.4	Fazit	122
A	Ergänzungen	123
A.1	Vollständigkeit und Heben von Idempotenten	123
A.2	Nicht-diskrete Bewertungen auf $\mathbb{Z}[v]$	129
A.3	Existenz von ganzzahligen Darstellungen	132
B	Bezeichnungsindex	136
C	Abbildungsverzeichnis	140
D	Tabellenverzeichnis	140
E	Literaturverzeichnis	141
F	Index	146

Einleitung

Gebiet der Arbeit

Die Darstellungstheorie befasst sich mit dem Problem, abstrakt gegebene algebraische Strukturen wie Gruppen und Algebren „konkret abzubilden“. Dabei bedeutet „konkret abbilden“, eine Abbildung in eine Matrixalgebra anzugeben, die mit der algebraischen Struktur verträglich ist. So ist eine Matrixdarstellung einer (endlichen) Gruppe G beispielsweise eine Abbildung von G in die Gruppe der invertierbaren Matrizen einer gewissen Größe über einem Ring, so dass das Bild des Produktes von je zwei beliebigen Gruppenelementen gleich dem Matrixprodukt der beiden Bilder ist. Die Kenntnis der Darstellungen eines mathematischen Objekts ist nicht nur an sich interessant, sondern erlaubt auch Rückschlüsse über das Objekt selbst.

Ein Grundproblem der Darstellungstheorie ist die Klassifikation aller Darstellungen einer gegebenen algebraischen Struktur. Diese erfolgt in der Regel in zwei Schritten: Zunächst kommt die Klassifikation der einfachen Darstellungen — sozusagen der Atome. Dabei ist eine Darstellung einfach, wenn sie in einem gewissen Sinne keine „kleineren“ Darstellungen enthält. Als zweiter Schritt wird analysiert, wie die nicht-einfachen Darstellungen aus den einfachen zusammengesetzt sind.

Je nachdem, aus welchem Ring die Einträge der darstellenden Matrizen stammen, sind diese beiden Schritte unterschiedlich schwierig. Zum Beispiel sind alle einfachen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n auf n Punkten über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, der sogenannte „gewöhnliche“ Fall, vollständig bekannt. Außerdem sind alle endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$ -Darstellungen einer endlichen Gruppe halbeinfach, was bedeutet, dass sie direkte Summen von einfachen sind. Der Isomorphietyp einer beliebigen $\mathbb{C}$ -Darstellung von S_n hängt also nur von den Vielfachheiten der einfachen Summanden ab — die Klassifikation ist abgeschlossen.

Ganz anders ist die Situation, wenn man sich für die Matrixdarstellungen der symmetrischen Gruppe S_n über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_\ell$ mit ℓ Elementen interessiert, wobei ℓ eine Primzahl ist, die die Gruppenordnung $n!$ teilt. Hier ist nur eine Parametrisierung der einfachen Darstellungen bekannt, noch nicht einmal die Größe der Matrizen in den einfachen Darstellungen lässt sich (außer in kleinen Beispielen) bestimmen! Zusätzlich sind die Darstellungen nicht alle halbeinfach, sondern es gibt Darstellungen, die sich nicht mehr weiter in direkte Summen kleinerer Darstellungen zerlegen lassen, aber selbst nicht einfach sind. Dieser „modulare“ Fall für die symmetrischen Gruppen ist eines der großen, offenen Probleme der Darstellungstheorie.

Ganz ähnlich sieht es für die Darstellungen der $GL(n, q)$ aus, der Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen im endlichen Körper mit q Elementen. Während die gewöhnliche Darstellungstheorie über $\mathbb{C}$ wieder gut verstanden ist, sind wir weit von einer Klassifikation der modularen Darstellungen entfernt. Die modulare Darstellungstheorie von $GL(n, q)$ ist ein weiteres, großes, offenes Problem.

Beim Studium dieser beiden Probleme ist man auf Iwahori-Hecke-Algebren gestoßen. Diese traten zunächst als Endomorphismenringe gewisser Moduln auf, wurden aber später (1964 von Iwahori, siehe [Iwa64]) auch abstrakt als assoziative Algebren über Erzeuger und Relationen definiert:

Es sei $S := \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$ die Menge der Nachbartranspositionen in S_n . Dann lässt sich jedes Element von S_n als Produkt von Elementen von S schreiben. Die Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}_A(u)$ zur symmetrischen Gruppe S_n (das heißt „Typ A_{n-1} “) über einem Ring A mit Parameter $u \in A$

ist dann die assoziative A -Algebra mit Erzeugern $\{T_s \mid s \in S\}$, für die die Relationen

$$\begin{aligned} T_s^2 &= u \cdot 1_{\mathcal{H}} + (u - 1) \cdot T_s && \text{für } s \in S && \text{und} \\ T_s T_t &= T_t T_s && \text{für } s, t \in S \text{ mit } st = ts && \text{und} \\ T_s T_t T_s &= T_t T_s T_t && \text{für } s, t \in S \text{ mit } st \neq ts \end{aligned}$$

gelten. So gibt es also für jeden kommutativen Ring A und jeden Parameter $u \in A$ eine Iwahori-Hecke-Algebra zu S_n . Die kombinatorischen Daten zur Konstruktion sind jeweils gleich.

Diese Tatsache führt dazu, dass jeder Ringhomomorphismus $\theta : A \rightarrow A'$ einen Ringhomomorphismus zwischen den Iwahori-Hecke-Algebren $\mathcal{H}_A(u)$ und $\mathcal{H}_{A'}(\theta(u))$ induziert. Eine solche Abbildung θ wird „Spezialisierung“ genannt. Ein wichtiger Spezialfall ist, dass A ein lokaler Ring ist, A' sein Restklassenkörper und θ die kanonische Abbildung.

Ist $u = 1$, so ist $\mathcal{H}_A(u)$ isomorph zur Gruppenalgebra von S_n über dem Ring A . Die Gruppenalgebra kann man sich als die Algebra der A -wertigen Funktionen auf S_n mit Konvolutionsprodukt vorstellen, sie hat dieselben Darstellungen über dem Ring A wie die Gruppe selbst. Man nennt die Iwahori-Hecke-Algebra für einen Parameter $u \neq 1$ eine „Deformation“ der Gruppenalgebra.

Könnte man alle Darstellungen von $\mathcal{H}_K(u)$ für beliebige Körper K und beliebige Parameter $u \in K$ bestimmen, so enthielte dies also alle modularen Darstellungen der symmetrischen Gruppe. Andererseits zeigt ein schönes Ergebnis von Karin Erdmann (siehe [Erd97]), dass die Kenntnis aller einfachen Darstellungen aller symmetrischen Gruppen auch die Kenntnis aller einfachen Darstellungen der Gruppen $GL(n, q)$ über Körpern der Charakteristik ℓ mit $\ell \mid q$ implizieren würde.

So gibt es also viele Verbindungen der Iwahori-Hecke-Algebren mit anderen, interessanten Fragestellungen.

James' Vermutung

Beim Studium der modularen Darstellungstheorie der Gruppen $GL(n, q)$ haben Richard Dipper und Gordon James sogenannte „ q -Schur-Algebren“ betrachtet. Diese treten — wie die Iwahori-Hecke-Algebren der symmetrischen Gruppe — als Endomorphismenringe gewisser Moduln auf. So gibt es auch für jedes $n \in \mathbb{N}$, jeden kommutativen Ring A und jeden Parameter $u \in A$ eine q -Schur-Algebra. Das q im Namen „ q -Schur-Algebra“ kommt genau von diesem Parameter, der in der Literatur meist mit q bezeichnet wird, hier aber u heißt zur besseren Unterscheidung vom q der $GL(n, q)$.

Vor 1990 untersuchten Richard Dipper und Gordon James die Darstellungen dieser Algebren für $n \leq 10$ und endliche Körper $\mathbb{F}_\ell$ (ℓ eine Primzahl) mit $0 \neq u \in \mathbb{F}_\ell$. Dabei beobachtete Gordon James, dass die Darstellungstheorie in diesem Fall nicht wirklich von ℓ und u abhängt, sondern dass es (wenn ℓ groß genug ist) nur auf den Parameter e ankommt, der so definiert ist: $e \in \mathbb{N}$ ist die kleinste Zahl, für die $1 + u + u^2 + \dots + u^{e-1} = 0$ ist. Für $u = 1$ ist $e = \ell$, und für $u \neq 1$ ist e gleich der multiplikativen Ordnung von u in $\mathbb{F}_\ell$.

Er vermutete also im Jahre 1990 in [Jam90], dass die Darstellungstheorie der q -Schur-Algebra über $\mathbb{F}_\ell$ mit Parameter $0 \neq u \in \mathbb{F}_\ell$ nur von e und nicht von ℓ und u abhängt, solange nur $e \cdot \ell > n$ ist. Zwei q -Schur-Algebren über $\mathbb{F}_\ell$ bzw. $\mathbb{F}_{\ell'}$ mit Parameter $u \in \mathbb{F}_\ell$ bzw. $u' \in \mathbb{F}_{\ell'}$ verhalten sich also in Bezug auf ihre Darstellungen über dem Körper $\mathbb{F}_\ell$ bzw. $\mathbb{F}_{\ell'}$ „im Wesentlichen gleich“, wenn nur beide dasselbe e haben und $e \cdot \ell > n$ ist.

„Sich im Wesentlichen gleich verhalten“ bedeutet hier zunächst, dass es eine Bijektion zwischen den Mengen der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der beiden Algebren gibt, so dass die Größen der vorkommenden Matrizen von dieser Bijektion respektiert werden. Zusätzlich wird aber noch eine Verträglichkeit mit den gewöhnlichen Darstellungen über dem Funktionenkörper $\mathbb{C}(v)$ in einer Unbestimmten v vermutet, die mit sogenannten „Zerlegungsabbildungen“ formuliert werden kann (siehe weiter unten bzw. in Kapitel V). Dazu wird die Spezialisierung $\theta : \mathbb{Z}[v] \rightarrow \mathbb{F}_\ell$, $v \mapsto u$ betrachtet, die die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_\ell$ fortsetzt.

In [Gec98] formuliert Meinolf Geck 1998 eine Variante dieser Vermutung für Iwahori-Hecke-Algebren. Dabei dehnt er sie auf andere Typen als Typ A aus und beschreibt gleichzeitig die vermutete

Klassifikation der einfachen Darstellungen konkreter. Dafür ist die Voraussetzung $e \cdot \ell > n$ zu $\ell > n$ verschärft, was nämlich beim Typ A genau bedeutet, dass ℓ kein Teiler der Gruppenordnung $n!$ der symmetrischen Gruppe ist.

Obleich schon in [Gec98] gezeigt wird, dass die Aussage der Vermutung für genügend große ℓ stimmt, ist bis heute keine explizite untere Schranke für ℓ bekannt, oberhalb der sie richtig ist.

In der vorliegenden Arbeit werden andere, aber zu James' Vermutung äquivalente Aussagen vorgestellt mit der Idee, auf diese Weise neue Ansätze für einen Beweis zu finden. So stellt diese Arbeit eher den Anfang eines Forschungsprojekts dar als den Abschluss.

Inhalt der Arbeit

Im Folgenden wird der Inhalt der Arbeit nicht in der Reihenfolge des logischen Aufbaus, sondern in der Reihenfolge der gegenseitigen Motivation beschrieben. Diese Reihenfolge entspricht auch etwa der, in der die Ideen entstanden sind.

Die James-Geck-Vermutung ist in [Gec98] mit Hilfe von Zerlegungsabbildungen beschrieben. Dabei wird die „generische“ Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v)}(v)$ vom Typ A über dem Funktionenkörper $\mathbb{Q}(v)$ in einer Unbestimmten v mit den „spezialisierten“ Iwahori-Hecke-Algebren $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\zeta_e)}(\zeta_e)$ über dem Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_e)$ und $\mathcal{H}_{\mathbb{F}_\ell}(u)$ über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_\ell$ verglichen, insbesondere in Bezug auf die Frage, wie die jeweiligen Darstellungen über $\mathbb{Q}(v)$, $\mathbb{Q}(\zeta_e)$ bzw. $\mathbb{F}_\ell$ zusammenhängen. Dabei dient die Algebra über $\mathbb{Q}(\zeta_e)$ als Prototyp für all diejenigen Algebren über $\mathbb{F}_\ell$, deren $e(u)$ gleich e ist.

Ist A ein Integritätsbereich, dann wird eine Zerlegungsabbildung im Wesentlichen definiert, indem man eine Darstellung einer A -Algebra $\mathcal{H}$ über dem Quotientenkörper K von A durch Basiswechsel „ganzzahlig“ macht und dann auf die Einträge in den Darstellungsmatrizen einen Ringhomomorphismus in einen Körper k anwendet, so dass man eine Darstellung einer „spezialisierten“ Algebra $k\mathcal{H} := k \otimes_A \mathcal{H}$ über k erhält. Ist $K\mathcal{H} := K \otimes_A \mathcal{H}$ die Konstantenerweiterung, dann kann man so einem einfachen $K\mathcal{H}$ -Modul einen $k\mathcal{H}$ -Modul zuordnen. Einfache Darstellungen werden bei diesem Prozess im Allgemeinen reduzibel, und die Zerlegungsabbildung kodiert dann für jeden Isomorphietyp einfacher $K\mathcal{H}$ -Moduln, wie oft die einfachen $k\mathcal{H}$ -Moduln als Konstituenten in der oben beschriebenen „Spezialisierung“ vorkommen. Diese Konstruktion ergibt eine wohldefinierte Abbildung zwischen den Grothendieck-Gruppen $R_0(K\mathcal{H})$ und $R_0(k\mathcal{H})$. Kennt man die Darstellungen von $K\mathcal{H}$, dann ist die Kenntnis der Zerlegungsabbildung äquivalent zur Kenntnis der einfachen Darstellungen von $k\mathcal{H}$.

Für die Formulierung der James-Geck-Vermutung in [Gec98] definiert man drei Zerlegungsabbildungen zwischen den Grothendieck-Gruppen der oben beschriebenen Algebren, die ein kommutatives Dreieck bilden:

$$\begin{array}{ccc} R_0(\mathbb{Q}(v)\mathcal{H}) & \xrightarrow{d_\ell} & R_0(\mathbb{F}_\ell\mathcal{H}) \\ & \searrow d_{\zeta_e} \quad \swarrow d_\ell^{\zeta_e} & \\ & R_0(\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}) & \end{array}$$

Die James-Geck-Vermutung besagt dann, dass für $\ell > n$ die Zerlegungsabbildung $d_\ell^{\zeta_e}$ trivial ist, also ein Isomorphismus ist, der die Klassen der einfachen Moduln auf ebensolche abbildet. Dies bedeutet, dass eben die Zerlegungsabbildung d_{ζ_e} den „generischen“ Zerlegungsfall darstellt, der für alle ℓ ab einer gewissen Schranke auch bei allen Zerlegungsabbildungen d_ℓ eintritt. Diese Formulierung der James-Geck-Vermutung ist der Ausgangspunkt dieser Arbeit.

In Kapitel V wird zunächst auf die Definition von Zerlegungsabbildungen eingegangen, und es wird geklärt, welche Voraussetzungen über die vorkommenden Ringe, Körper und Algebren zu machen sind. Danach wird ein zur Zerlegungsabbildung duales und in vielen Fällen äquivalentes Konzept eingeführt, nämlich das der „Klebeabbildung“. Dabei betrachtet man die projektiven Grothendieck-Gruppen $K_0(K\mathcal{H})$ und $K_0(k\mathcal{H})$. An die Stelle von einfachen Moduln treten projektiv unzerlegbare, und die Klebeabbildung wird zwischen den projektiven Grothendieck-Gruppen in der umgekehrten

Richtung definiert, also von $K_0(k\mathcal{H})$ nach $K_0(K\mathcal{H})$: Man wählt zunächst einen geeigneten lokalen Ring $\mathcal{O}$ mit Restklassenkörper k , für den $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq K$ gilt. Dann beginnt man mit einem beliebigen primitiven Idempotent $\bar{f}$ in $k\mathcal{H}$, hebt dieses zu einem Idempotent $f \in \mathcal{O}\mathcal{H} := \mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H}$ und ordnet dem projektiv unzerlegbaren $k\mathcal{H}$ -Modul $\bar{f}k\mathcal{H}$ den projektiven $K\mathcal{H}$ -Modul $fK\mathcal{H}$ zu. Dies liefert eine wohldefinierte Abbildung $K_0(k\mathcal{H}) \rightarrow K_0(K\mathcal{H})$.

Es stellt sich heraus, dass unter geeigneten Voraussetzungen an den Ring $\mathcal{O}$ die Klebeabbildung die duale Abbildung der Zerlegungsabbildung ist.¹ Diese Tatsache wird „Brauer-Reziprozität“ genannt und ist in der modularen Darstellungstheorie von endlichen Gruppen ein Standardwerkzeug. Die Ausführungen in Kapitel V zu diesem Thema basieren auf einer Arbeit von Meinolf Geck und Raphaël Rouquier (siehe [GR97]). Wirklich neu ist an Kapitel V nur der Name „Klebeabbildung“ und eine sorgfältige Klärung der benötigten Voraussetzungen.

Es kommt nämlich heraus, dass die wesentliche Voraussetzung an den lokalen Ring $\mathcal{O}$ ist, dass die $\mathcal{O}$ -Algebra $\mathcal{O}\mathcal{H}$ semiperfekt ist. Das bedeutet, dass $\mathcal{O}\mathcal{H}/\text{rad}(\mathcal{O}\mathcal{H})$ ein halbeinfacher, artinscher Ring ist und zu jedem Idempotent $\bar{f} \in \mathcal{O}\mathcal{H}/\text{rad}(\mathcal{O}\mathcal{H})$ ein Idempotent $f \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ existiert, das unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{O}\mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{O}\mathcal{H}/\text{rad}(\mathcal{O}\mathcal{H})$ auf $\bar{f}$ abgebildet wird.² Diese Existenzaussage wird „Heben von Idempotenten“ genannt. Ein semiperfekter Ring ist also einer, bei dem das Heben von Idempotenten vom Radikalfaktor möglich ist.

In Kapitel II werden Bedingungen an lokale Ringe $\mathcal{O}$ und Algebren $\mathcal{H}$ gesucht, die dafür ausreichen, dass die Algebra $\mathcal{O}\mathcal{H}$ semiperfekt ist. Klassisch (insbesondere in der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen) wird hierfür ein vollständiger, diskreter Bewertungsring $\mathcal{O}$ benutzt. Da dies aber im Zusammenhang mit der James-Geck-Vermutung zu weit reichende Voraussetzungen sind, wird in Kapitel II einerseits gezeigt, dass man in der Regel auf die Vervollständigung verzichten kann (Stichwort „Verbesserung von Idempotenten“, siehe II.(6.1)), zum Anderen werden nicht-diskrete Bewertungsringe betrachtet. Dies wird später benötigt, um Ketten von ineinander enthaltenen Bewertungsringen zu erhalten (siehe unten).

Die Abschwächung der Voraussetzungen an $\mathcal{O}$ macht eine genaue Analyse des Vervollständigungsprozesses, der dabei vorkommenden Topologien und der verfügbaren Verfahren zum Heben von Idempotenten notwendig. Insbesondere wird in Kapitel II eine Topologie auf Algebren $\mathcal{O}\mathcal{H}$ auf verschiedene Weisen definiert, um in verschiedenen Situationen unterschiedliche Beweistechniken zur Verfügung zu haben. Die dabei vorgestellten Techniken sind nach Kenntnis des Autors neu.

In Kapitel III wird der Ring $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ und sein Quotientenkörper $\mathbb{Q}(v)$ betrachtet. Neben einer Klassifikation der Primideale von $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ werden dort nicht-diskrete Bewertungen mit Wertegruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ konstruiert, die an Primidealketten $0 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p} \triangleleft \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ angepasst sind. Dadurch erhält man ineinander enthaltene Bewertungsringe $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ mit $\mathbb{Z}[v, v^{-1}] \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}' \subsetneq \mathbb{Q}(v)$, wobei $\mathcal{O}'$ diskret und $\mathcal{O}$ nicht-diskret ist. Diese Bewertungsringe erfüllen die Voraussetzungen aus Kapitel II, so dass man semiperfekte Algebren $\mathcal{O}\mathcal{H}$ und $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ erhält, die ebenfalls ineinander enthalten sind. Nach Kenntnis des Autors sind diese Konstruktionen neu.

Die bisher aufgezählten Resultate erlauben nun in Kapitel VII zwei Umformulierungen der James-Geck-Vermutung mit Hilfe von Idempotenten. Dabei werden Bewertungsringe und die Semiperfektigkeit der Iwahori-Hecke-Algebren darüber benutzt, um Klebeabbildungen zu definieren, die wie oben die Zerlegungsabbildungen ein kommutatives Dreieck bilden:

$$\begin{array}{ccc}
 K_0(\mathbb{Q}(v)\mathcal{H}) & \xleftarrow{e_\ell} & K_0(\mathbb{F}_\ell\mathcal{H}) \\
 & \circlearrowleft & \\
 K_0(\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}) & \xleftarrow{e_{\zeta_e}} & K_0(\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H})
 \end{array}$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $e_{\zeta_e} \quad e_{\zeta_e}^\ell$

Die erste Umformulierung verwendet, dass wegen der Dualität zu den entsprechenden Zerlegungsabbildungen die James-Geck-Vermutung äquivalent dazu ist, dass die Klebeabbildung $e_{\zeta_e}^\ell$ ein Isomor-

¹ „Dual“ ist bezüglich der Paarung von $R_0(K\mathcal{H})$ und $K_0(K\mathcal{H})$ gemeint, die von der Tatsache kommt, dass die projektiv unzerlegbaren $K\mathcal{H}$ -Moduln genau die projektiven Hüllen der einfachen $K\mathcal{H}$ -Moduln sind.

² Mit $\text{rad}(\mathcal{O}\mathcal{H})$ ist das Jacobson-Radikal von $\mathcal{O}\mathcal{H}$ bezeichnet.

phismus ist, der die Klassen der projektiv unzerlegbaren Moduln auf ebensolche abbildet. Die zweite Umformulierung vergleicht die beiden Klebeabbildungen e_{ζ_e} und e_ℓ durch Betrachten von Idempotenten in den Iwahori-Hecke-Algebren über den zwei Bewertungsringen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$.

Außerdem enthält Kapitel VII eine weitere Umformulierung mittels Gram-Matrizen. Für diese Umformulierung wählt man eine bestimmte $\mathbb{Z}$ -Linearkombination $\tilde{\psi}$ irreduzibler Charaktere von $\mathcal{H}$, die die Eigenschaft hat, dass sie nach Spezialisierung eine nicht-ausgeartete Spurform auf der Algebra $\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}/\text{rad}(\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H})$ induziert. Betrachtet man nun die Gram-Matrix M von $\tilde{\psi}$ bezüglich einer beliebigen $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -Basis von $\mathcal{H}$, so ist die James-Geck-Vermutung äquivalent zu der Aussage, dass für $\ell > n$ der Rang von M nach Spezialisierung zu $\mathbb{Q}(\zeta_e)$ und zu $\mathbb{F}_\ell$ gleich ist.

Nach Kenntnis des Autors sind alle drei Umformulierungen neu.

Im Hinblick auf einen möglichen Beweis von James' Vermutung sehen Formulierungen, die Idempotenten in nicht-halbeinfachen Algebren involvieren, nicht gerade erfolgversprechend aus. Während es nämlich für halbeinfache Algebren mit Hilfe der Frobenius-Schur-Relationen eine gut bekannte Methode gibt, aus einfachen Matrixdarstellungen primitive Idempotenten zu gewinnen (siehe z.B. [GP00, 7.2.7]), ist es im Allgemeinen für nicht-halbeinfache Algebren schwierig, explizite Formeln für primitive Idempotenten anzugeben.

In Kapitel IV werden die Ergebnisse in [GP00, 7.2.7] auf den Fall symmetrischer Algebren, die nicht halbeinfach sind, verallgemeinert. Statt mit einem einfachen Modul startet man mit einem projektiv unzerlegbaren Modul mit einer besonderen Basis. Diese Basis muss nämlich an die Radikalreihe des Moduls angepasst sein. Man erhält eine Verallgemeinerung der Frobenius-Schur-Relationen, die eine explizite Konstruktion von primitiven Idempotenten ermöglichen, bei der die Nenner der Koordinaten der Idempotenten in einer bestimmten Basis der Algebra kontrolliert werden können. Nach Kenntnis des Autors ist dies die erste explizite Konstruktion von primitiven Idempotenten für nicht-halbeinfache, symmetrischen Algebren.

Im Hinblick auf die Umformulierungen der James-Geck-Vermutung in Kapitel VII bedeuten diese Ergebnisse, dass ein möglicher Beweisansatz die Konstruktion ganzzahliger Formen projektiv unzerlegbarer Moduln mit einer an die Radikalreihe angepassten Basis wäre. Auch dies ist aber im Allgemeinen nicht explizit möglich.

Iwahori-Hecke-Algebren haben aber eine besondere Basis. Im Jahr 1979 konstruierten nämlich David Kazhdan und George Lusztig in [KL79] die nach ihnen benannte Kazhdan-Lusztig-Basis. Diese Basis hat einige phantastische Eigenschaften. Insbesondere erlaubt sie die Definition von aufsteigenden Ketten von Idealen in $\mathcal{H}$, und die daraus resultierenden Quotienten liefern ganzzahlige Formen einfacher Moduln für die generische Algebra $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v^{1/2})}(v)$ über dem Funktionenkörper $\mathbb{Q}(v^{1/2})$ in einer Unbestimmten $v^{1/2}$ (für diese Konstruktionen werden die Quadratwurzeln des Parameters v der Algebra benötigt). Diese Moduln heißen „Zellmoduln“, da bei ihrer Konstruktion die symmetrische Gruppe in sogenannte „Zellen“ partitioniert wird. Weil diese Moduln ganzzahlig, also bereits über dem Ring $\mathbb{Z}[v^{1/2}, v^{-1/2}]$ definiert sind, kann man sie spezialisieren und Moduln für die spezialisierten Algebren $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\zeta_{2e})}(\zeta_e)$ und $\mathcal{H}_{\mathbb{F}_\ell(u^{1/2})}(u)$ erhalten.

Im ersten Teil von Kapitel VI sind neben den grundlegenden Definitionen von Iwahori-Hecke-Algebren diese Resultate aus der Kazhdan-Lusztig-Theorie dargestellt. Ganz am Ende des Kapitels ist eine Beobachtung beschrieben, nämlich, dass sich unter den spezialisierten Zellmoduln tatsächlich projektive Moduln finden lassen. Obwohl nicht alle Isomorphietypen projektiv unzerlegbarer Moduln auftauchen, sieht es so aus, als ob sich unter den Zellmoduln genügend „kleine“ projektive Moduln finden lassen, um die für die Formeln in Kapitel IV benötigten Moduln zu liefern. Die angepasste Basis ist in Form der Kazhdan-Lusztig-Basis der Zellmoduln bereits vorhanden.

Leider ist es im Rahmen dieser Arbeit nicht gelungen, die beobachteten projektiven Moduln hinreichend zu erklären bzw. zu beweisen, dass genügend viele projektive Moduln auftreten. In Abschnitt VI.6 ist zwar der Satz bewiesen, dass der induzierte Modul eines Zellmoduls einer parabolischen Unter algebra wieder ein Zellmodul ist, dies erklärt die beobachteten projektiven aber nur zum Teil.

Kapitel VI enthält noch ein anderes interessantes Resultat, das womöglich einen Ansatz zum Beweis von James' Vermutung liefern könnte. In Abschnitt VI.4 wird nämlich bewiesen, dass man aus der

Kazhdan-Lusztig-Basis und ihrer dualen explizit eine Wedderburn-Zerlegung von $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v^{1/2})}(v)$ konstruieren kann. Da die Kenntnis der Wedderburn-Zerlegung einer halbeinfachen Algebra äquivalent mit der Konstruktion aller einfachen Moduln ist und deswegen im Allgemeinen eben nicht ohne Mühe explizit erhalten werden kann, unterstreicht dieses Ergebnis die Besonderheit der Kazhdan-Lusztig-Basis einmal mehr. In den Beweis dieser Konstruktion gehen extrem tiefliegende Positivitätsresultate über die berühmten Kazhdan-Lusztig-Polynome ein. Außerdem wird mehrfach verwendet, dass die zugrunde liegende Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A ist.

Schließlich wird in Abschnitt VI.5 noch eine Verbindung zu Lusztig's asymptotischer Algebra $\mathcal{J}$ und dem Lusztig-Homomorphismus $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}$ hergestellt. Diese wurden von George Lusztig in einer Reihe von Arbeiten in den Jahren 1985 bis 1987 konstruiert (siehe [Lus85], [Lus87a], [Lus87b] und [Lus87c]) und später mehrfach mit großem Erfolg benutzt. Die asymptotische Algebra $\mathcal{J}$ hat eine ausgezeichnete Basis und in Abschnitt VI.5 werden explizit Urbilder dieser Basiselemente unter dem Lusztig-Homomorphismus angegeben. Diese Urbilder sind bis auf eine Ringinvolution genau die Basiselemente, die in der in VI.4 konstruierten Wedderburn-Zerlegung vorkommen. Dadurch lässt sich der Lusztig-Homomorphismus als Einbettung der Algebra $\mathcal{H}$ in das $\mathbb{Z}[v^{1/2}, v^{-1/2}]$ -Erzeugnis der in VI.4 konstruierten Wedderburn-Basis interpretieren. Nach Kenntnis des Autors sind die Resultate über die Wedderburn-Zerlegung und die Induktion von Zellmoduln neu.

In Kapitel I sind elementare Bezeichnungen und einige bekannte Ergebnisse zur Verwendung in den hinteren Kapiteln zusammengefasst.

Im Anhang sind Ergänzungen zum Haupttext gesammelt. Dies sind zum Einen Ergebnisse, die zwar als solche interessant, aber für den weiteren Verlauf der Arbeit nicht relevant sind. Zum Anderen sind hier der Vollständigkeit halber auch Beweise aufgenommen worden, die aus irgendeinem Grund im Haupttext entbehrlich sind.

Der Autor hegt die Hoffnung, dass diese Arbeit einen Beitrag leistet, Ansätze für einen Beweis von James' Vermutung zu finden.

Bemerkungen zum Text

Kapitel I ist von grundlegender Natur und enthält keine neuen Ergebnisse. Die Kapitel II bis VI sind weitgehend unabhängig und bereiten Kapitel VII vor.

Der Text aller Kapitel außer Kapitel VII ist so geschrieben, dass es möglich ist, an einer beliebigen Stelle anzufangen zu lesen. Dies wird dadurch erreicht, dass in jedem Unterabschnitt alle vorkommenden Symbole erklärt sind oder zumindest Informationen angegeben sind, die den Leser zu den entsprechenden Definitionen führen.

Dies ist in Kapitel VII anders. Dieses Kapitel ist so aufgebaut, dass alle einmal eingeführten Bezeichnungen ihre Gültigkeit ohne weiteren Kommentar behalten.

Auf den Seiten 136 bis 139 ist der Bezeichnungsindex zu finden, in dem alle vorkommenden Symbole zusammen mit Referenzen zu ihrer Definition aufgeführt ist. Ganz am Ende dieser Arbeit befindet sich der Index. Darin sind für die meisten Worte nicht alle Stellen verzeichnet, an denen ein Wort vorkommt. Vielmehr wurde versucht, nur auf die entscheidende Stelle zu verweisen, in den meisten Fällen ist dies die Definition.

Nach jedem Eintrag im Literaturverzeichnis folgt eine Liste der Abschnitte, in denen auf den Eintrag verwiesen wurde.

In der PDF-Version (Portable Document Format) dieser Arbeit sind alle Verweise Hyperlinks, so dass man ihnen durch Mausklick folgen kann. Die endgültige Version dieses Dokuments kann über das folgende URL heruntergeladen werden:

<http://www.math.rwth-aachen.de/~Max.Neunhoeffer/phd/>

Dort sind auch Korrekturen zu finden, wenn diese notwendig werden.

Kapitel I

Bezeichnungen und Grundlagen

Dieses Kapitel dient zwei Zwecken: Zum Einen werden die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen und Konventionen eingeführt. Zum Anderen werden aber auch einige Hilfsergebnisse vorgestellt, auf die dann im Rest der Arbeit verwiesen werden kann.

I.1 Moduln und Bimoduln

(1.1) Konventionen für Ringe, Moduln und Homomorphismen

Alle vorkommenden Moduln sind — wenn nicht explizit anders erwähnt — Rechts-Moduln. Alle Ringe haben eine 1, sollte doch einmal ein Ring ohne 1 vorkommen, wird er „Rng“ genannt. Moduln über kommutativen Ringen werden wie Bimoduln behandelt mit derselben Operation von links und von rechts.

Ist $\mathcal{H}$ ein Ring, so bezeichnet $\text{mod-}\mathcal{H}$ die Kategorie der endlich erzeugten (Rechts-) $\mathcal{H}$ -Moduln und $\text{proj-}\mathcal{H}$ die volle Unterkategorie von $\text{mod-}\mathcal{H}$ der endlich erzeugten, projektiven (Rechts-) $\mathcal{H}$ -Moduln. Die Menge der Homomorphismen zwischen zwei Moduln $M, N \in \text{mod-}\mathcal{H}$ wird mit $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N)$ bezeichnet. Homomorphismen werden von links geschrieben und mit $\circ$ verkettet.

Ist M ein $\mathcal{H}$ -Modul, dann bezeichnen wir mit $\text{rad } M$ das Jacobson-Radikal von M , also den Durchschnitt aller maximalen Untermoduln (wenn M keine maximalen Untermoduln hat, ist $\text{rad } M = M$). Der „Kopf“ von M ist der Radikalfaktor $M/\text{rad } M$.

Mit „Integritätsbereich“ meinen wir einen kommutativen, nullteilerfreien Ring (mit Eins und $0 \neq 1$).

(1.2) Lemma (Fünfer-Lemma, vgl. [Lan75, I.3.3])

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring und

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{j} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{j'} & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen in der Kategorie der $\mathcal{H}$ -Moduln. Dann gilt:

- (i) Sind β und δ **injektiv** und ist α **surjektiv**, dann ist γ **injektiv**.
- (ii) Sind β und δ **surjektiv** und ist ε **injektiv**, dann ist γ **surjektiv**.
- (iii) Sind α, β, δ und ε **bijektiv**, so ist auch γ **bijektiv**.

Beweis: Wir veranstalten eine Diagrammjagd (und lassen $\circ$ für Verkettung in diesem Beweis weg):

Es seien β und δ injektiv und α surjektiv. Sei $c \in C$ mit $\gamma c = 0$. Dann ist $h'\gamma c = \delta hc = 0$, also auch $hc = 0$. Deswegen gibt es ein $b \in B$ mit $c = gb$. Also ist $0 = \gamma gb = g'\beta b$ und es gibt ein $a \in A$ mit $f'\alpha a = \beta fa = \beta b$. Dann ist aber $fa = b$, da beide unter β auf βb gehen. Also ist $c = gb = gfa = 0$.

Es seien β und δ surjektiv und ε injektiv. Sei $c' \in C'$ beliebig. Dann gibt es ein $d \in D$ mit $\delta d = h'c'$. Da $0 = j'h'c' = j'\delta d = \varepsilon jd$ und damit $jd = 0$ ist, gibt es ein $c \in C$ mit $hc = d$. Nun ist $h'(c' - \gamma c) = \delta d - \delta hc = 0$, also gibt es ein $b \in B$ mit $g'\beta b = c' - \gamma c$. Dann ist aber $c + gb$ ein Urbild von c' unter γ , denn $\gamma(c + gb) = \gamma c + g'\beta b = c'$.

Behauptung (iii) folgt aus (i) und (ii). $\square$

(1.3) Lemma (Freiheit von Tensorprodukten)

Es seien A und B Ringe. Weiter sei M_A ein A -Modul und ${}_A N_B$ ein A - B -Bimodul. Ist M_A frei als A -Modul und ${}_A N_B$ frei als B -Modul, dann ist $M_A \otimes_A N_B$ ein freier B -Modul.

Beweis: Ist M_A ein freier A -Modul, so ist M_A isomorph zu einer direkten Summe von Kopien des rechts-regulären Moduls: $M_A \cong \coprod_{i \in I} A_A$ mit einer Indexmenge I . Da das Tensorprodukt von Moduln mit direkten Summen vertauscht (siehe z.B. [CR81, (2.17)]), ist

$$M_A \otimes_A N_B \cong \left(\coprod_{i \in I} A_A \right) \otimes_A N_B \cong \coprod_{i \in I} (A_A \otimes_A N_B) \cong \coprod_{i \in I} {}_A N_B \quad \text{als } B\text{-Moduln.}$$

Letztere Isomorphie kommt vom natürlichen Isomorphismus von Links- A -Moduln ${}_A A_A \otimes_A N \cong {}_A N$. Ist aber ${}_A N_B$ frei als B -Modul, dann ist ${}_A N_B \cong \coprod_{j \in J} B_B$ als B -Moduln mit einer Indexmenge J . Dann ist aber

$$M_A \otimes_A N_B \cong \coprod_{i \in I} \coprod_{j \in J} B_B$$

als B -Moduln, was die Behauptung beweist. $\square$

(1.4) Lemma (Projektivität von Tensorprodukten)

Es seien A und B Ringe. Weiter sei M_A ein A -Modul und ${}_A N_B$ ein A - B -Bimodul. Ist M_A projektiv als A -Modul und ${}_A N_B$ projektiv als B -Modul, dann ist $M_A \otimes_A N_B$ ein projektiver B -Modul.

Beweis: Da ${}_A N_B$ als B -Modul projektiv ist, gibt es einen B -Modul N'_B , so dass ${}_A N_B \oplus N'_B$ als B -Modul frei ist. Weil M_A ein projektiver A -Modul ist, gibt es einen A -Modul M'_A , so dass $M_A \oplus M'_A$ frei ist. Es ist

$$(M_A \otimes_A N_B) \oplus (M'_A \otimes_A N_B) \cong (M_A \oplus M'_A) \otimes_A N_B.$$

Wie im Beweis von Lemma I.(1.3) folgt, dass dieser Modul eine direkte Summe von Kopien von ${}_A N_B$ ist. Addiert man für jeden Summanden eine Kopie von N'_B , so erhält man einen freien B -Modul. Also ist $M_A \otimes_A N_B$ als B -Modul direkter Summand eines freien Moduls und damit projektiv. $\square$

(1.5) Definition (Endlich präsentierter Modul)

Es sei A ein Ring und M ein A -Modul. Eine exakte Sequenz

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

von A -Moduln heißt **Präsentation** von M , wenn F_0 und F_1 **freie** A -Moduln sind. Besitzt M eine Präsentation mit freien Moduln F_0 und F_1 **von endlichem Rang**, dann heißt M **endlich präsentiert**.

Bemerkung: Jeder Modul besitzt eine Präsentation, da jeder Modul Quotient eines freien ist.

I.2 Algebren

Der Begriff der Algebra ist grundlegend für den Rest der Arbeit.

(2.1) Definition ($\mathcal{O}$ -Algebra, vgl. [CR81, (1.1)])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring. Eine $\mathcal{O}$ -Algebra $\mathcal{H}$ ist ein Ring zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\psi : \mathcal{O} \rightarrow Z(\mathcal{H})$ von $\mathcal{O}$ ins Zentrum von $\mathcal{H}$.

(2.2) Definition (Idempotent)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring. Ein **Idempotent** in $\mathcal{H}$ ist ein Element $0 \neq e \in \mathcal{H}$, für das $e^2 = e$ gilt. Wir nennen zwei Idempotente $e_1, e_2 \in \mathcal{H}$ **orthogonal**, wenn $e_1 \cdot e_2 = 0 = e_2 \cdot e_1$ gilt. Ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ heißt **primitiv**, wenn es in $\mathcal{H}$ nicht als Summe zweier orthogonaler Idempotente geschrieben werden kann.

(2.3) Bemerkung (Modulstruktur über dem Grundring)

Ist $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring und $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Algebra, dann ist jeder $\mathcal{H}$ -Modul automatisch auch ein $\mathcal{O}$ -Modul. Ist nämlich $\psi : \mathcal{O} \rightarrow Z(\mathcal{H})$ der Ringhomomorphismus, der $\mathcal{H}$ zur $\mathcal{O}$ -Algebra macht, dann operiert ein Element $o \in \mathcal{O}$ durch $h \cdot o := h \cdot \psi(o)$ auf $h \in \mathcal{H}$.

(2.4) Definition ($\mathcal{O}$ -Ordnung, vgl. [CR81, (23.1)])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring. Eine **$\mathcal{O}$ -Ordnung** ist eine $\mathcal{O}$ -Algebra, die als $\mathcal{O}$ -Modul endlich erzeugt und frei ist.

(2.5) Definition ($\mathcal{O}$ -Gitter, vgl. [CR81, §10D])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring. Ein **$\mathcal{O}$ -Gitter** ist ein endlich erzeugter, $\mathcal{O}$ -freier $\mathcal{O}$ -Modul.

(2.6) Definition ($\mathcal{H}$ -Gitter, vgl. [CR81, (23.2)])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring und $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung. Ein **$\mathcal{H}$ -Gitter** ist ein $\mathcal{H}$ -Modul, der als $\mathcal{O}$ -Modul endlich erzeugt und frei ist.

(2.7) Lemma (Homomorphismen aus projektiven Moduln heraus)

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring, $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Algebra, $e \in \mathcal{H}$ ein Idempotent und M ein $\mathcal{H}$ -Modul. Dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(e\mathcal{H}, M) \cong Me$ als $\mathcal{O}$ -Moduln. Ist $M = e\mathcal{H}$, dann ist $\text{End}_{\mathcal{H}}(e\mathcal{H}) \cong e\mathcal{H}e$ als $\mathcal{O}$ -Algebren.

Beweis: Ein Homomorphismus $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(e\mathcal{H}, M)$ ist durch den Wert, den er auf e annimmt, bestimmt:

$$\varphi(eh) = \varphi(e)h \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}.$$

Für jeden solchen Wert $\varphi(e)$ gilt aber:

$$\varphi(e) = \varphi(e^2) = \varphi(e)e \in Me.$$

Umgekehrt definiert aber jedes beliebige Element $m \in Me$ wegen $m = me$ einen Homomorphismus $\varphi_m \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(e\mathcal{H}, M)$ durch:

$$\varphi_m(eh) := mh \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}.$$

Dies ist wohldefiniert, da für $eh = eh'$ auch $mh = meh = meh' = mh'$ gilt. Außerdem ist φ_m ein $\mathcal{H}$ -Homomorphismus:

$$\varphi_m(ehh') = mhh' = \varphi_m(eh)h' \quad \text{für alle } h, h' \in \mathcal{H}.$$

Die Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi(e)$ ist offensichtlich $\mathcal{O}$ -linear, damit ist die erste Behauptung bewiesen. Ist $M = e\mathcal{H}$, dann ist der obige Isomorphismus sogar mit der Multiplikation verträglich:

$$(\psi \circ \varphi)(e) = \psi(\varphi(e)) = \psi(e) \cdot \varphi(e).$$

□

I.3 Wechsel des Grundrings

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie man den Grundring einer Algebra und ihrer Moduln verändern kann. Dies kann eine Ringerweiterung (oder Körpererweiterung) sein, aber auch eine Restklassenbildung oder allgemeiner ein beliebiger Homomorphismus zwischen Ringen. Im so genannten „Change of Rings“-Lemma geht es um die Folgen für Homomorphismenmengen bei Veränderung des Grundrings.

(3.1) Definition/Proposition (Wechsel des Grundrings)

Es seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ kommutative Ringe, $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Algebra und $\mathcal{H}'$ gleichzeitig eine $\mathcal{O}$ -Algebra und eine $\mathcal{O}'$ -Algebra (siehe I.(2.1)). Dann ist auch $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ gleichzeitig eine $\mathcal{O}'$ -Algebra und eine $\mathcal{O}$ -Algebra mit der Multiplikation, die durch $(h' \otimes h) \cdot (k' \otimes k) := h'k' \otimes hk$ und lineare Fortsetzung gegeben ist.

Beweis: Wir können $\mathcal{H}'$ als $\mathcal{O}'$ - $\mathcal{O}$ -Bimodul auffassen und $\mathcal{H}$ als Links- $\mathcal{O}$ -Modul. Dann ist das Tensorprodukt ein Links- $\mathcal{O}'$ -Modul. Die Linksmultiplikation mit einem beliebigen Element $h \in \mathcal{H}$ ist ein $\mathcal{O}$ -Endomorphismus von $\mathcal{H}$. Die Linksmultiplikation mit einem beliebigen Element $h' \in \mathcal{H}'$ ist ein Endomorphismus von $\mathcal{H}'$, sowohl als $\mathcal{O}$ -Modul als auch als Links- $\mathcal{O}'$ -Modul aufgefasst. Deswegen gibt es für jedes Paar $(h', h) \in \mathcal{H}' \times \mathcal{H}$ einen $\mathcal{O}'$ -Endomorphismus von $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$, der durch $(g' \otimes g) \mapsto (h'g' \otimes hg)$ für $g \in \mathcal{H}$ und $g' \in \mathcal{H}'$ gegeben ist. Durch lineare Fortsetzung ist damit eine Multiplikation definiert. Wir müssen noch zeigen, dass für diese die Ringaxiome erfüllt sind: Die Assoziativität vererbt sich sofort von $\mathcal{H}'$ und $\mathcal{H}$, das Element $1_{\mathcal{H}'} \otimes 1_{\mathcal{H}}$ ist das neutrale Element. Die Distributivgesetze folgen ebenfalls direkt aus der Definition bzw. aus den entsprechenden in $\mathcal{H}'$ und $\mathcal{H}$. Das Tensorprodukt ist eine $\mathcal{O}'$ -Algebra (bzw. $\mathcal{O}$ -Algebra), da man den Homomorphismus von $\mathcal{O}'$ (bzw. $\mathcal{O}$) ins Zentrum von $\mathcal{H}'$, der $\mathcal{H}'$ zur $\mathcal{O}'$ -Algebra (bzw. $\mathcal{O}$ -Algebra) macht, einfach mit dem Ringhomomorphismus von $\mathcal{H}'$ nach $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$, der h' auf $h' \otimes 1_{\mathcal{H}}$ abbildet, verketteten kann. $\square$

(3.2) Bemerkung (Konstantenreduktion und Konstantenerweiterung)

Proposition I.(3.1) lässt sich insbesondere in der folgenden Situationen anwenden: Es sei $\mathcal{H}$ eine Algebra über einem Ring $\mathcal{O}$ und $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist $\mathcal{O}'$ vermöge φ eine $\mathcal{O}$ -Algebra und $\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ eine Algebra über dem Ring $\mathcal{O}'$. Wir nennen dies **Konstantenreduktion** und schreiben kurz $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ für $\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$.

Häufig ist zum Beispiel $\mathcal{O}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow k$ die kanonische Projektion auf den Restklassenkörper $k := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$.

Ist φ injektiv, dann nennen wir $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ auch **Konstantenerweiterung**.

(3.3) Definition/Proposition (Wechsel des Grundrings für Moduln)

Es seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ wie in I.(3.1) kommutative Ringe, $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Algebra und $\mathcal{H}'$ gleichzeitig eine $\mathcal{O}$ -Algebra und eine $\mathcal{O}'$ -Algebra. Weiter sei M ein $\mathcal{H}$ -Modul. Dann ist $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} M$ ein $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ -Modul durch die Operation $(h' \otimes m) \cdot (g' \otimes g) := h'g' \otimes mg$ für $h' \in \mathcal{H}'$, $m \in M$, $g' \in \mathcal{H}'$ und $g \in \mathcal{H}$.

Beweis: Da M ein $\mathcal{H}$ -Modul und damit auch ein $\mathcal{O}$ -Modul ist und $\mathcal{O}$ kommutativ ist, können wir M als Links- $\mathcal{O}$ -Modul auffassen und das Tensorprodukt $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} M$ bilden. Die $\mathcal{H}$ -Operation auf M kann durch einen Antihomomorphismus von Ringen $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}}(M)$ beschrieben werden (man beachte, dass M ein Rechts- $\mathcal{H}$ -Modul ist und wir Endomorphismen von links schreiben).

Die Abbildung $r : \mathcal{H}' \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{H}')$, die einem Element $g' \in \mathcal{H}'$ die Rechtsmultiplikation $r(g')$ mit g' zuordnet, ist ein Antihomomorphismus von $\mathcal{H}'$ nach $\text{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{H}')$.

Verkettet man $r \otimes \varphi : \mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{H}') \otimes_{\mathcal{O}} \text{End}_{\mathcal{O}}(M)$ mit dem kanonischen Homomorphismus $\text{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{H}') \otimes_{\mathcal{O}} \text{End}_{\mathcal{O}}(M) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} M)$, erhält man eine Rechtsoperation von $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} M$. Diese ist genau durch die Formel aus der Proposition gegeben. $\square$

(3.4) Bemerkung (Konstantenreduktion und Konstantenerweiterung für Moduln)

Wie in Bemerkung I.(3.2) lässt sich Proposition I.(3.3) auch in der folgenden Situation anwenden: Ist $\mathcal{H}$ eine Algebra über einem kommutativen Ring $\mathcal{O}$ und $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ ein Ringhomomorphismus,

dann ist für einen $\mathcal{H}$ -Modul M die **Konstantereduktion** $\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} M$ ein $\mathcal{O}'\mathcal{H} = \mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ -Modul. Wir schreiben auch kurz $\mathcal{O}'M$ für $\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} M$.

Wieder wird sehr häufig $\mathcal{O}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ sein und $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow k$ die kanonische Projektion auf den Restklassenkörper $k := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$.

Ist φ **injektiv**, dann nennen wir $\mathcal{O}'M$ auch **Konstantenerweiterung**.

(3.5) Lemma (Wechsel des Grundrings bei freien und projektiven Moduln)

Es seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ kommutative Ringe, $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Algebra und $\mathcal{H}'$ sowohl eine $\mathcal{O}$ - als auch eine $\mathcal{O}'$ -Algebra. Ist F ein **freier** $\mathcal{H}$ -Modul, dann ist $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} F$ ein **freier** $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ -Modul. Ist P ein **projektiver** $\mathcal{H}$ -Modul, dann ist auch $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} P$ als $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ -Modul **projektiv**.

Beweis: Ist F frei, dann ist F als $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zur direkten Summe $\coprod_{i \in I} \mathcal{H}$ mit einer Indexmenge I . Dann ist aber $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} F \cong \coprod_{i \in I} (\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H})$, also ein freier $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ -Modul. Ist P projektiv, dann gibt es einen $\mathcal{H}$ -Modul P' , so dass $P \oplus P'$ frei ist. Dann ist aber $(\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} P) \oplus (\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} P') \cong \mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} (P \oplus P')$ ein freier $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ -Modul, also ist $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} P$ projektiv. $\square$

(3.6) Lemma (Change of Rings, vgl. [CR81, (2.38)])

Es seien $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring, $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Algebren über $\mathcal{O}$ und M und N Rechts- $\mathcal{H}$ -Moduln. Dann ist die folgende Abbildung ein Homomorphismus von $\mathcal{O}$ -Moduln:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}}(\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} M, \mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} N), \\ h' \otimes f & \longmapsto & l(h') \otimes f \end{array}$$

wobei $l(h')$ die Linksmultiplikation mit h' auf $\mathcal{H}'$ ist. Beide Seiten haben eine $\mathcal{H}'$ - $\mathcal{H}'$ -Bimodulstruktur, die von derjenigen von $\mathcal{H}'$ kommt. Die Abbildung α respektiert diese, ist also ein $\mathcal{H}'$ - $\mathcal{H}'$ -Bimodulhomomorphismus.

Ist $\mathcal{H}'$ als $\mathcal{O}$ -Modul **flach**, dann gilt:

- (i) Ist M als $\mathcal{H}$ -Modul **endlich erzeugt**, dann ist α **injektiv**.
- (ii) Ist M als $\mathcal{H}$ -Modul **endlich präsentiert**, dann ist α **bijektiv**.
- (iii) Ist M als $\mathcal{H}$ -Modul **endlich erzeugt** und ist $\mathcal{H}'$ als $\mathcal{O}$ -Modul **frei**, dann ist α **bijektiv**.

Beweis: Alle Tensorprodukte seien über dem Ring $\mathcal{O}$. Zunächst ist zu prüfen, ob für beliebige $h' \in \mathcal{H}'$ und $f \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N)$ die Abbildung $l(h') \otimes f$ von $\mathcal{H}' \otimes M$ nach $\mathcal{H}' \otimes N$ ein Homomorphismus von $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}$ -Moduln ist: Es ist aber

$$((l(h') \otimes f)(g' \otimes m)) \cdot (x' \otimes x) = h'g'x' \otimes f(m)x = (l(h') \otimes f)((g' \otimes m) \cdot (x' \otimes x))$$

für alle $h' \in \mathcal{H}'$, $g' \in \mathcal{H}'$, $x' \in \mathcal{H}'$, $m \in M$, $x \in \mathcal{H}$ und $f \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N)$. Da $(h', f) \mapsto l(h') \otimes f$ bilinear ist, ist α mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes wohldefiniert, zunächst als Homomorphismus zwischen $\mathcal{O}$ -Moduln.

Die Menge $\mathcal{H}' \otimes \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N)$ wird durch $h' \cdot (g' \otimes f) \cdot h'' := h'g'h'' \otimes f$ für $g', h', h'' \in \mathcal{H}'$ und $f \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N)$ zu einem $\mathcal{H}'$ - $\mathcal{H}'$ -Bimodul. Außerdem ist $\text{Hom}_{\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}}(\mathcal{H}' \otimes M, \mathcal{H}' \otimes N)$ ein $\mathcal{H}'$ - $\mathcal{H}'$ -Bimodul — die Linksoperation kommt von der Links- $\mathcal{H}'$ -Operation im Bildbereich und die Rechtsoperation von der Links- $\mathcal{H}'$ -Operation im Urbildbereich. Man rechnet leicht nach, dass α sogar ein Homomorphismus von $\mathcal{H}'$ - $\mathcal{H}'$ -Bimoduln ist.

Von nun an sei $\mathcal{H}'$ als $\mathcal{O}$ -Modul **flach**. Wir betrachten eine Präsentation (vgl. I.(1.5)) von M :

$$F_1 \xrightarrow{\mu} F_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Dann sind

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}_{\mathcal{H}}(F_0, N) \xrightarrow{\mu^*} \text{Hom}_{\mathcal{H}}(F_1, N)$$

und damit

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}' \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N) \xrightarrow{1 \otimes \pi^*} \mathcal{H}' \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(F_0, N) \xrightarrow{1 \otimes \mu^*} \mathcal{H}' \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(F_1, N)$$

exakte Sequenzen von $\mathcal{O}$ -Moduln, da $\mathcal{H}'$ flach ist.

Andererseits ist

$$\mathcal{H}' \otimes F_1 \xrightarrow{1 \otimes \mu} \mathcal{H}' \otimes F_0 \xrightarrow{1 \otimes \pi} \mathcal{H}' \otimes M \longrightarrow 0$$

wegen der Flachheit von $\mathcal{H}'$ exakt. Also ist auch

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{H}' \otimes M, \mathcal{H}' \otimes N) \xrightarrow{(1 \otimes \pi)^*} \operatorname{Hom}(\mathcal{H}' \otimes F_0, \mathcal{H}' \otimes N) \xrightarrow{(1 \otimes \mu)^*} \operatorname{Hom}(\mathcal{H}' \otimes F_1, \mathcal{H}' \otimes N)$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}$ -Moduln (Homomorphismenmengen jeweils über $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}$).

Man kann nun nachrechnen, dass man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen erhält:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}' \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N) & \xrightarrow{1 \otimes \pi^*} & \mathcal{H}' \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(F_0, N) & \xrightarrow{1 \otimes \mu^*} & \mathcal{H}' \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(F_1, N) \\ & & \downarrow \alpha & \circlearrowleft & \downarrow \alpha' & \circlearrowleft & \downarrow \alpha'' \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(\mathcal{H}' \otimes M, \mathcal{H}' \otimes N) & \xrightarrow{(1 \otimes \pi)^*} & \operatorname{Hom}(\mathcal{H}' \otimes F_0, \mathcal{H}' \otimes N) & \xrightarrow{(1 \otimes \mu)^*} & \operatorname{Hom}(\mathcal{H}' \otimes F_1, \mathcal{H}' \otimes N). \end{array}$$

Man erhält die Abbildungen α' und α'' analog zu α , indem man M durch F_0 bzw. F_1 ersetzt. Die Kommutativität des Diagramms kommt daher, dass α natürlich in M ist.

Ist nun M **endlich erzeugt**, dann können wir $F_0 = \coprod_{i \in I} \mathcal{H}_{\mathcal{H}}$ mit I endlich annehmen. Es ist aber

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}\left(\coprod_{i \in I} \mathcal{H}_{\mathcal{H}}, N\right) \cong \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{\mathcal{H}}, N) \cong \prod_{i \in I} N \quad (1.1)$$

als $\mathcal{O}$ -Moduln (siehe Definition des Koproducts [Jac89, Definition 1.5]) und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}\left(\coprod_{i \in I} \mathcal{H}_{\mathcal{H}}, N\right) &\cong \prod_{i \in I} (\mathcal{H}' \otimes N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}}\left(\coprod_{i \in I} (\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H})_{\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}}, \mathcal{H}' \otimes N\right) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}}(\mathcal{H}' \otimes F_0, \mathcal{H}' \otimes N), \end{aligned}$$

weil für endliche Indexmengen direkte Summe und direktes Produkt isomorph sind und weil das Tensorprodukt mit direkten Summen vertauscht (siehe z.B. [CR81, (2.17)]). Hier haben wir die Rechnung in Gleichung 1.1 nochmal in umgekehrter Richtung über $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}$ benutzt. Die Abbildung α' vermittelt genau diesen Isomorphismus. Also folgt mit dem Fünfer-Lemma (siehe 1.(1.2)), dass α **injektiv** ist. Damit ist (i) bewiesen.

Ist M **endlich präsentiert**, dann kann man zusätzlich annehmen, dass $F_1 = \coprod_{j \in J} \mathcal{H}_{\mathcal{H}}$ mit einem endlichen J ist und erhält ebenso, dass α'' ein Isomorphismus ist. Also folgt wieder mit dem Fünfer-Lemma, dass α **bijektiv** ist. Damit ist (ii) bewiesen.

(Ist M nicht endlich präsentiert, dann ist $F_1 = \coprod_{j \in J} \mathcal{H}_{\mathcal{H}}$ mit einer unendlichen Indexmenge J . Nun ist aber $\mathcal{H}' \otimes \prod_{j \in J} N$ nicht mehr isomorph zu $\prod_{j \in J} (\mathcal{H}' \otimes N)$, weil das Tensorprodukt im Allgemeinen nicht mit direkten Produkten vertauscht.)

Ist $\mathcal{H}'$ **als $\mathcal{O}$ -Modul frei**, dann ist die kanonische Abbildung $\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \left(\prod_{j \in J} N\right) \rightarrow \prod_{j \in J} (\mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} N)$ nach [Bou70, II.3.7, Corollary 3] **injektiv**. Damit kann man wie oben das Fünfer-Lemma 1.(1.2) anwenden und erhält, dass α **bijektiv** ist, was (iii) beweist. $\square$

(3.7) Lemma (Wechsel des Grundrings und Idempotente)

Es seien $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring, $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Algebren über $\mathcal{O}$ und $e \in \mathcal{H}$ ein Idempotent. Weiter sei M ein beliebiger $\mathcal{H}$ -Modul. Dann gelten:

- (i) $1_{\mathcal{H}'} \otimes e \in \mathcal{H}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}$ ist ein Idempotent oder gleich 0.

$$(ii) \quad (1_{\mathcal{H}'} \otimes e)(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}) = \mathcal{H}' \otimes e\mathcal{H}.$$

$$(iii) \quad (\mathcal{H}' \otimes M)(1_{\mathcal{H}'} \otimes e) = \mathcal{H}' \otimes Me.$$

Beweis: Alle Tensorprodukte seien über $\mathcal{O}$. Die Aussage (i) ergibt sich direkt aus der Definition der Algebra $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}$. Da $1_{\mathcal{H}'} \otimes e$ in $\mathcal{H}' \otimes e\mathcal{H}$ liegt, ist „ $\subseteq$ “ in (ii) klar. Andererseits ist $\sum_{i=1}^n h'_i \otimes eh_i = (1_{\mathcal{H}'} \otimes e) \cdot \sum_{i=1}^n h'_i \otimes h_i$ für ein beliebiges Element $\sum_{i=1}^n h'_i \otimes eh_i \in \mathcal{H}' \otimes e\mathcal{H}$, woraus „ $\supseteq$ “ und damit (ii) folgt. Die analoge Rechnung $(\sum_{i=1}^n h'_i \otimes m_i)(1_{\mathcal{H}'} \otimes e) = \sum_{i=1}^n h'_i \otimes m_i e$ beweist (iii). $\square$

(3.8) Lemma (Wechsel des Grundrings bei projektiven Moduln)

Es seien $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring, $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Algebren über $\mathcal{O}$ und M ein Rechts- $\mathcal{H}$ -Modul. Weiter sei $e \in \mathcal{H}$ ein Idempotent. Dann gilt:

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}}(\mathcal{H}' \otimes e\mathcal{H}, \mathcal{H}' \otimes M) \cong \mathcal{H}' \otimes \text{Hom}_{\mathcal{H}}(e\mathcal{H}, M)$$

als $\mathcal{H}'$ - $\mathcal{O}$ -Bimoduln.

Beweis: Alle Tensorprodukte seien über $\mathcal{O}$.

Mit Hilfe von Lemma I.(3.7) folgt, dass $\mathcal{H}' \otimes e\mathcal{H} = (1_{\mathcal{H}'} \otimes e)(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H})$ ist. Daraus folgt mit Lemma I.(2.7), dass die linke Seite als $\mathcal{O}$ -Modul isomorph zu $(\mathcal{H}' \otimes M)(1_{\mathcal{H}'} \otimes e)$ und die rechte Seite als $\mathcal{O}$ -Modul isomorph zu $\mathcal{H}' \otimes Me$ ist. Diese beiden sind aber wieder nach Lemma I.(3.7) gleich.

Man rechnet leicht nach, dass alle Isomorphismen auch mit der Links- $\mathcal{H}'$ -Modulstruktur verträglich sind. $\square$

(3.9) Definition (absolut einfacher Modul, vgl. [CR81, (3.42)])

Es sei F ein Körper, $\mathcal{H}$ eine F -Algebra und V ein einfacher $\mathcal{H}$ -Modul. Dann heißt V **absolut einfach**, wenn für jeden Erweiterungskörper $F' \supset F$ die Konstantenerweiterung $F'V$ als $F'\mathcal{H}$ -Modul einfach ist.

(3.10) Theorem (Kriterium für „absolut einfach“, vgl. [CR81, (3.43)])

Es sei F ein Körper, $\mathcal{H}$ eine F -Algebra und V ein einfacher $\mathcal{H}$ -Modul. Dann ist V genau dann absolut einfach, wenn $\text{End}_{\mathcal{H}}(V) = F \cdot 1_V$ ist.

Beweis: Siehe [CR81, (3.43)]. $\square$

(3.11) Definition (Zerfällungskörper, vgl. [CR81, (7.12)])

Es sei F ein Körper, $\mathcal{H}$ eine F -Algebra und E ein Erweiterungskörper von F . Dann heißt E **Zerfällungskörper** für $\mathcal{H}$, wenn jeder einfache $E\mathcal{H}$ -Modul absolut einfach ist.

Kapitel II

Vollständigkeit und Heben von Idempotenten

In diesem Kapitel führen wir zunächst lineare Topologien ein. Dies sind Topologien auf Ringen bzw. Moduln, die mit der linearen Struktur zusammenpassen. Spezialfälle hiervon sind Topologien, die von Idealen herkommen und Topologien, die von Bewertungen kommen. Es wird gezeigt, wie sich diese Ideen auf nicht-kommutative Algebren, die frei über ihrem Grundring sind, übertragen lassen. Danach wird erklärt, wie Moduln bzw. Ringe, die mit einer linearen Topologie versehen sind, vervollständigt werden können. Hierbei geht entscheidend ein, dass eine lineare Topologie automatisch eine uniforme Struktur definiert.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit dem Heben von Idempotenten, es werden Voraussetzungen angegeben, unter denen dies geht. Danach wird der Begriff der Semiperfektheit eingeführt und erklärt, was dieser mit dem Heben von Idempotenten zu tun hat.

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen man auf die Vervollständigung verzichten kann. Es zeigt sich, dass dies geht, wenn der Grundring ein geeigneter Bewertungsring ist, da man die durch einen Grenzübergang in der Vervollständigung erhaltenen Idempotenten nachträglich durch eine Approximation wieder „verbessern“ kann, so dass man die Vervollständigung wieder los wird.

Der Begriff der Vollständigkeit wird wie in [Mat86, Kapitel 8] eingeführt, also insbesondere nicht durch die Standardkonstruktion mit Cauchy-Folgen und Nullfolgen. Dadurch ist es leichter möglich, die Topologie auf verschiedene Arten zu definieren und so verschiedene Konstruktionen „der“ Vervollständigung zu erhalten, die aber als topologische Moduln bzw. Ringe isomorph sind.

Letzteres wird wichtig, da die einschlägigen Ergebnisse zum Heben von Idempotenten immer von Topologien ausgehen, die durch ein zweiseitiges Ideal gegeben sind, während die Ergebnisse zum „Verbessern von Idempotenten“ besser mit einer anderen Konstruktion der Vervollständigung formuliert werden können.

II.1 Lineare Topologien und additive Bewertungen

In diesem Abschnitt werden lineare Topologien auf Moduln bzw. Ringen eingeführt. Die Ausführungen lehnen sich eng an [Mat86, Kapitel 8] an, wobei dort alle Ringe als kommutativ vorausgesetzt sind. Der Vollständigkeit halber sind in Anhang A ausführliche Beweise für alle Resultate aufgeführt, wenn diese in [Mat86] nur für kommutative Ringe stehen oder ganz fehlen.

(1.1) Definition (Lineare Topologie, vgl. [Mat86, Kapitel 8] bzw. A.(1.1))

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring, M ein $\mathcal{H}$ -Modul, Λ eine gerichtete Menge und $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein System von Untermoduln von M mit $M_\lambda \supseteq M_\mu$, wenn $\lambda \leq \mu$ ist. Die **lineare Topologie** auf M bezüglich $\{M_\lambda\}$ ist dadurch definiert, dass die Mengen $x + M_\lambda$ für $x \in M$ und $\lambda \in \Lambda$ eine Umgebungsbasis bilden.

Das bedeutet: Eine Teilmenge $X \subseteq M$ ist genau dann offen, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ ein $\lambda \in \Lambda$ existiert mit $x + M_\lambda \subseteq X$.

Der Spezialfall, dass $M = \mathcal{H}$ selbst ist und die M_λ Ideale sind, wird später eine Rolle spielen.

Bemerkung: Diese Definition steht in [Mat86, Kapitel 8] nur für kommutative Ringe $\mathcal{H}$. Sie funktioniert aber exakt genau so auch für nicht-kommutative Ringe. Der Vollständigkeit halber ist in Abschnitt A.(1.1) im Anhang ein Beweis aufgeführt, dass die Mengen $x + M_\lambda$ für $x \in M$ und $\lambda \in \Lambda$ die Axiome einer Umgebungsbasis einer Topologie erfüllen. $\square$

(1.2) Proposition (Eigenschaften von linearen Topologien, vgl. [Mat86, Kapitel 8] bzw. A.(1.2))

Es seien $\mathcal{H}$, M , Λ und $\{M_\lambda\}$ wie in II.(1.1). Dann sind die Addition in M , das Bilden von Negativen und die Operation jedes Elementes von $\mathcal{H}$ auf M bezüglich der linearen Topologie stetig. Ist $M = \mathcal{H}$ und sind die M_λ zweiseitige Ideale in $\mathcal{H}$, so ist auch die Multiplikation als Abbildung $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ stetig (Produkttopologie auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$).

Die lineare Topologie ist genau dann hausdorffsch, wenn $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{0\}$ ist.

Jede der Mengen $x + M_\lambda$ ist offen und abgeschlossen, so dass die Quotiententopologie auf jedem M/M_λ diskret ist.

Ist $N \subseteq M$ ein Teilmodul, dann ist die Teilraumtopologie gleich der linearen Topologie auf N , die durch das System $\{N \cap M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ gegeben ist. Die Quotiententopologie auf M/N ist gleich der linearen Topologie, die durch das System $\{(M_\lambda + N)/N \mid \lambda \in \Lambda\}$ gegeben ist. Sie ist genau dann hausdorffsch, wenn N in M abgeschlossen ist.

Bemerkungen zum Beweis: In [Mat86] sind alle Ringe als kommutativ vorausgesetzt. Dies wird aber für die Beweise der Behauptungen in dieser Proposition nicht benötigt. Die vorletzte Behauptung über die Teilraumtopologie ist in [Mat86] ohne Beweis erwähnt. Der entscheidende Trick hier ist, dass der Abschluss $\overline{U}$ einer Menge $U \subseteq M$ gleich $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (U + M_\lambda)$ ist, da $x \in u + M_\lambda$ genau dann gilt, wenn $u \in x + M_\lambda$ ist.

Der Vollständigkeit halber ist in Abschnitt A.(1.2) im Anhang ein kompletter Beweis für die obige Proposition aufgeführt. $\square$

(1.3) Korollar (Lineare Topologien und direkte Summen)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Ring und L und N zwei $\mathcal{H}$ -Moduln, die jeweils mit einer linearen Topologie bezüglich eines Systems von Untermoduln $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ bzw. $\{N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ mit derselben gerichteten Indexmenge Λ versehen sind. Dann kann man die direkte Summe $M := L \oplus N$ durch $M_\lambda := L_\lambda \oplus N_\lambda$ für $\lambda \in \Lambda$ ebenfalls mit einer linearen Topologie versehen. Diese Topologie auf M hat die folgende Eigenschaft: Fasst man L bzw. N als Teilmoduln auf, dann entspricht die Teilraumtopologie jeweils der auf L bzw. N gegebenen linearen Topologie und fasst man L bzw. N als Faktormoduln M/N bzw. M/L auf, dann entspricht die Quotiententopologie jeweils der gegebenen, linearen Topologie. Insbesondere sind die kanonischen Inklusionen und Projektionen in den beiden kurzen exakten Sequenzen $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ und $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$ alle stetig.

Beweis: Fasst man L über die Inklusion $L \hookrightarrow L \oplus N$ als Teilmodul von M auf, dann ist $L_\lambda = L \cap M_\lambda$, also hat L mit Proposition II.(1.2) die Teilraumtopologie. Fasst man L über die Projektion $L \oplus N \twoheadrightarrow L$ als Faktormodul M/N von M auf, so ist $L_\lambda = (M_\lambda + N)/M_\lambda$, also hat L ebenfalls mit Proposition II.(1.2) die Quotiententopologie. Das Analoge gilt für N . $\square$

In dieser Arbeit kommen zwei Spezialfälle von linearen Topologien vor, die I -adische Topologie, die durch ein Ideal I gegeben ist, und die ν -adische Topologie, die durch eine Bewertung ν gegeben ist. Im Folgenden wird dies vorbereitet und erklärt.

(1.4) Definition/Proposition (I -adische Topologien als lineare Topologien)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring, M ein $\mathcal{H}$ -Modul und I ein echtes, zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$. Dann ist durch $\Lambda := \mathbb{N}$ (natürliche Zahlen ohne 0) und $M_n := MI^n$ eine lineare Topologie auf M und mit $N_n := I^n$ eine auf $\mathcal{H}$ definiert. Sie heißt **I -adische Topologie**.

Ist $\mathcal{H} = \mathcal{O}$ ein noetherscher Integritätsbereich, so ist wegen dem Krullschen Durchschnittssatz (siehe [Mat86, 8.10]) jede I -adische Topologie auf $\mathcal{O}$ hausdorffsch, da $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n = \{0\}$ ist. Ist M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$ -Modul und gilt zusätzlich $I \subseteq \text{rad } \mathcal{O}$, dann ist die I -adische Topologie auf M hausdorffsch.

Beweis: Siehe [Mat86, 8.10]. □

Wir betrachten nun Bewertungen:

(1.5) Definition (Additive Bewertung, vgl. [Jac89, (9.4')])

Es sei A ein kommutativer Ring und G eine total geordnete, abelsche Gruppe (wir schreiben G additiv). Dann heißt eine Abbildung $v : A \rightarrow G \cup \{\infty\}$ eine **additive Bewertung von A** , wenn gilt:

- (i) $v(x) = \infty \iff x = 0$.
- (ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$ für alle $x, y \in A$.
- (iii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ für alle $x, y \in A$.

Das Erzeugnis des Bildes von v in G wird **Wertegruppe** genannt; wenn es als total geordnete Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, dann nennen wir v **diskret**.

Da die Wertegruppe eine Untergruppe von G ist, können wir bei Bedarf ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sie gleich G ist.

Die Menge $B_g(x) := \{x' \in A \mid v(x - x') \geq g\}$ heißt **die Kugel um x mit Radius g** .

Bemerkung:

Wenn wir im Folgenden von „Bewertung“ reden, meinen wir immer „additive Bewertung“.

(1.6) Lemma (Eigenschaften von additiven Bewertungen)

Es seien A ein kommutativer Ring, G eine total geordnete, abelsche Gruppe und $v : A \rightarrow G \cup \{\infty\}$ eine additive Bewertung. Dann gelten:

- (i) $v(1) = v(-1) = 0 \in G$.
- (ii) $v(x) = v(-x)$ für alle $x \in A$.
- (iii) Ist $v(x) < v(y)$ für $x, y \in A$, dann ist $v(x + y) = v(x)$.
- (iv) A ist ein Integritätsbereich.
- (v) v lässt sich durch $v(x/y) := v(x) - v(y)$ für $x, y \in A$ und $y \neq 0$ eindeutig zu einer additiven Bewertung des Quotientenkörpers $K := \text{Quot}(A)$ fortsetzen.

Beweis: Es ist $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$ und es folgt $v(1) = 0$ durch Addition von $-v(1)$ auf beiden Seiten. Damit ist $0 = v(1) = v((-1) \cdot (-1)) = v(-1) + v(-1)$, also hat $v(-1)$ in G Ordnung 1 oder 2. Da aber G total geordnet ist, würde aus $v(-1) > 0$ (analog: $v(-1) < 0$) der Widerspruch $0 = v(1) = v(-1) + v(-1) > v(-1) > 0$ folgen. Also ist auch $v(-1) = 0$ und wir haben (i) bewiesen. Daraus folgt (ii) wegen $v(-x) = v(-1 \cdot x) = 0 + v(x)$ sofort.

Sind $x, y \in A$ mit $v(x) < v(y)$, dann ist einerseits $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\} = v(x)$. Andererseits gilt $v(x) = v(x + y - y) \geq \min\{v(x + y), v(y)\}$. Da aber $v(x) < v(y)$ ist, folgt $v(x) \geq v(x + y)$ und damit (iii).

Aus $x \neq 0$ und $y \neq 0$ folgt $v(xy) \neq \infty$ und damit $xy \neq 0$, womit (iv) bewiesen ist.

Ist $x/y = x'/y' \in K$ mit $x, x', y, y' \in A$, dann ist $xy' = x'y \in A$, also $v(xy') = v(x'y)$, was die Wohldefiniertheit von v auf K zeigt. Die Eigenschaften einer additiven Bewertung auf K folgen dann direkt aus denen von v auf A . Ist $0 \neq y \in A$, so ist $v(1/y) + v(y) = v(1) = 0$, also ist $v(1/y) = -v(y)$, was die Eindeutigkeit beweist. □

(1.7) Definition/Proposition (Bewertungsring)

Es sei A ein kommutativer Ring, $v : A \rightarrow G \cup \{\infty\}$ eine additive Bewertung mit einer total geordneten, abelschen Gruppe G und K der Quotientenkörper von A (existiert wegen Lemma II.(1.6).(iv)). Dann ist $\mathcal{O} := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ ein Teilring von K . Er heißt **Bewertungsring** zur Bewertung v im Körper K und ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid v(x) > 0\}$. Der Ring $\mathcal{O}$ heißt genau dann **diskreter Bewertungsring**, wenn die Bewertung v diskret ist.

Ist K ein beliebiger Körper und $\mathcal{O} \subseteq K$ ein Teilring mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in K \setminus \{0\}$ mindestens eines der Elemente x und x^{-1} in $\mathcal{O}$ liegt, dann gibt es eine Bewertung $v : K \rightarrow G \cup \{\infty\}$ mit einer total geordneten, abelschen Gruppe G , so dass $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von v ist.

Beweis: Siehe [Mat86, §10]. □

Die folgende Schreibweise wird im Folgenden sehr häufig in Voraussetzungen gebraucht.

(1.8) Bezeichnungen (Bewertungssystem)

Ein **Bewertungssystem** ist ein Fünftupel $(A, K, G, v, \mathcal{O})$, bei dem A ein Integritätsbereich ist, K sein Quotientenkörper, G eine total-geordnete, abelsche Gruppe, $v : K \rightarrow G \cup \{\infty\}$ eine surjektive, additive Bewertung und $\mathcal{O} \subseteq K$ der Bewertungsring zu v in K . Zusätzlich soll A in $\mathcal{O}$ enthalten sein, so dass also $v(x) \geq 0 \in G$ ist für alle $x \in A$.

Bemerkung: Mitunter schreiben wir $(\mathcal{O}, K, G, v, \mathcal{O})$, wenn kein anderer Ring außer dem Bewertungsring vorkommt. Man beachte, dass durch die Surjektivität von v vorausgesetzt ist, dass die Wertegruppe gleich G ist.

Diskrete Bewertungsringe kann man durch Lokalisieren erhalten:

(1.9) Lemma (Lokalisierung ist diskreter Bewertungsring)

Es sei $(A, K, \mathbb{Z}, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem. Dann ist $\mathfrak{q} := \{a \in A \mid v(a) > 0\}$ ein Primideal in A . Ist $\mathfrak{q}$ ein Hauptideal in A , dann ist die Lokalisierung $A_{\mathfrak{q}}$ von A bei $\mathfrak{q}$ gleich dem diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}$ zur Bewertung v im Quotientenkörper K von A .

Beweis: Dass $\mathfrak{q}$ ein Primideal ist, folgt sofort aus den Eigenschaften der Bewertung v , weil alle Elemente in A einen Wert größer oder gleich 0 haben. Im Quotientenkörper K ist $A_{\mathfrak{q}}$ die Menge der Elemente, die sich als Quotienten a/b schreiben lassen mit $a, b \in A$ und $v(b) = 0$. Die Inklusion $A_{\mathfrak{q}} \subseteq \mathcal{O}$ ist klar, da nur durch Elemente mit Wert 0 dividiert wird.

Für die Inklusion $A_{\mathfrak{q}} \supseteq \mathcal{O}$ benutzen wir, dass $\mathfrak{q} = \pi A$ ist für ein Element $\pi \in \mathfrak{q}$. Dann ist $v(\pi) = 1$ (da v nach Voraussetzung surjektiv ist). Es sei $a/b \in \mathcal{O}$, also $a, b \in A$ mit $b \neq 0$. Dann ist $v(a) \geq v(b)$ wegen $v(a/b) \geq 0$. Sollte $v(b) > 0$ sein, dann ist $b \in \mathfrak{q}$, also von der Form $\pi b'$ mit einem $b' \in A$. Dasselbe gilt für a , so dass wir mit π kürzen können. Dies lässt sich wiederholen, bis $v(b) = 0$ ist und wir damit gezeigt haben, dass $a/b \in A_{\mathfrak{q}}$ ist. □

Bemerkung: Ist v eine nicht-diskrete Bewertung, dann ist die Lokalisierung von A bei dem Ideal $\{a \in A \mid v(a) > 0\}$ im Allgemeinen **nicht** gleich dem Bewertungsring von v im Quotientenkörper von A , was man schon daran sieht, dass nicht-diskrete Bewertungsringe laut [Mat86, 11.1] nicht noethersch sind, während Lokalisierungen von noetherschen Ringen wieder noethersch sind (siehe [Mat86, Corollary to 4.1]). Andererseits gibt es auch Fälle, in denen $\mathfrak{q}$ kein Hauptideal ist, aber trotzdem $A_{\mathfrak{q}}$ gleich dem diskreten Bewertungsring zu v in K ist (vergleiche dazu Lemma III.(2.1)).

Versieht man einen Integritätsbereich mit einer Topologie, die von einer additiven Bewertung kommt, dann lassen sich einige Aussagen über die Beziehungen zum Quotientenkörper, dessen Topologie und dem zur Bewertung gehörenden Bewertungsring darin machen:

(1.10) Definition/Proposition (Lineare Topologien, die von additiven Bewertungen kommen)

Es sei $(A, K, G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem. Dann ist durch $\Lambda := G$ und $M_{\lambda} := \{x \in A \mid v(x) \geq \lambda\}$ eine lineare Topologie auf A definiert. Sie heißt **v -adische Topologie** und ist hausdorffsch.

Durch $\Lambda := G$ und $N_\lambda := \{x \in \mathcal{O} \mid v(x) \geq \lambda\}$ ist auf $\mathcal{O}$ eine lineare Topologie definiert. Durch $L_\lambda := \{x \in K \mid v(x) \geq \lambda\}$ ist auch auf dem $\mathcal{O}$ -Modul K eine lineare Topologie gegeben. Wir nennen diese beiden Topologien jeweils **v -adische Topologie**, sie sind hausdorffsch.

Die v -adische Topologie auf A ist die Teilraumtopologie der v -adischen Topologie auf $\mathcal{O}$ und die wiederum die Teilraumtopologie der v -adischen Topologie auf K . Dementsprechend sind die Einbettungsabbildungen $A \hookrightarrow \mathcal{O} \hookrightarrow K$ stetig. Außerdem sind Addition, Bildung von Negativen und Multiplikation in K stetig bezüglich der v -adischen Topologie. Die Inversenbildung in $K \setminus \{0\}$ ist auch stetig.

Versieht man G mit der diskreten Topologie, dann ist $v : K \setminus \{0\} \rightarrow G$ (und damit jeweils auch die Einschränkung auf A bzw. $\mathcal{O}$) stetig.

Bemerkung: Die Konstruktion der Topologien auf A bzw. $\mathcal{O}$ ist völlig analog zu der in einem metrischen Raum, indem man einfach die üblichen Abstände in $\mathbb{R}^+$ durch die Wertegruppe $G \cup \{\infty\}$ ersetzt und die Anordnung herumdreht (∞ hier entspricht der $0 \in \mathbb{R}^+$). Die Beweise orientieren sich an dieser Analogie und die Verträglichkeit der Topologien auf A , der auf $\mathcal{O}$ und der auf K kommt genau daher.

Beweis: Die M_λ sind Ideale in A und die N_λ sind Ideale in $\mathcal{O}$, da alle Elemente in A bzw. $\mathcal{O}$ Werte größer oder gleich 0 haben. Die v -adische Topologie ist hausdorffsch, da jedes Element $0 \neq x \in K$ einen endlichen Wert hat.

Addition, Bildung von Negativen und Multiplikation in A und $\mathcal{O}$ sind bereits nach Bemerkung II.(1.2) stetig. Da $M_\lambda = A \cap N_\lambda$ für alle $\lambda \in G$ gilt, ist die v -adische Topologie auf A genau die Teilraumtopologie der v -adischen Topologie auf $\mathcal{O}$ (vergleiche die Ausführungen zur Teilraumtopologie in Proposition II.(1.2)). Genau so argumentiert man für $\mathcal{O} \subseteq K$. Also sind auch die Einbettungsabbildungen $A \hookrightarrow \mathcal{O} \hookrightarrow K$ stetig.

Die Multiplikation in K ist stetig, da aus $v(a - a') \geq g_1$ und $v(b - b') \geq g_2$ sofort $v(ab - a'b') = v(ab - a'b + a'b - a'b') \geq \min\{v((a - a')b), v(a'(b - b'))\} \geq \min\{g_1 + v(b), v(a') + g_2\}$ folgt und $v(a') = v(a - (a - a')) \geq \min\{v(a), g_1\}$ gilt. Also kann man für jedes $g \in G$ ein g' finden, so dass aus $v(a - a') \geq g'$ und $v(b - b') \geq g'$ folgt, dass $v(ab - a'b') \geq g$ ist.

Bei Inversenbildung wird der v -Wert offenbar negiert: $v(y/x) = -v(x/y)$.

Mit $y^{-1} - x^{-1} = \frac{x-y}{xy}$ für $x, y \in K \setminus \{0\}$ zeigt man die Stetigkeit der Inversenbildung: Ist nämlich y „so nah“ bei x , dass $v(x - y) > v(x)$ gilt, dann muss wegen $v(x) = v(x - y + y) \geq \min\{v(x - y), v(y)\}$ die Abschätzung $v(x) \geq v(y)$ gelten. Also ist $v(y^{-1} - x^{-1}) = v(x - y) - v(x) - v(y)$ „groß“, wenn $v(x - y)$ „groß“ ist. Deswegen gibt es zu jeder Kugel B um x^{-1} eine Kugel um x , die beim Invertieren ganz nach B abgebildet wird.

Das Urbild der Menge $\{\lambda\} \subseteq G$ unter $v : K \setminus \{0\} \rightarrow G$ ist die Menge $X := \{x \in K \mid v(x) = \lambda\}$. Ist aber $x \in X$ und $\mu > \lambda$ beliebig, dann folgt mit Lemma II.(1.6).(iii), dass $x + M_\mu \subseteq X$ ist. Also ist X offen in der v -adischen Topologie und v damit stetig auf $K \setminus \{0\}$. $\square$

In Bewertungsringen ist es vergleichbar einfach, sich einen Überblick über alle Ideale I zu verschaffen. Außerdem ist es möglich, ein Kriterium anzugeben, wann die I -adische Topologie mit der Bewertungs-Topologie übereinstimmt. Dies zeigen die folgenden Resultate. Es sind zunächst zwei Definitionen notwendig:

(1.11) Definition (nach oben abgeschlossene Teilmenge, vgl. [Bou64, VI.§3.5])

Es sei G eine total-geordnete, abelsche Gruppe. Wir nennen eine Teilmenge $T \subseteq G \cup \{\infty\}$ **nach oben abgeschlossen**, wenn für alle $t \in T$ und $t' \in G \cup \{\infty\}$ mit $t' \geq t$ auch $t' \in T$ ist. Ist $S \subseteq G \cup \{\infty\}$ eine beliebige Teilmenge, dann bezeichnen wir mit $\bar{S} := \{g \in G \mid \text{es gibt ein } s \in S \text{ mit } g \geq s\}$ ihren **Abschluss nach oben**; dieser ist per definitionem nach oben abgeschlossen.

(1.12) Definition (Ideale zu einer Bewertung)

Es sei $(A, K, G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem (siehe II.(1.8)). Ist $T \subseteq G \cup \{\infty\}$ eine nach oben abgeschlossene Teilmenge, dann ist $I_T^A := \{x \in A \mid v(x) \in T\}$ ein Ideal in A .

(1.13) Lemma (Ideale in Bewertungsringen, siehe [Bou64, VI.§3.5])

Es sei $(\mathcal{O}, K, G, \nu, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem und G_+ die Menge der positiven Elemente in G . Dann ist die Abbildung $T \mapsto I_T^\mathcal{O} = \{x \in \mathcal{O} \mid \nu(x) \in T\}$ eine Bijektion von der Menge der nach oben abgeschlossenen Mengen $T \subseteq G_+ \cup \{\infty\}$ auf die Menge der echten Ideale des Bewertungsrings $\mathcal{O}$.

Beweis: Siehe [Bou64, VI.§3.5, Corollaire]. $\square$

(1.14) Definition (archimedische Teilmenge)

Es sei G eine total-geordnete, abelsche Gruppe und $T \subseteq G \cup \{\infty\}$ eine Teilmenge. Dann bezeichnen wir mit T^n für $n \in \mathbb{N}$ den Abschluss nach oben der Menge der n -fachen Summen, also

$$\begin{aligned} T^n &:= \overline{\left\{ \sum_{j=1}^n t_j \mid t_j \in T \text{ für } 1 \leq j \leq n \right\}} \\ &= \left\{ t \in G \cup \{\infty\} \mid \text{es gibt } t_j \in T \text{ für } 1 \leq j \leq n, \text{ so dass } t \geq \sum_{j=1}^n t_j \right\}. \end{aligned}$$

Wir nennen eine nach oben abgeschlossene Teilmenge $T \subseteq G \cup \{\infty\}$ **archimedisch**, wenn für jedes $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $t \geq g$ für alle $t \in T^n$.

Bemerkung: Offensichtlich sind alle Elemente einer archimedischen Teilmenge positiv.

(1.15) Proposition (Die ν -adische Topologie als Topologie, die von einem Ideal stammt)

Es sei $(\mathcal{O}, K, G, \nu, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem und G_+ die Menge der positiven Elemente in G . Weiter sei $T \subseteq G_+ \cup \{\infty\}$ eine archimedische Teilmenge und $I := I_T^\mathcal{O} = \{x \in \mathcal{O} \mid \nu(x) \in T\}$ das zugehörige Ideal (vergleiche Definition II.(1.12)).

Dann stimmen die ν -adische Topologie und die I -adische Topologie auf $\mathcal{O}$ überein.

Beweis: Beide Topologien sind linear. Es reicht also zu zeigen, dass in jeder Nullumgebung der einen Topologie eine Nullumgebung der anderen enthalten ist und umgekehrt.

Die Nullumgebungen in der I -adischen Topologie sind die Potenzen von I . Es gilt $I^n = I_{T^n}^\mathcal{O}$: Die Inklusion „ $\subseteq$ “ folgt direkt aus den Eigenschaften der Bewertung ν und der Definition von T^n in II.(1.14). Für die Inklusion „ $\supseteq$ “ sei $0 \neq x \in I_{T^n}^\mathcal{O}$. Für $t := \nu(x)$ gibt es also $t_j \in T$ für $1 \leq j \leq n$ mit $t \geq \sum_{i=1}^n t_i$. Da ν surjektiv ist und $\mathcal{O}$ der Bewertungsring zu ν in K , gibt es in I Elemente i_j mit $\nu(i_j) = t_j$ für $1 \leq j \leq n$, so dass mit $y := \prod_{j=1}^n i_j \in I^n$ gilt, dass $\nu(y) = \sum_{j=1}^n t_j \leq t$ ist. Also ist $x/y \in \mathcal{O}$ und damit $x \in I^n$.

Die Eigenschaft von T , archimedisch zu sein, bedeutet nun gerade, dass zu jedem $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $I^n = I_{T^n}^\mathcal{O} \subseteq B_g(0)$, wobei $B_g(0)$ für die Kugel um die Null mit Radius g steht (siehe Definition II.(1.5)).

Umgekehrt ist für ein $n \in \mathbb{N}$ wegen $I^n = I_{T^n}^\mathcal{O}$ für jedes $t \in T^n$ die Kugel $B_t(0)$ in I^n enthalten. $\square$

(1.16) Bemerkung (Beispiel für archimedische Mengen)

Es sei K ein Körper, G eine total-geordnete, abelsche Gruppe und $\mathbb{Z} \times G$ lexikographisch geordnet. Es gilt also genau dann $(a, a') > (b, b')$, wenn entweder $a > b$ ist oder $a = b$ und $a' > b'$ ist. Dann ist die Menge $T := \{(a, a') \in \mathbb{Z} \times G \mid a > 0\} \cup \{\infty\}$ archimedisch.

Im Fall von regulären, lokalen Ringen sind die beiden Konzepte „ m -adische Topologie für das maximale Ideal m “ und „Topologie zu einer Bewertung“ sogar äquivalent. Dies wird im nächsten Theorem gezeigt, direkt nach der Wiederholung der Definition von „regulärem, lokalem Ring“.

Dieses Resultat wird im Rest der Arbeit nicht mehr verwendet.

(1.17) Definition (Regulärer, lokaler Ring, vgl. [Kun85, VI.1.6])

Ein **regulärer, lokaler Ring** ist ein kommutativer, noetherscher, lokaler Ring A , dessen maximales Ideal von d Elementen erzeugt wird, wobei d die Dimension von A ist.

Bemerkung: Ist A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und ist $k := A/\mathfrak{m}$ sein Restklassenkörper, dann ist

$$\text{emb dim } A := \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

die so genannte **Einbettungsdimension** von A . Für jeden lokalen Ring A gilt

$$\text{emb dim } A \geq \dim A$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\mathfrak{m}$ durch $\dim A$ Elemente erzeugt werden kann (vgl. Krulls Hauptidealsatz [Mat86, 13.5]). Ein regulärer, lokaler Ring ist immer ein Integritätsbereich (siehe [Mat86, 14.3]).

(1.18) Theorem (Die $\mathfrak{m}$ -adische Topologie bei regulären, lokalen Ringen)

Es seien A ein regulärer, lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $K := \text{Quot}(A)$ sein Quotientenkörper. Dann gibt es eine (additive) Bewertung $v_{\mathfrak{m}} : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, die auf A die $\mathfrak{m}$ -adische Topologie induziert. Eine Möglichkeit für $v_{\mathfrak{m}}$ wird im Beweis explizit angegeben.

Bemerkung: Man beachte, dass A im Allgemeinen kein Bewertungsring ist! Reguläre, lokale Ringe liefern also Beispiele für Topologien, die sich sowohl als $\mathfrak{m}$ -adische als auch als solche, die von Bewertungen kommen, auffassen lassen!

Beweis: Wir definieren $v_{\mathfrak{m}}$ zunächst auf A , was wegen Lemma II.(1.6).(v) ausreicht, um eine Bewertung auf K zu definieren. Da A als regulärer, lokaler Ring per definitionem noethersch und wegen [Mat86, 14.3] nullteilerfrei ist, ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = \{0\}$ (siehe Krullscher Durchschnittssatz [Mat86, 8.10]) und zu jedem $0 \neq x \in A$ gibt es genau ein $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $x \in \mathfrak{m}^t \setminus \mathfrak{m}^{t+1}$ (hier ist $\mathfrak{m}^0 = A$). Es sei nun

$$v_{\mathfrak{m}}(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0 \\ t & \text{für } x \in \mathfrak{m}^t \setminus \mathfrak{m}^{t+1} \end{cases}$$

Dann ist offenbar $v_{\mathfrak{m}}(x) = \infty$ genau dann, wenn $x = 0$ ist. Außerdem folgt aus $v_{\mathfrak{m}}(x) = t$ und $v_{\mathfrak{m}}(y) = s$, dass $x + y \in \mathfrak{m}^{\min\{s,t\}}$ ist. Wenn $s \neq t$ gilt, dann ist $x + y \notin \mathfrak{m}^{\min\{s,t\}+1}$, also ist in diesem Fall sogar $v_{\mathfrak{m}}(x + y) = \min\{v_{\mathfrak{m}}(x), v_{\mathfrak{m}}(y)\}$. Ist $s = t$, dann ist jedenfalls noch

$$v_{\mathfrak{m}}(x + y) \geq v_{\mathfrak{m}}(x) = v_{\mathfrak{m}}(y) = \min\{v_{\mathfrak{m}}(x), v_{\mathfrak{m}}(y)\}.$$

Für $v_{\mathfrak{m}}(xy) = v_{\mathfrak{m}}(x) + v_{\mathfrak{m}}(y)$ brauchen wir nun die Regularität von A . Aus [Mat86, 14.4] folgt nämlich, dass der gradierte Ring

$$\text{gr}_{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$$

isomorph zu einem Polynomring über einem Körper ist, also insbesondere nullteilerfrei ist. Das bedeutet, dass das Produkt $\bar{x} \cdot \bar{y} \in \mathfrak{m}^{t+s} / \mathfrak{m}^{t+s+1}$ zweier homogener Elemente $0 \neq \bar{x} \in \mathfrak{m}^t / \mathfrak{m}^{t+1}$ und $0 \neq \bar{y} \in \mathfrak{m}^s / \mathfrak{m}^{s+1}$ ungleich 0 ist. Also ist das Produkt zweier Elemente $x \in \mathfrak{m}^t \setminus \mathfrak{m}^{t+1}$ und $y \in \mathfrak{m}^s \setminus \mathfrak{m}^{s+1}$ zwar in $\mathfrak{m}^{s+t}$, nicht jedoch in $\mathfrak{m}^{s+t+1}$. Daraus folgt, dass $v_{\mathfrak{m}}(xy) = v_{\mathfrak{m}}(x) + v_{\mathfrak{m}}(y)$ ist. Diese Bewertung $v_{\mathfrak{m}}$ wird nun wie in II.(1.6).(v) auf K fortgesetzt: $v_{\mathfrak{m}}(x/y) := v_{\mathfrak{m}}(x) - v_{\mathfrak{m}}(y)$ für $x, y \in A$ mit $y \neq 0$.

Die Mengen $x + \mathfrak{m}^n$ (mit $x \in A$ und $n \in \mathbb{N}$) der oben definierten Umgebungsbasis der $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie sind gerade die „Kugeln“ $\{y \in A \mid v_{\mathfrak{m}}(x - y) \geq n\}$. Also induziert $v_{\mathfrak{m}}$ die $\mathfrak{m}$ -adische Topologie auf A . Außerdem wird so auf K eine Topologie induziert, so dass die $\mathfrak{m}$ -adische Topologie auf A die Teilraumtopologie $A \subseteq K$ ist. $\square$

Bemerkung: Dieses Resultat zeigt die Existenz eines diskreten Bewertungsrings $\mathcal{O}$ mit $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq K$ und $\text{rad } \mathcal{O} \cap A = \mathfrak{m}$ für den Fall, dass A ein regulärer, lokaler Ring ist.

II.2 Lineare Topologien auf Ordnungen

Dieser Abschnitt zeigt, wie lineare Topologien auf Ordnungen definiert werden können. Die Ergebnisse werden später zum Heben von Idempotenten benutzt.

Bei Vektorräumen lassen sich aus Absolutbeträgen auf dem Grundkörper mit Hilfe von Normen Topologien definieren. Für freie Moduln über kommutativen Ringen geht dies analog mit Bewertungen. Dazu führen wir den folgenden Begriff ein:

(2.1) Definition (Additive Norm)

Es sei A ein kommutativer Ring und $v : A \rightarrow G \cup \{\infty\}$ eine additive Bewertung mit einer total geordneten, abelschen Gruppe G . Weiter sei M ein A -Modul.

Dann heißt eine Abbildung $\| - \| : M \rightarrow G \cup \{\infty\}$ **additive Norm**, wenn gilt:

- (i) $\|m\| = \infty \iff m = 0$.
- (ii) $\|mx\| = \|m\| + v(x)$ für alle $m \in M$ und $x \in A$.
- (iii) $\|m + m'\| \geq \min\{\|m\|, \|m'\|\}$ für alle $m, m' \in M$.

Die Menge $B_g(m) := \{m' \in M \mid \|m - m'\| \geq g\}$ heißt **die Kugel um m mit Radius g** .

Bemerkung: Aus (ii) folgt sofort, dass M keine A -Torsion hat.

(2.2) Definition/Proposition (Lineare Topologien, die von additiven Normen kommen)

Es sei $(A, K, G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem. Weiter sei M ein A -Modul mit einer additiven Norm $\| - \| : M \rightarrow G \cup \{\infty\}$. Dann ist durch $\Lambda := G$ und $M_\lambda := \{m \in M \mid \|m\| \geq \lambda\}$ eine lineare Topologie auf M definiert. Sie heißt **Normtopologie** und ist hausdorffsch, da jedes Element außer der Null eine endliche Norm hat.

Die Norm $\| - \|$ lässt sich durch $\|\frac{m}{x}\| := \|m\| - v(x)$ für $m \in M$ und $x \in A \setminus \{0\}$ eindeutig zu einer Norm auf $KM := K \otimes_A M$ fortsetzen. Ist $\mathcal{O}M := \mathcal{O} \otimes_A M$, dann ist durch $\Lambda := G$ und

$$N_\lambda := \{m \in \mathcal{O}M \mid \|m\| \geq \lambda\}$$

eine lineare Topologie auf $\mathcal{O}M$ (als $\mathcal{O}$ -Modul) definiert. Durch

$$L_\lambda := \{m \in KM \mid \|m\| \geq \lambda\}$$

ist auch auf dem $\mathcal{O}$ -Modul KM eine lineare Topologie definiert. Wir nennen diese beiden Topologien jeweils **Normtopologie**, sie sind hausdorffsch, da jedes Element außer dem Nullvektor eine endliche Norm hat. Die Operation von K auf KM ist stetig, wenn K mit der v -adischen Topologie versehen wird wie in II.(1.10) beschrieben.

Die Normtopologie auf M ist gleich der Teilraumtopologie der Normtopologie auf $\mathcal{O}M$ und diese gleich der Teilraumtopologie der Normtopologie auf KM . Dementsprechend sind die Einbettungsabbildungen $M \hookrightarrow \mathcal{O}M \hookrightarrow KM$ stetig bezüglich der Normtopologien.

Beweis: Wegen v ist A ein Integritätsbereich und wegen $\| - \|$ ist M torsionsfrei als A -Modul. Deswegen ist die Konstantenerweiterung KM isomorph zur Lokalisierung des Moduls M bei der multiplikativ abgeschlossenen Menge $A \setminus \{0\}$ (siehe [Mat86, Theorem 4.4]), so dass wir uns Elemente von KM als Brüche vorstellen können. Es folgt aus $m/x = m'/x' \in KM$ sofort $mx' = m'x \in M$ und damit $\|m\| - v(x) = \|m'\| - v(x')$. Damit ist durch $\|m/x\| := \|m\| - v(x)$ eine Abbildung wohldefiniert. Die Eigenschaften (i) und (ii) einer additiven Norm sind klarerweise erfüllt, wobei hier KM als $\mathcal{O}$ -Modul aufzufassen ist. Bei (ii) gilt sogar $\|my\| = \|m\| + v(y)$ für alle $m \in KM$ und $y \in K$.

Eigenschaft (iii) ist erfüllt, da

$$\begin{aligned} \left\| \frac{m}{x} + \frac{m'}{x'} \right\| &= \left\| \frac{mx' + m'x}{xx'} \right\| = \|mx' + m'x\| - v(xx') \\ &\geq \min \{ \|m\| + v(x'), \|m'\| + v(x) \} - v(x) - v(x') \\ &= \min \{ \|m\| - v(x), \|m'\| - v(x') \} \end{aligned}$$

gilt. Analog zu II.(1.10) sind die N_λ Untermoduln des $\mathcal{O}$ -Moduls $\mathcal{O}M$, also ist eine lineare Topologie auf $\mathcal{O}M$ definiert. Da $M_\lambda = M \cap N_\lambda$ gilt, ist die Normtopologie auf M genau die Teilraumtopologie der Normtopologie auf $\mathcal{O}M$ (vergleiche die Ausführungen zur Teilraumtopologie in II.(1.2)). Genau so argumentiert man für $\mathcal{O}M \subseteq KM$. Also sind die Einbettungsabbildungen $M \hookrightarrow \mathcal{O}M \hookrightarrow KM$ stetig.

Die Operation von K auf KM ist bezüglich der Normtopologie auf KM (und der v -adischen auf K) stetig: Die Abbildung $KM \times K \rightarrow KM$, $(m, y) \mapsto my$ (hier ist $KM \times K$ mit der Produkttopologie versehen) ist nämlich stetig, da aus $\|m - m'\| \geq g_1$ und $v(y - y') \geq g_2$ für $m, m' \in KM$ und $y, y' \in K$ und $g_1, g_2 \in G$ sofort

$$\begin{aligned} \|my - m'y'\| &= \|my - my' + my' - m'y'\| \geq \min \{ \|m\| + v(y - y'), \|m - m'\| + v(y') \} \\ &\geq \min \{ \|m\| + g_2, g_1 + v(y') \} \end{aligned}$$

folgt und aus $v(y') = v(y - (y - y')) \geq \min\{v(y), v(y - y')\}$ folgt, dass $v(y') \geq v(y)$ ist für $g_2 \geq v(y)$. Deswegen kann man zu jedem Punkt $(m, y) \in KM \times K$ und jedem $g \in G$ Elemente $g_1, g_2 \in G$ so wählen, dass die Menge $\{(m', y') \in KM \times K \mid \|m - m'\| \geq g_1 \text{ und } v(y - y') \geq g_2\}$ ganz in die Kugel mit Radius g um $my \in KM$ abgebildet wird. $\square$

Nachdem bislang in diesem Abschnitt nur von Moduln über kommutativen Ringen die Rede war, kommen nun Algebren ins Spiel. Wir brauchen hierfür einige Vorbereitungen, insbesondere für die Konstruktion von zweiseitigen Idealen darin.

Für A -Ordnungen können wir aus einer Bewertung auf A eine additive Norm konstruieren:

(2.3) Theorem (Normtopologie bei einem Gitter über einem bewerteten Ring)

Es sei A ein kommutativer Ring mit einer additiven Bewertung $v : A \rightarrow G \cup \{\infty\}$ und M ein A -Gitter (vgl. I.(2.5)). Weiter sei $(b_1, \dots, b_d)$ eine beliebige A -Basis von M . Dann definiert

$$\|m\| := \min \{ v(m_i) \mid i = 1, \dots, d \} \quad \text{falls} \quad m = \sum_{i=1}^d b_i m_i \quad \text{ist mit} \quad m_i \in A$$

eine additive Norm auf M .

Gilt $v(a) \geq 0$ für alle $a \in A$, dann ist die Definition von $\| - \|$ sogar unabhängig von der gewählten Basis. Die Kugel $B_g(0) \subseteq M$ entspricht dann nämlich bezüglich jedes Isomorphismus $M \cong \bigoplus_{i=1}^d A$ dem Teilmodul $\bigoplus_{i=1}^d I$, wobei I gleich dem Ideal $\{a \in A \mid v(a) \geq g\}$ in A ist.

Beweis: Bezüglich einer festen Basis $(b_1, \dots, b_d)$ ist die Wohldefiniertheit klar.

Die Eigenschaften einer additiven Norm werden genau so von den Eigenschaften der additiven Bewertung v vererbt wie bei der Definition der Maximumnorm mit einem Absolutbetrag: Nur der Nullvektor hat Norm unendlich. Ist $m = \sum_{i=1}^d b_i m_i$, dann ist

$$\|mx\| = \min \{ v(m_i x) \} = \min \{ v(m_i) + v(x) \} = \min \{ v(m_i) \} + v(x) = \|m\| + v(x).$$

Außerdem gilt mit $m' = \sum_{i=1}^d b_i m'_i$:

$$\begin{aligned} \|m + m'\| &= \min \{ v(m_i + m'_i) \} \geq \min \{ \min(v(m_i), v(m'_i)) \} = \\ &= \min \{ \min\{v(m_i)\}, \min\{v(m'_i)\} \} = \min \{ \|m\|, \|m'\| \}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\| - \|$ eine additive Norm auf M ist.

Gilt $v(a) \geq 0$ für alle $a \in A$, dann ist für jedes $g \in G$ die Menge $\{m \in M \mid \|m\| \geq g\}$ (definiert über eine beliebige Basis wie oben) gleich der Menge MI (unabhängig von der Basis!), wobei I gleich dem Ideal $\{a \in A \mid v(a) \geq g\}$ in A ist: Die Inklusion „ $\subseteq$ “ folgt, da Summen $\sum_{i=1}^d b_i m_i \in MI$ liegen für $m_i \in I$. Für die Inklusion „ $\supseteq$ “ verwendet man, dass nach Definition der Norm $\|m\| \geq 0$ ist für alle $m \in M$, weil $v(m_i) \geq 0$ ist für alle $m_i \in A$. $\square$

(2.4) Lemma (Multiplikation in normierten A-Ordnungen)

Es sei $(A, K, G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem, $\mathcal{H}$ eine A -Ordnung und $\| - \|$ eine additive Norm auf $\mathcal{H}$ wie in Theorem II.(2.3). Dann gilt für alle $h, h' \in \mathcal{H}$, dass $\|h \cdot h'\| \geq \|h\| + \|h'\|$ ist.

Beweis: Es seien $(b_1, \dots, b_d)$ die Basis von $\mathcal{H}$, die zur Definition der Norm wie in Theorem II.(2.3) benutzt wurde, und $h_{ijk} \in A$ die Strukturkonstanten von $\mathcal{H}$ bezüglich dieser Basis, es gelte also $b_i \cdot b_j = \sum_{k=1}^d b_k h_{ijk}$ für $1 \leq i, j \leq d$.

Sind $h = \sum_{i=1}^d b_i a_i \in \mathcal{H}$ mit $a_i \in A$ und $h' = \sum_{j=1}^d b_j a'_j \in \mathcal{H}$ mit $a'_j \in A$ zwei Elemente in $\mathcal{H}$, dann sind nach Definition $\|h\| = \min \{v(a_i) \mid 1 \leq i \leq d\}$ und $\|h'\| = \min \{v(a'_j) \mid 1 \leq j \leq d\}$. Also ist

$$\begin{aligned} \|h \cdot h'\| &= \left\| \sum_{i,j,k} b_k h_{ijk} a_i a'_j \right\| \geq \min_{i,j,k} \{ \|b_k h_{ijk} a_i a'_j\| \} \\ &= \min_{i,j,k} \{ \|b_k\| + v(h_{ijk}) + v(a_i) + v(a'_j) \} \geq \|h\| + \|h'\|, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. $\square$

Bemerkung: Daraus folgt sofort, dass die Kugeln um die Null, die in $\mathcal{H}$ durch die Norm $\| - \|$ gegeben sind, zweiseitige Ideale in $\mathcal{H}$ sind. Das folgende Lemma gibt genauere Auskunft über diese Ideale.

(2.5) Lemma (Konstruktion zweiseitiger Ideale in Algebren)

Es sei A ein kommutativer Ring, $I \triangleleft A$ ein Ideal in A und $\mathcal{H}$ eine A -Algebra (siehe Definition I.(2.1)). Dann ist

$$I\mathcal{H} = \left\{ \sum_{j=1}^n i_j h_j \mid n \in \mathbb{N}, i_j \in I \text{ und } h_j \in \mathcal{H} \text{ für } 1 \leq j \leq n \right\}$$

ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$ und es gilt $(I\mathcal{H})^k = I^k \cdot \mathcal{H}$.

Beweisidee: Nachrechnen. Für die letzte Behauptung benutzt man, dass $\mathcal{H}$ eine 1 enthält und deswegen $i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_k \cdot h = (i_1 \cdot 1_{\mathcal{H}}) \cdot (i_2 \cdot 1_{\mathcal{H}}) \cdot \dots \cdot (i_k \cdot h)$ ist für $i_j \in I$ und $h \in \mathcal{H}$. $\square$

(2.6) Definition/Proposition (Ideale in A-Ordnungen, die durch eine Norm beschrieben sind)

Es sei $(A, K, G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem, $\mathcal{H}$ eine A -Ordnung und $\| - \|$ eine additive Norm auf $\mathcal{H}$ wie in II.(2.3). Ist $\emptyset \neq T \subseteq G \cup \{\infty\}$ eine nach oben abgeschlossene Menge (siehe Definition II.(1.11)), dann ist $I_T^{\mathcal{H}} := \{h \in \mathcal{H} \mid \|h\| \in T\}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$ und es gilt $I_T^{\mathcal{H}} = I_T^A \mathcal{H}$ für das Ideal $I_T^A = \{a \in A \mid v(a) \in T\}$ von A (vergleiche Definition II.(1.12)).

Beweis: Dass I_T^A ein Ideal in A ist folgt direkt aus der Tatsache, dass $v(x) \geq 0$ ist für alle $x \in A$ und der Eigenschaft der Menge T , nach oben abgeschlossen zu sein (vergleiche II.(1.12)). Dann folgt aus Lemma II.(2.5), dass $I_T^A \mathcal{H}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$ ist. Die Gleichheit $I_T^{\mathcal{H}} = I_T^A \mathcal{H}$ wird bewiesen wie die letzte Aussage von Theorem II.(2.3). $\square$

Analog zu Proposition II.(1.15) können wir auch die Normtopologie auf einer Ordnung über einem Bewertungsring als Topologie, die von einem Ideal stammt, deuten:

(2.7) Korollar (Normtopologie als Topologie, die von einem Ideal stammt)

Es sei $(A, K, G, \nu, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem und G_+ die Menge der positiven Elemente in G . Es sei $T \subseteq G_+ \cup \{\infty\}$ eine archimedische Teilmenge und $I := I_T^\mathcal{O} = \{x \in \mathcal{O} \mid \nu(x) \in T\}$ das zugehörige Ideal (vergleiche Definition II.(1.12)). Weiter sei $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung und $\| - \|$ eine Norm auf $\mathcal{H}$ wie in II.(2.3). Dann stimmen die Normtopologie auf $\mathcal{H}$, die $I_T^\mathcal{H}$ -adische Topologie und die I -adische Topologie auf $\mathcal{H}$ (im letzteren Fall als $\mathcal{O}$ -Modul) überein.

Beweis: Das zweiseitige Ideal $I_T^\mathcal{H}$ (vergleiche II.(2.6)) ist gleich $I_T^\mathcal{O} \mathcal{H} = I \mathcal{H}$ und $(I_T^\mathcal{H})^n = I^n \mathcal{H}$ für $n \in \mathbb{N}$ (siehe Lemma II.(2.5)). Also sind die $I_T^\mathcal{H}$ -adische Topologie der Algebra $\mathcal{H}$ und die I -adische Topologie des $\mathcal{O}$ -Moduls $\mathcal{H}$ identisch.

Dieselbe Argumentation wie im Beweis zu Proposition II.(1.15) zeigt aber nun, dass in jeder Nullumgebung $I^n \mathcal{H}$ der $I_T^\mathcal{H}$ -adischen Topologie eine Nullumgebung der Normtopologie liegt und umgekehrt. Also sind alle drei linearen Topologien gleich. $\square$

Das folgende Lemma wird sich an mehreren Stellen als nützlich erweisen:

(2.8) Lemma (Invertierbarkeit in A-Ordnungen)

Es sei A ein Integritätsbereich und $\mathcal{H}$ eine A -freie A -Algebra von endlichem Rang. Dann ist ein Element $h \in \mathcal{H}$ genau dann invertierbar in $\mathcal{H}$, wenn seine Determinante in der regulären Darstellung eine Einheit in A ist.

Beweis: Es sei $\mathcal{B} := (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine beliebige Basis von $\mathcal{H}$ und D die rechts-reguläre Matrixdarstellung von $\mathcal{H}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Ist $h \in \mathcal{H}$ invertierbar, dann ist $D(h) \cdot D(h^{-1}) = E_n$ (n -reihige Einheitsmatrix). Also ist $\det D(h)$ wegen dem Determinanten-Multiplikationssatz eine Einheit in A . Sei umgekehrt $\det D(h)$ eine Einheit in A . Dann ist die Matrix $D(h)$ invertierbar und $D(h)^{-1}$ ist ein Polynom in $D(h)$ mit Koeffizienten aus A , liegt also in $D(\mathcal{H})$. Damit ist h invertierbar in $\mathcal{H}$, denn die reguläre Darstellung ist treu. $\square$

(2.9) Proposition (Eigenschaften von Normtopologien)

Es sei $(A, K, G, \nu, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem, $\mathcal{H}$ eine A -Ordnung und $\| - \|$ eine additive Norm auf $\mathcal{H}$ wie in Theorem II.(2.3). Mit $K\mathcal{H}$ sei die Konstantenerweiterung $K \otimes_A \mathcal{H}$ bezeichnet und die Norm $\| - \|$ wie in II.(2.2) auf $K\mathcal{H}$ fortgesetzt.

Dann sind Addition und Multiplikation in $\mathcal{H}$ bzw. $K\mathcal{H}$ bezüglich der durch $\| - \|$ definierten Topologie stetig. Ist $u \in K\mathcal{H}$ invertierbar, dann gibt es ein $g \in G$, so dass für alle $v \in K\mathcal{H}$ mit $\|u - v\| \geq g$ auch v in $K\mathcal{H}$ invertierbar ist, die Menge der invertierbaren Elemente in $K\mathcal{H}$ ist also offen. Inversenbildung auf dieser Menge ist ebenfalls stetig.

Außerdem gilt: Es seien $e' \in \mathcal{O}\mathcal{H} := \mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H}$ und $e \in K\mathcal{H}$ beliebig mit $\|e - e'\| \geq 0$. Dann liegt auch e in $\mathcal{O}\mathcal{H}$.

Beweis: Es sei $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_d)$ die A -Basis von $\mathcal{H}$, bezüglich der die Norm $\| - \|$ in Theorem II.(2.3) definiert ist. Wir stellen uns alle Elemente in $K\mathcal{H}$ in Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ geschrieben vor.

Laut Proposition II.(1.10) sind Addition und Multiplikation in K stetig bezüglich der ν -adischen Topologie.

Die Addition in $K\mathcal{H}$ erfolgt komponentenweise, so dass sich die Stetigkeit der Addition in K direkt auf $\mathcal{H}$ und $K\mathcal{H}$ fortsetzt (ist $\|a - a'\| \geq g$ und $\|b - b'\| \geq g$, dann ist $\|(a + b) - (a' + b')\| \geq g$). Dies folgt auch aus der Tatsache, dass die Topologie auf $K\mathcal{H}$ eine lineare ist.

Die Multiplikation in $\mathcal{H}$ bzw. $K\mathcal{H}$ lässt sich mit den Strukturkonstanten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ beschreiben:

$$b_i \cdot b_j = \sum_{k=1}^d b_k h_{ijk} \quad \text{mit} \quad h_{ijk} \in A \quad \text{für} \quad 1 \leq i, j, k \leq d.$$

Daraus ergibt sich eine Multiplikationsformel für beliebige Elemente $x \in \mathcal{H}$ und $y \in \mathcal{H}$, die in jeder Komponente des Ergebnisses einen bilinearen Ausdruck in den Koordinaten von x und y hat:

$$\left(\sum_{i=1}^d b_i x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^d b_j y_j \right) = \sum_{k=1}^d \left(b_k \cdot \sum_{i,j} x_i y_j h_{ijk} \right).$$

Also existiert für jedes $g \in G$ ein $g' \in G$, so dass aus $\|x - x'\| \geq g'$ und $\|y - y'\| \geq g'$ folgt, dass $\|xy - x'y'\| \geq g$ ist. Deswegen ist die Multiplikation in $\mathcal{H}$ stetig.

Für die Inversenbildung kann man die (rechts-)reguläre Darstellung betrachten:

Ein Element $u \in K\mathcal{H}$ ist nach Lemma II.(2.8) genau dann invertierbar in $K\mathcal{H}$, wenn die Matrix von u in der regulären Darstellung bezüglich einer beliebigen Basis Determinante ungleich 0 hat.

Die Abbildung, die einem Element $u \in K\mathcal{H}$ die Determinante seiner Abbildungsmatrix in der rechts-regulären Darstellung bezüglich $\mathcal{B}$ zuordnet, ist aber eine stetige Funktion und K ist hausdorffsch, deswegen folgt: Wenn u in $K\mathcal{H}$ invertierbar ist, dann gibt es ein $g \in G$, so dass alle $v \in K\mathcal{H}$ mit $\|u - v\| \geq g$ ebenfalls invertierbar in $K\mathcal{H}$ sind. Also ist die Menge der invertierbaren Elemente in $K\mathcal{H}$ offen.

Die Inversenbildung in $K \setminus \{0\}$ ist laut Proposition II.(1.10) stetig. Das Inverse eines invertierbaren Elements in $K\mathcal{H}$ errechnet sich komponentenweise als Lösung eines linearen Gleichungssystems (reguläre Darstellung!). Nach der Cramerschen Regel hängt das Inverse von u also stetig von u ab.

Die Elemente e in $K\mathcal{H}$ mit $\|e\| \geq 0$ sind genau diejenigen, deren sämtliche Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$ im Bewertungsring $\mathcal{O}$ liegen, also die Elemente von $\mathcal{O}\mathcal{H}$. Deswegen folgt aus $e' \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ und $\|e - e'\| \geq 0$, dass $\|e\| = \|e - e' + e'\| \geq \min\{\|e - e'\|, \|e'\|\} \geq 0$ ist, dass also $e \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ liegt. $\square$

II.3 Vervollständigung

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die hier angegebene Konstruktion von Vervollständigungen nicht die übliche Konstruktion mit Cauchy-Folgen und Nullfolgen ist. In Anhang A wird aber gezeigt, dass zumindest der hier definierte Begriff der Vollständigkeit äquivalent zum üblichen ist.

(3.1) Definition/Proposition (Vervollständigung, vgl. [Mat86, Kapitel 8])

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring, M ein $\mathcal{H}$ -Modul, Λ eine gerichtete Menge und $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein System von Untermoduln mit $M_\lambda \supseteq M_\mu$, wenn $\lambda \leq \mu$ ist. Die **Vervollständigung** $\hat{M}$ von M ist der inverse Limes $\varprojlim M/M_\lambda$ des Systems $\{M/M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ mit der folgenden Topologie: Jedes M/M_λ wird mit der diskreten Topologie versehen, das direkte Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} M/M_\lambda$ mit der Produkttopologie und $\hat{M}$ mit der Teilraumtopologie in diesem Produkt. Diese Topologie ist eine lineare Topologie auf $\hat{M}$, die durch das System der Kerne $\ker p_\mu$ der Projektionen $p_\mu : \varprojlim M/M_\lambda \rightarrow M/M_\mu$ auf die Komponenten des direkten Produkts gegeben ist. Die Vervollständigung von $\hat{M}$ bezüglich dieser Topologie ist als topologischer Modul isomorph zu $\hat{M}$.

Die kanonische, lineare Abbildung $i : M \rightarrow \hat{M}$, $m \mapsto (m + M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist stetig und das Bild $i(M)$ liegt dicht in $\hat{M}$. Der Kern $\ker i$ von i ist gleich $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, die Abbildung i ist also genau dann injektiv, wenn die lineare Topologie auf M hausdorffsch ist.

Ein Modul M heißt **vollständig in der linearen Topologie bezüglich $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$** , wenn die Abbildung i ein Isomorphismus der topologischen Moduln M (lineare Topologie, siehe Definition II.(1.1)) und $\hat{M}$ ist. Also ist $\hat{M}$ selbst vollständig.

Ist $M = \mathcal{H}$ und sind die M_λ zweiseitige Ideale, dann ist die Vervollständigung $\hat{\mathcal{H}}$ ein Ring, da dann alle M/M_λ Ringe sind und $\hat{M}$ der inverse Limes von Ringen ist.

Beweis: Alle Behauptungen sind in [Mat86, Kapitel 8] bewiesen, wobei dort aber unnötigerweise der Ring $\mathcal{H}$ als kommutativ vorausgesetzt ist. Der Vollständigkeit halber sind in Abschnitt A.(1.3) im Anhang komplette Beweise zu finden. $\square$

Bemerkungen:

- Der Begriff „vollständig“ hier entspricht „vollständig und separiert“ in Bourbaki-Terminologie.
- Im Allgemeinen braucht man für den Begriff der Vollständigkeit nicht nur eine Topologie, sondern eine uniforme Struktur. Eine lineare Topologie liefert aber automatisch eine solche, da die Umgebungen eines beliebigen Punktes einfach die verschobenen Nullumgebungen sind.

(3.2) Proposition (Vervollständigung und Teilmodul, vgl. [Mat86, Kapitel 8])

Die Bezeichnungen seien wie in Definition II.(3.1). Ist $N \subseteq M$ ein Teilmodul, dann sind die Raumtopologie von N in M und die Quotiententopologie auf M/N lineare Topologien, gegeben durch die Systeme $\{N \cap M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ bzw. $\{(M_\lambda + N)/N \mid \lambda \in \Lambda\}$. Die folgenden Vervollständigungen sind jeweils mit diesen Topologien zu verstehen.

Die kurze, exakte Sequenz $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$ induziert im inversen Limes die exakte Sequenz $0 \rightarrow \hat{N} \rightarrow \hat{M} \rightarrow \widehat{(M/N)}$, wobei die letzte Abbildung surjektiv ist, wenn die Topologie eine I -adische ist (I ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$). Wir können also $\hat{N}$ als Untermodul von $\hat{M}$ auffassen. Es ist $\hat{N}$ genau der topologische Abschluss von $i(N)$ in $\hat{M}$.

Außerdem ist **Vervollständigen ein Funktor**: Sind M und M' mit linearen Topologien versehen, dann gibt es zu jedem stetigen Homomorphismus $f : M \rightarrow M'$ genau einen stetigen Homomorphismus $\hat{f} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}'$, der mit den kanonischen Abbildungen $M \rightarrow \hat{M}$ und $M' \rightarrow \hat{M}'$ insofern verträglich ist, als das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ \hat{M} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{M}' \end{array}$$

kommutativ ist. Sind M und M' Ringe (und die Nullumgebungen für die lineare Topologie zweiseitige Ideale, so dass $\hat{M}$ und $\hat{M}'$ ebenfalls Ringe sind) und ist f ein stetiger Ringhomomorphismus, dann ist auch $\hat{f}$ ein stetiger Ringhomomorphismus.

Beweis: Siehe [Mat86, Kapitel 8]. Obwohl in [Mat86] alle Ringe kommutativ sind, wird dies in den Beweisen zu dieser Proposition in Kapitel 8 nicht benötigt. Der Vollständigkeit halber ist in Abschnitt A.(1.4) ein kompletter Beweis zu finden. $\square$

(3.3) Korollar (Vervollständigung und direkte Summen)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Ring und L und N zwei $\mathcal{H}$ -Moduln, die jeweils mit einer linearen Topologie bezüglich eines Systems von Untermoduln $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ bzw. $\{N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ mit derselben gerichteten Indexmenge Λ versehen sind. Versieht man dann wie in Korollar II.(1.3) die direkte Summe $M := L \oplus N$ durch $M_\lambda := L_\lambda \oplus N_\lambda$ für $\lambda \in \Lambda$ ebenfalls mit einer linearen Topologie, dann ist die Vervollständigung $\hat{M}$ von M bezüglich dieser Topologie als topologischer $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zur direkten Summe der Vervollständigungen $\hat{L}$ und $\hat{N}$.

Beweis: Wir betrachten die aufspaltende kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} M \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{r} \end{array} N \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} 0,$$

in der alle Abbildungen laut Korollar II.(1.3) stetige Homomorphismen sind. Nach Proposition II.(3.2) erhalten wir daraus die folgenden stetigen Homomorphismen zwischen den Vervollständigungen

$$\hat{0} \longrightarrow \hat{L} \xrightarrow{\hat{j}} \hat{M} \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{p}} \\ \xleftarrow{\hat{r}} \end{array} \hat{N} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \hat{0},$$

wobei, wenn wir alle Inklusionen von Moduln in ihre Vervollständigung mit i bezeichnen, $i \circ j = \hat{j} \circ i$, $i \circ p = \hat{p} \circ i$ und $i \circ r = \hat{r} \circ i$ gelten. Wegen $p \circ r = \text{id}_N$ ist also $i = i \circ p \circ r = \hat{p} \circ i \circ r = \hat{p} \circ \hat{r} \circ i$ und

damit $\hat{p} \circ \hat{r} = \text{id}_{\hat{N}}$ als eindeutiger, stetiger Homomorphismus von $\hat{N}$ nach $\hat{N}$, der auf dem Bild $i(N)$ der Teilmenge $N \subseteq M$ gleich der Identität ist (siehe wieder Proposition II.(3.2)). Also ist insbesondere $\hat{p}$ surjektiv und wir haben eine zerfallende, kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \hat{L} \rightarrow \hat{M} \rightarrow \hat{N} \rightarrow 0$. $\square$

(3.4) Proposition (Universelle Eigenschaft der Topologie von $\hat{M}$)

Die Bezeichnungen seien wie in Definition II.(3.1). Zusätzlich sei

$$j : \hat{M} = \varprojlim M/M_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} M/M_\lambda$$

die Inklusion in das direkte Produkt und $p_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} M/M_\lambda \rightarrow M/M_\mu$ jeweils die kanonische Projektion auf die μ -Komponente. Dann hat die Topologie von $\hat{M}$ die folgende universelle Eigenschaft: Ein $\mathcal{H}$ -Modul-Homomorphismus $\varphi : X \rightarrow \hat{M}$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $p_\mu \circ j \circ \varphi : X \rightarrow M/M_\mu$ für jedes $\mu \in \Lambda$ stetig ist, wobei M/M_μ mit der diskreten Topologie versehen ist.

Beweis: Wir setzen die universellen Eigenschaften der Teilraumtopologie und der Produkttopologie zusammen: Da $\hat{M}$ die Teilraumtopologie im direkten Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} M/M_\lambda$ hat, ist φ genau dann stetig, wenn $j \circ \varphi$ stetig ist. Aus der universellen Eigenschaft der Produkttopologie folgt dann die Behauptung. $\square$

(3.5) Proposition (Vervollständigung hängt nur von der Topologie ab)

Die Bezeichnungen seien wie in Definition II.(3.1). Dann hängt die Vervollständigung $\hat{M}$ nur von der Topologie ab und nicht von der speziellen Wahl der Umgebungsbasis.

Genauer: Ist M mit einer zweiten linearen Topologie versehen, die von einem anderen System von Nullumgebungen $\{N_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ mit einer gerichteten Menge Γ herkommt (wir bezeichnen diese Kopie von M mit M'), so dass aber die Identität in beiden Richtungen stetig ist, dann induziert die Identität einen Isomorphismus $\hat{M} \cong \hat{M}'$, insbesondere ist M genau dann vollständig bezüglich der linearen Topologie, die durch $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ gegeben ist, wenn M vollständig ist bezüglich der linearen Topologie, die durch $\{N_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ gegeben ist.

Beweis: Wir bezeichnen den Modul M mit der zweiten linearen Topologie mit M' . Nach Voraussetzung ist die Identität in beiden Richtungen stetig, so dass es also nach Proposition II.(3.2) stetige Abbildungen f und g gibt, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\text{id}} & M' & \xrightarrow{\text{id}} & M & \xrightarrow{\text{id}} & M' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{M} & \xrightarrow{f} & \hat{M}' & \xrightarrow{g} & \hat{M} & \xrightarrow{f} & \hat{M}' \end{array}$$

kommutativ machen. Wegen der Eindeutigkeit in Proposition II.(3.2) ist $g \circ f$ bzw. $f \circ g$ jeweils gleich der identischen Abbildung auf $\hat{M}$ bzw. $\hat{M}'$. $\square$

(3.6) Bemerkung (Vervollständigung mit Netzen)

Üblicherweise wird die Vervollständigung mit Cauchy-Folgen und Nullfolgen definiert. Eine Verallgemeinerung davon benutzt den Begriff des „Netzes“. Im Anhang in den Abschnitten A.(1.5) bis A.(1.8) findet sich diese Definition, eine andere Konstruktion der Vervollständigung und der Beweis, dass diese äquivalent zur obigen Definition ist. Gleichzeitig wird so der Zusammenhang mit der üblichen Definition der Vervollständigung mittels Cauchy-Folgen klar.

Insbesondere lässt sich ein Integritätsbereich bezüglich einer Bewertung vervollständigen. Dieser Fall wird sich später als besonders wichtig erweisen. Zusätzlich lässt sich in diesem Fall Einiges über die auftretenden Quotientenkörper und Restklassenkörper sagen:

(3.7) Proposition (Vervollständigung bezüglich einer Bewertung und Quotientenkörper)

Es sei $(A, K, G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem. Dann ist wie in Proposition II.(1.10) durch das System $\{M_\lambda \mid \lambda \in G\}$ von Idealen von A mit $M_\lambda := \{x \in A \mid v(x) \geq \lambda\}$ bzw. durch das System $\{N_\lambda \mid \lambda \in G\}$ von Idealen von $\mathcal{O}$ mit $N_\lambda := \{x \in \mathcal{O} \mid v(x) \geq \lambda\}$ bzw. durch das System $\{L_\lambda \mid \lambda \in G\}$ von $\mathcal{O}$ -Untermoduln von K mit $L_\lambda := \{x \in K \mid v(x) \geq \lambda\}$ sowohl auf A als auch auf $\mathcal{O}$ und K jeweils eine lineare Topologie definiert. Wir bezeichnen mit $\hat{A}$ die Vervollständigung von A und mit $\hat{\mathcal{O}}$ die Vervollständigung von $\mathcal{O}$. Dann ist $\hat{\mathcal{O}}$ ein Integritätsbereich. Wir bezeichnen mit $\hat{K}$ den **Quotientenkörper von $\hat{\mathcal{O}}$** , also **nicht** die Vervollständigung von K bezüglich obiger Topologie!

Die stetigen Einbettungen $A \hookrightarrow \mathcal{O} \hookrightarrow K$ zusammen mit den kanonischen Einbettungen $A \hookrightarrow \hat{A}$ und $\mathcal{O} \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}$ und $\hat{\mathcal{O}} \hookrightarrow \hat{K}$ und der aus der Funktorialität der Vervollständigung (siehe Theorem II.(3.2)) kommenden Abbildungen $\hat{A} \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}$ bilden ein kommutatives Diagramm stetiger, injektiver Ringhomomorphismen:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\ \hat{A} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}} & \longrightarrow & \hat{K}. \end{array} \quad (\text{II.1})$$

Die Bewertung $v : A \rightarrow G \cup \{\infty\}$ lässt sich zu einer Bewertung auf $\hat{\mathcal{O}}$ fortsetzen und liefert damit automatisch eine Fortsetzung von $v : A \rightarrow G \cup \{\infty\}$ auf $\hat{A}$. Es gilt $v(x) \geq 0$ für alle $x \in \hat{\mathcal{O}}$. Die Fortsetzung v ist dadurch eindeutig bestimmt, dass die Abbildung $v : \hat{\mathcal{O}} \setminus \{0\} \rightarrow G$ stetig ist, wenn man G mit der diskreten Topologie versieht. Die Topologien auf $\hat{A}$ und $\hat{\mathcal{O}}$ (aus dem Vervollständigungsprozess) sind gleich der v -adischen Topologie (bezüglich der fortgesetzten Bewertung). Wir setzen v von $\hat{\mathcal{O}}$ auf den Quotientenkörper $\hat{K}$ fort und versehen $\hat{K}$ mit der v -adischen Topologie.

Dann gibt es genau einen stetigen, injektiven Körperhomomorphismus $j : K \hookrightarrow \hat{K}$, der mit den Inklusionen $\mathcal{O} \hookrightarrow K$ und $\mathcal{O} \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}} \hookrightarrow \hat{K}$ verträglich ist, also das kommutative Diagramm II.1 rechts komplettiert. Das Bild von j liegt dicht in $\hat{K}$.

Ist $\mathfrak{m} := \{x \in A \mid v(x) > 0\}$ und $\hat{\mathfrak{m}}$ die Vervollständigung des A -Untermoduls $\mathfrak{m}$ von A , dann ist $\hat{\mathfrak{m}} = \{x \in \hat{A} \mid v(x) > 0\}$ und es gilt $\hat{A} = A + \hat{\mathfrak{m}}$, so dass also $A/\mathfrak{m} \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$ als Ringe ist.

Die Vervollständigung $\hat{\mathcal{O}}$ ist gleich dem Bewertungsring von v in $\hat{K}$ und $\hat{K}$ ist die Lokalisierung von $\hat{\mathcal{O}}$ bei der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $A \setminus \{0\}$.

Der Schnitt $K \cap \hat{A}$ (betrachtet als Teilmengen von $\hat{K}$) ist im Bewertungsring $\mathcal{O}$ enthalten.

Beweis: Das kommutative Diagramm II.1 ergibt sich direkt aus den Eigenschaften der Vervollständigung in Theorem II.(3.2). Wegen $M_\lambda = A \cap N_\lambda$ und $N_\lambda = \mathcal{O} \cap L_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ ist A nämlich nach Proposition II.(1.2) mit der Teilraumtopologie der linearen Topologie auf $\mathcal{O}$, und $\mathcal{O}$ mit der Teilraumtopologie der linearen Topologie auf K versehen. Es ist klar, dass alle vorkommenden Topologien hausdorffsch sind, da sie von Bewertungen kommen. Man beachte, dass wir zunächst noch keine Abbildung $K \rightarrow \hat{K}$ haben, da $\hat{K}$ nicht als Vervollständigung von K bezüglich der v -adischen Topologie, sondern als Quotientenkörper von $\hat{\mathcal{O}}$ definiert wurde.

Die Fortsetzung von v auf $\hat{\mathcal{O}}$ lässt sich explizit angeben: Ist $0 \neq \hat{x} = (x_\lambda + N_\lambda)_{\lambda \in G} \in \hat{\mathcal{O}}$ ein Element im inversen Limes $\varprojlim \mathcal{O}/N_\lambda = \hat{\mathcal{O}}$, dann gibt es ein $\mu \in G$ mit $x_\mu \notin N_\mu$. Wir setzen dann $v(\hat{x}) := v(x_\mu)$. Dies hängt nicht von der Wahl von μ ab: Sei nämlich $\mu' \in G$ gegeben mit $x_{\mu'} \notin N_{\mu'}$ und (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $\mu' > \mu$, dann ist $x_{\mu'} - x_\mu \in N_\mu$ (da $\hat{x}$ im inversen Limes ist), also $v(x_{\mu'} - x_\mu) \geq \mu$. Weil aber $x_\mu \notin N_\mu$ ist, ist $v(x_\mu) < \mu$. Also gilt $v(x_{\mu'}) = v(x_\mu + x_{\mu'} - x_\mu) = v(x_\mu)$ wegen Lemma II.(1.6).(iii).

Diese Festlegung ist also wohldefiniert, liefert eine Fortsetzung ($x \in \mathcal{O}$ ist als $(x + N_\lambda)_{\lambda \in G} \in \hat{\mathcal{O}}$ eingebettet) und erfüllt die Eigenschaften einer additiven Bewertung (per direkter Vererbung der Eigenschaften von v , wenn man „weit genug hinten schaut“). Sie schränkt auf analoge Weise auf den inversen Limes $\hat{A}$ ein und offensichtlich ist $v(\hat{x}) \geq 0$ für alle $\hat{x} \in \hat{\mathcal{O}}$. Der Beweis der Eindeutigkeit folgt weiter unten.

Aus der Existenz von v folgt mit Lemma II.(1.6).(iv), dass $\hat{\mathcal{O}}$ ein Integritätsbereich ist.

Wir zeigen zunächst, dass die Topologie auf $\hat{\mathcal{O}}$ aus der Konstruktion der Vervollständigung gleich der v -adischen Topologie mit dieser Fortsetzung ist: Laut II.(3.1) ist die Topologie auf $\hat{\mathcal{O}}$ eine lineare To-

pologie, die durch das System der Kerne $\ker p_\mu$ der Projektionen $p_\mu : \varprojlim \mathcal{O}/N_\lambda \rightarrow \mathcal{O}/N_\mu$ definiert ist.

Ist nun $(x + N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = \hat{x} \in \ker p_\mu$, also $x_\mu \in N_\mu$, dann ist nach obiger Festsetzung $v(\hat{x}) = v(x_{\mu'})$ für ein beliebiges μ' mit $x_{\mu'} \notin N_{\mu'}$. Daraus folgt $\mu' > \mu$, also $x_{\mu'} - x_\mu \in N_\mu$ und damit $v(x_{\mu'}) \geq \mu$. Ist andererseits $v(\hat{x}) \geq \mu$, dann ist entsprechend $x_{\mu'} \in N_\mu$ für jedes μ' mit $x_{\mu'} \notin N_{\mu'}$, also $x_\mu \in N_\mu$. Demnach sind die Kerne der Projektionen p_μ sogar genau die Kugeln um die Null bezüglich der fortgesetzten Bewertung v . Genau so argumentiert man für $\hat{A}$.

Dann ist aber genau wie in II.(1.10) die Abbildung $v : \hat{\mathcal{O}} \setminus \{0\} \rightarrow G$ stetig, wenn man G mit der diskreten Topologie versieht. Daraus folgt die Eindeutigkeit der Fortsetzung, da $\mathcal{O}$ dicht in $\hat{\mathcal{O}}$ liegt und es deswegen höchstens eine stetige Fortsetzung der stetigen Abbildung $v : \mathcal{O} \setminus \{0\} \rightarrow G$ gibt.

Wir konstruieren nun einen injektiven, stetigen Körperhomomorphismus $j : K \rightarrow \hat{K}$. Da K der Quotientenkörper von $\mathcal{O}$ ist, hat er folgende (universelle) Eigenschaft: Ist $i : \mathcal{O} \hookrightarrow K$ die Inklusion, R ein kommutativer Ring und $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus, so dass die Bilder der Elemente von $\mathcal{O} \setminus \{0\}$ invertierbar sind, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $j : K \rightarrow R$ mit $\varphi = j \circ i$. Dies wenden wir auf $R := \hat{K}$ und $\varphi : \mathcal{O} \hookrightarrow \hat{K}$ an und erhalten zunächst einen Ringhomomorphismus $j : K \rightarrow \hat{K}$, der Diagramm II.1 kommutativ macht. Da K ein Körper ist, ist j injektiv und ein Körperhomomorphismus. Wir fassen K von nun an als Teilmenge von $\hat{K}$ auf.

Die Abbildung j ist dadurch gegeben, dass man für ein Element $a/b \in K$ mit $a, b \in A$ jeweils a und b einzeln abbildet (mit φ) und dann in $\hat{K}$ dividiert. Deswegen ist die Bewertung v auf $\hat{K}$ eine Fortsetzung von v auf K . Dementsprechend ist die Inklusion stetig, da sowohl K als auch $\hat{K}$ mit der v -adischen Topologie versehen sind. Da Inversenbildung in $\hat{K} \setminus \{0\}$ und Multiplikation in $\hat{K}$ stetig sind, können wir ein Element $a/b \in \hat{K}$ mit $a, b \in \hat{\mathcal{O}}$ beliebig genau durch ein Element in K approximieren, indem wir a und b jeweils durch Elemente in $a', b' \in \mathcal{O}$ so genau approximieren, dass $v(a/b - a'/b')$ groß genug ist. Also liegt K dicht in $\hat{K}$.

Die Gleichung $\hat{A} = A + \hat{m}$ folgt so: Sind $\mu > 0$ und $0 \neq \hat{x} = (x_\lambda + N_\lambda)_{\lambda \in G} \in \hat{A}$ beliebig, dann ist $v(\hat{x} - x_\mu) > \mu > 0$, da aus $x_\lambda - x_\mu \notin N_\lambda$ folgt, dass $\lambda > \mu$ ist. Also ist $\hat{x} - x_\mu \in \hat{m}$. Deswegen ist $A/\mathfrak{m} \cong \hat{A}/\hat{m}$. Genau so kann man für $\mathcal{O}$ argumentieren.

Offensichtlich gilt für alle Elemente $\hat{y} \in \hat{m}$, dass $v(\hat{y}) > 0$ ist. Sei nun umgekehrt $\hat{x} \in \hat{A}$ mit $v(\hat{x}) > 0$. Wegen $\hat{A} = A + \hat{m}$ ist $\hat{x}$ von der Form $\hat{x} = a + \hat{y}$ für ein $a \in A$ und ein $\hat{y} \in \hat{m}$. Aus $v(\hat{x}) > 0$ und $v(\hat{y}) > 0$ folgt nun, dass $v(a) > 0$ ist und damit $a \in \mathfrak{m}$, also auch $a \in \hat{m}$. Damit ist gezeigt, dass $\hat{m} = \{\hat{x} \in \hat{A} \mid v(\hat{x}) > 0\}$ ist.

Wir zeigen als nächstes, dass $\hat{\mathcal{O}}$ der Bewertungsring von v in $\hat{K}$ ist. Bereits oben wurde gezeigt, dass $v(\hat{x}) \geq 0$ ist für alle $\hat{x} \in \hat{\mathcal{O}}$.

Dazu brauchen wir zunächst eine Hilfsaussage: Ist $\hat{x} = (x_\lambda + N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \hat{\mathcal{O}}$ mit $v(\hat{x}) = \mu > 0$ und $y \in \mathcal{O}$ mit $v(y) \leq \mu$, dann gibt es ein $\hat{z} \in \hat{\mathcal{O}}$ mit $\hat{z} \cdot y = \hat{x}$, es ist also $\hat{x}/y \in \hat{\mathcal{O}} \subseteq \hat{K}$. Das Element $\hat{z} = (z_\lambda + N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ lässt sich explizit angeben: Wir setzen nämlich $z_{\lambda-\mu} := 0$ für alle $\lambda \leq \mu$ und $z_{\lambda-\mu} := x_\lambda/y$ für alle $\lambda > \mu$, in letzterem Fall ist nämlich $v(x_\lambda) = \mu$ (sonst wäre $v(\hat{x}) > \mu$), also ist $z_{\lambda-\mu} \in \mathcal{O}$. Das so gebildete Element $\hat{z}$ liegt im inversen Limes, denn für $\gamma > \lambda > 0$ folgt $v(z_\gamma - z_\lambda) = v(x_{\gamma+\mu}/y - x_{\lambda+\mu}/y) \geq \lambda$ und für $\lambda \leq 0$ ist sowieso $N_\lambda = \mathcal{O}$. Außerdem ist $y \cdot \hat{z} = \hat{x}$, denn für $\lambda > 0$ ist $v(y \cdot z_\lambda - x_\lambda) = v(y \cdot x_{\lambda+\mu}/y - x_\lambda) \geq \lambda$.

Sei nun $\hat{a}/\hat{b} \in \hat{K}$ mit $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{\mathcal{O}}$ gegeben mit $v(\hat{a}/\hat{b}) \geq 0$, also $v(\hat{a}) \geq v(\hat{b})$. Ist $v(\hat{b}) > 0$, dann können wir die Hilfsaussage benutzen und mit einem Element aus $\mathcal{O}$ kürzen, so dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v(\hat{b}) = 0$ annehmen können. Wir zeigen nun, dass $\hat{b}$ in $\hat{\mathcal{O}}$ invertierbar ist, indem wir explizit ein Inverses $\hat{c} = (c_\lambda + N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \hat{\mathcal{O}}$ angeben: Ist nämlich $\hat{b} = (b_\lambda + N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $v(\hat{b}) = 0$, dann gilt $b_\lambda \notin N_\lambda$ für alle $\lambda > 0$ (sonst wäre $v(\hat{b}) > 0$) und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $b_\lambda = 1$ ist für alle $\lambda \leq 0$. Dann setzen wir $c_\lambda := 1$ für alle $\lambda \leq 0$ und $c_\lambda := b_\lambda^{-1} \in \mathcal{O}$ für $\lambda > 0$, da in letzterem Fall $v(b_\lambda) = 0$, also b_λ im Bewertungsring $\mathcal{O}$ invertierbar ist. Das so gebildete Element $\hat{c}$ liegt im inversen Limes, da aus $0 < \lambda < \gamma$ und $v(b_\gamma - b_\lambda) \geq \lambda$ sofort

$$v(b_\lambda^{-1} - b_\gamma^{-1}) = v\left(\frac{b_\gamma - b_\lambda}{b_\lambda \cdot b_\gamma}\right) = v(b_\gamma - b_\lambda) \geq \lambda$$

folgt. Für $\lambda \leq 0$ ist sowieso $N_\lambda = \mathcal{O}$. Offensichtlich ist $\hat{c}$ das Inverse von $\hat{b}$ und liegt in $\hat{\mathcal{O}}$. Damit ist gezeigt, dass $1/\hat{b}$ und damit auch $\hat{a}/\hat{b}$ in $\hat{\mathcal{O}}$ liegt.

Andererseits haben wir damit auch gleich gezeigt, dass $\hat{K}$ die Lokalisierung von $\hat{\mathcal{O}}$ bei der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $A \setminus \{0\}$ ist. Ist nämlich $\hat{a}/\hat{b} \in \hat{K}$ beliebig mit $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{\mathcal{O}}$, dann können wir diesen Bruch so mit einem Element $c \in A$ erweitern, dass $\hat{a}/\hat{b} = \hat{a}/c \cdot c/\hat{b}$ ist mit $v(c/\hat{b}) \geq 0$, so dass also $c/\hat{b}$ im Bewertungsring $\hat{\mathcal{O}}$ liegt (man beachte, dass nach Voraussetzung $v : K \rightarrow G \cup \{\infty\}$ surjektiv und K der Quotientenkörper von A ist, so dass in A Elemente mit beliebig großen v -Werten existieren).

Ist $x \in K \cap \hat{A}$, dann ist $v(x) \geq 0$, da $\hat{A}$ im Bewertungsring $\hat{\mathcal{O}}$ von $\hat{K}$ enthalten ist. Also liegt x im Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K . $\square$

Bemerkung: Im Allgemeinen ist der Schnitt $K \cap \hat{A}$ echt größer als A , wie man schon daran sieht, dass der Grenzwert $-\sum_{i=0}^{\infty} 4^i$ in der Vervollständigung $\mathbb{Z}_2$ von $\mathbb{Z}$ bezüglich der 2-adischen Bewertung gleich $1/3$ ist, wenn man ihn in der entsprechenden Vervollständigung $\mathbb{Q}_2$ von $\mathbb{Q}$ betrachtet.

Diese Resultate über kommutative, bewertete Ringe lassen sich auf Ordnungen über solchen Ringen verallgemeinern:

(3.8) Bemerkung (Vervollständigung einer Ordnung bezüglich einer Norm)

Es sei $(A, K, G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem, $\mathcal{H}$ eine A -Ordnung und $\| - \|$ eine additive Norm auf $\mathcal{H}$ wie in Theorem II.(2.3). Dann sind die Nullumgebungen $B_g(0)$ zweiseitige Ideale in $\mathcal{H}$, so dass also die Vervollständigung von $\mathcal{H}$ bezüglich der Normtopologie eine $\hat{A}$ -Algebra ist, wobei $\hat{A}$ die Vervollständigung des Grundrings A bezüglich der v -adischen Topologie ist.

Beweis: Wegen Lemma II.(2.4) sind die Nullumgebungen $B_g(0)$ zweiseitige Ideale, da nach Konstruktion der Norm $\|h\| \geq 0$ ist für alle $h \in \mathcal{H}$. Dadurch hat der inverse Limes $\hat{\mathcal{H}}$ eine Multiplikation. Der Ringhomomorphismus $j : A \rightarrow \mathcal{H}$, der $\mathcal{H}$ nach Definition I.(2.1) zu einer Algebra macht, ist stetig, also gibt es laut Proposition II.(3.2) genau einen stetigen Ringhomomorphismus $\hat{j} : \hat{A} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$, der mit den Inklusionen verträglich ist. Dieser macht $\hat{\mathcal{H}}$ zu einer $\hat{A}$ -Algebra. Dass das Bild von $\hat{j}$ im Zentrum von $\hat{\mathcal{H}}$ liegt, folgt daraus, dass A dicht in $\hat{A}$ und $\mathcal{H}$ dicht in $\hat{\mathcal{H}}$ liegt und deswegen aus Stetigkeitsgründen $\hat{j}(a)h = h\hat{j}(a)$ nicht nur für $a \in A$ und $h \in \mathcal{H}$, sondern auch für $a \in \hat{A}$ und $h \in \hat{\mathcal{H}}$ gilt. $\square$

Es folgen einige Hilfssätze für solche vervollständigte Ordnungen, insbesondere um sie mit der Konstantenerweiterung mit der Vervollständigung des Grundrings zu vergleichen.

(3.9) Proposition (Vervollständigung ist Tensorierung, vgl. [Mat86, 8.7])

Es sei A ein kommutativer, noetherscher Ring, I ein Ideal in A und M ein endlich erzeugter A -Modul. Dann ist die I -adische Vervollständigung $\hat{M}$ von M als topologischer $\hat{A}$ -Modul isomorph zur Konstantenerweiterung $\hat{A} \otimes_A M$, wobei $\hat{A}$ die I -adische Vervollständigung von A ist. Ist also A vollständig bezüglich der I -adischen Topologie, dann ist auch M vollständig bezüglich der I -adischen Topologie.

Beweis: Siehe [Mat86, 8.7]. Am angegebenen Ort wird zwar eine Bijektion angegeben, aber nicht auf die Topologien bzw. die Stetigkeit eingegangen.

Die Vervollständigung $\hat{A}$ hat nach der Konstruktion in II.(3.1) eine lineare Topologie, die durch die Kerne der Projektionen $p_n : \hat{A} \rightarrow A/I^n$ gegeben ist. Durch das Mengensystem $(\ker p_n \otimes_A M)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine lineare Topologie auf der Konstantenerweiterung $\hat{A} \otimes_A M$ definiert. Man kann nachrechnen, dass die bijektive A -lineare Abbildung $\hat{A} \otimes_A M \rightarrow \hat{M}$, $(a_n + I^n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes_A m \mapsto (a_n m + I^n M)_{n \in \mathbb{N}}$ genau die Mengen der Umgebungsbasis von $\hat{A} \otimes_A M$ auf die Mengen der Umgebungsbasis von $\hat{M}$ abbildet. Deswegen ist diese Abbildung ein Isomorphismus topologischer $\hat{A}$ -Moduln. $\square$

(3.10) Proposition (Flachheit der Vervollständigung, vgl. [Mat86, 8.14])

Es sei A ein kommutativer, noetherscher Ring, I ein Ideal in A und A mit der I -adischen Topologie versehen. Dann sind äquivalent:

- (i) $I \subseteq \text{rad } A$ (ii) die I -adische Vervollständigung $\hat{A}$ von A ist treu-flach über A .

Beweis: Siehe [Mat86, 8.14]. □

(3.11) Proposition (Vollständigkeit von A -Ordnungen, vgl. Bemerkung nach [CR81, (5.22)])

Es sei A ein kommutativer, lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $\mathcal{H}$ eine A -Ordnung.

Wenn A vollständig bezüglich der $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie ist, dann ist auch $\mathcal{H}$ vollständig in der $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie.

Ist A nicht vollständig und $\hat{A}$ die Vervollständigung, dann gilt für die Vervollständigung $\hat{\mathcal{H}}$ von $\mathcal{H}$ bezüglich der $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie:

$$\hat{\mathcal{H}} \cong \hat{A} \otimes_A \mathcal{H} \quad (\text{als topologische } \hat{A}\text{-Moduln}).$$

Beweis: Siehe [CR81, nach (5.22)]. □

Bemerkung: A ist nicht als noethersch vorausgesetzt, sonst könnte man Proposition II.(3.9) verwenden. Diese Proposition ist nur zum Vergleich aufgeführt und wird später nicht verwendet. In [CR81] wird nämlich eine andere Definition von Vollständigkeit benutzt (Cauchyfolgen). Diese ist zwar äquivalent, jedoch ist diese Tatsache nicht unmittelbar klar (siehe Bemerkung II.(3.6)).

Dasselbe gilt analog für den Fall einer Ordnung über einem Ring A mit einer Bewertung, wenn die Topologie durch die Bewertung bzw. durch eine Norm gegeben ist, auch wenn der Grundring nicht noethersch ist, wie zum Beispiel bei nicht-diskreten Bewertungsringen.

(3.12) Proposition (Vollständigkeit von A -Ordnungen bezüglich einer Bewertung) (vgl. Bemerkung nach [CR81, (5.22)])

Es sei $(A, K, G, \nu, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem, $\mathcal{H}$ eine A -Ordnung und $\| - \|$ eine additive Norm auf $\mathcal{H}$ wie in Theorem II.(2.3).

Ist A vollständig bezüglich der ν -adischen Topologie, dann ist auch $\mathcal{H}$ vollständig in der Normtopologie. Ist A nicht vollständig und $\hat{A}$ die Vervollständigung, dann gilt für die Vervollständigung $\hat{\mathcal{H}}$ von $\mathcal{H}$ bezüglich der Normtopologie:

$$\hat{\mathcal{H}} \cong \hat{A} \otimes_A \mathcal{H} \quad (\text{als topologische } \hat{A}\text{-Algebren}).$$

Beweis: Es sei $A_g := \{a \in A \mid \nu(a) \geq g\}$ und $\mathcal{H}_g := \{h \in \mathcal{H} \mid \|h\| \geq g\}$, jeweils für $g \in G$. Weiter sei $(b_1, \dots, b_d)$ die A -Basis von $\mathcal{H}$, bezüglich der wie in Theorem II.(2.3) die Norm $\| - \|$ definiert ist. Die analoge Definition mit der $\hat{A}$ -Basis $(1_{\hat{A}} \otimes_A b_1, \dots, 1_{\hat{A}} \otimes_A b_d)$ von $\hat{A} \otimes_A \mathcal{H}$ setzt die Norm fort. Damit ist auch $\hat{A} \otimes_A \mathcal{H}$ mit einer linearen Topologie versehen.

Wir definieren eine A -lineare Abbildung $\varphi : \hat{A} \otimes_A \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$ durch die Vorschrift

$$(a_g + A_g)_{g \in G} \otimes_A h \mapsto (a_g h + \mathcal{H}_g)_{g \in G} \quad \text{für } a_g \in A \text{ und } h \in \mathcal{H}.$$

Das Element auf der rechten Seite liegt tatsächlich in $\hat{\mathcal{H}}$, da $\|h\| \geq 0$ ist für alle $h \in \mathcal{H}$ und deswegen $\|a_g h - a_{g'} h\| \geq g$ ist für alle $g, g' \in G$ mit $g' > g$. Man kann nachrechnen, dass φ sogar ein Homomorphismus von $\hat{A}$ -Algebren ist.

Ist umgekehrt $\hat{h} = (h_g + \mathcal{H}_g)_{g \in G}$ ein Element von $\hat{\mathcal{H}}$, so können wir jedes h_g als Linearkombination in der obigen Basis schreiben: $h_g = \sum_{i=1}^d \alpha_{g,i} b_i$ für alle $g \in G$, wobei $\alpha_{g,i} \in A$ ist für $g \in G$ und $1 \leq i \leq d$. Dabei folgt für $g < g'$ aus $\|h_g - h_{g'}\| \geq g$ sofort $\nu(\alpha_{g,i} - \alpha_{g',i}) \geq g$ für $1 \leq i \leq d$ wegen der Definition der Norm. Also ist $\hat{a}_i := (\alpha_{g,i} + A_g)_{g \in G}$ für $1 \leq i \leq d$ jeweils ein Element von $\hat{A}$ und damit durch $\hat{h} \mapsto \sum_{i=1}^d \hat{a}_i \otimes_A b_i$ die Umkehrabbildung von φ konstruiert. Deswegen ist φ bijektiv.

Man überzeugt sich leicht, dass die Mengen der Umgebungsbasis von $\hat{A} \otimes_{\hat{A}} \mathcal{H}$ von φ genau auf diejenigen der Umgebungsbasis von $\hat{\mathcal{H}}$ abgebildet werden, so dass also φ ein Isomorphismus von topologischen $\hat{A}$ -Algebren ist. $\square$

Bemerkung: Der Unterschied zu Proposition II.(3.11) ist nur die Art der Definition der Topologie: Dort war die Topologie als $\mathfrak{m}$ -adische definiert, hier als von einer Bewertung bzw. Norm induzierte.

II.4 Heben von Idempotenten

Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, dann wird ein Idempotent $e \in A$ unter φ auf ein Idempotent $\varphi(e)$ oder auf 0 abgebildet. Unter dem Begriff „Heben von Idempotenten“ versteht man den Vorgang in der anderen Richtung: Man finde zu einem Idempotent $f \in B$ ein Idempotent $e \in A$ mit $\varphi(e) = f$. In diesem Abschnitt geht es um einige Aussagen zu diesem Thema.

Das folgende Lemma erweist sich als extrem nützlich:

(4.1) Lemma (Radikal einer Algebra über einem lokalen Ring, vgl. [CR81, (5.22)])

Es sei A ein kommutativer, lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k und $\mathcal{H}$ eine A -Algebra, die als A -Modul endlich erzeugt ist. Wir setzen $\overline{\mathcal{H}} := \mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H}$, eine endlich-dimensionale k -Algebra, und bezeichnen die kanonische Projektion mit $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}$. Dann gilt:

- (i) $\text{rad } \mathcal{H} = \varphi^{-1}(\text{rad } \overline{\mathcal{H}}) \supseteq \mathfrak{m}\mathcal{H}$.
- (ii) Die Abbildung φ induziert einen Isomorphismus von k -Algebren $\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H} \cong \overline{\mathcal{H}}/\text{rad } \overline{\mathcal{H}}$.
- (iii) $\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ ist ein halbeinfacher artinscher Ring.
- (iv) Es gibt eine natürliche Zahl j mit $(\text{rad } \mathcal{H})^j \subseteq \mathfrak{m}\mathcal{H}$.
- (v) Es ist $\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H} \cong k \otimes_A \mathcal{H}$ als k -Algebren.

Beweis: Die Aussagen (i) bis (iv) sind wörtlich aus [CR81, (5.22)] übernommen. Die Abbildung $h \mapsto 1_k \otimes h$ hat das Ideal $\mathfrak{m}\mathcal{H}$ im Kern und induziert einen Isomorphismus von k -Algebren, dessen Inverses durch $x \otimes h \mapsto x \cdot (h + \mathfrak{m}\mathcal{H})$ gegeben ist, was (v) beweist. $\square$

Da Ideale eines Rings, die von Idempotenten erzeugt werden, projektive Untermoduln des regulären Moduls sind, wird folgende Proposition relevant:

(4.2) Proposition (Kopf bestimmt Isomorphietyp von projektiven Moduln, vgl. [CR81, (6.6)])

Es sei I ein zweiseitiges Ideal in einem Ring $\mathcal{H}$ mit $I \subseteq \text{rad } \mathcal{H}$ und Q und Q' zwei endlich erzeugte, projektive $\mathcal{H}$ -Moduln. Dann ist $Q \cong Q'$ genau dann, wenn $Q/QI \cong Q'/Q'I$ als $\mathcal{H}/I$ -Moduln ist.

Beweis: Siehe [CR81, (6.6)]. $\square$

Das folgende Theorem ist Standard. Der Beweis ist aber komplett angegeben, da er an unsere Definition der Vervollständigung angepasst ist und wir später Ideen und Methoden daraus anderweitig brauchen (in Kapitel IV).

(4.3) Theorem (Heben von Idempotenten, vgl. [CR81, (6.7) und (6.8)])

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring und I ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$ mit $I \subseteq \text{rad } \mathcal{H}$. Weiter sei $\mathcal{H}$ vollständig in der I -adischen Topologie. Wir setzen $\overline{\mathcal{H}} := \mathcal{H}/I$ und bezeichnen die kanonische Projektion mit Querstrich: $h \mapsto \bar{h} := h + I$. Dann gilt:

- (i) Zu jedem Idempotent $f \in \overline{\mathcal{H}}$ existiert ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ mit $\bar{e} = f$.
- (ii) Für beliebige Idempotenten $e_1, e_2 \in \mathcal{H}$ sind die $\mathcal{H}$ -Rechtsmoduln $e_1\mathcal{H}$ und $e_2\mathcal{H}$ genau dann isomorph, wenn $\bar{e}_1\mathcal{H}$ und $\bar{e}_2\mathcal{H}$ isomorph als $\overline{\mathcal{H}}$ -Rechtsmoduln sind.

(iii) Ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ ist genau dann primitiv, wenn $\bar{e}$ primitiv in $\overline{\mathcal{H}}$ ist.

(iv) Jede Zerlegung

$$\mathcal{H} = e_1 \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus e_n \mathcal{H} \quad \text{mit } e_i^2 = e_i$$

in unzerlegbare Rechtsideale $e_i \mathcal{H}$ von $\mathcal{H}$ ergibt eine Zerlegung

$$\overline{\mathcal{H}} = \bar{e}_1 \overline{\mathcal{H}} \oplus \cdots \oplus \bar{e}_n \overline{\mathcal{H}} \quad \text{mit } \bar{e}_i^2 = \bar{e}_i$$

in unzerlegbare Rechtsideale $\bar{e}_i \overline{\mathcal{H}}$ von $\overline{\mathcal{H}}$. Umgekehrt kommt jede solche Zerlegung von $\overline{\mathcal{H}}$ von einer von $\mathcal{H}$, man kann also Idempotenten simultan heben.

Beweis: Siehe auch [CR81, (6.7) und (6.8)].

Wir betrachten zunächst eine Folge von Polynomen in $\mathbb{Z}[X]$, die wir aus der Identität

$$1 = (X + (1 - X))^{2t} = \sum_{s=0}^{2t} \binom{2t}{s} X^{2t-s} (1 - X)^s \quad \text{für } t \in \mathbb{N} \quad (\text{II.2})$$

gewinnen, indem wir die Summe nur bis t laufen lassen:

$$f_t := \sum_{s=0}^t \binom{2t}{s} X^{2t-s} (1 - X)^s, \quad \text{für } t \in \mathbb{N}.$$

Für diese Polynome gilt in $\mathbb{Z}[X]$ für $t \geq 1$:

- (a) $f_t \in \mathbb{Z}[X]$.
- (b) $f_t \equiv 0 \pmod{X^t}$ und $f_t \equiv 1 \pmod{(1 - X)^t}$.
- (c) $f_t \equiv f_t^2 \pmod{X^t \cdot (1 - X)^t}$.
- (d) $f_t \equiv f_{t+1} \pmod{X^t \cdot (1 - X)^t}$.
- (e) $f_t \equiv X \pmod{X \cdot (1 - X)}$.

Die Aussage (a) ist klar, da Binomialkoeffizienten ganzzahlig sind. Aussage (b) gilt, da aus $s \leq t$ folgt, dass $2t - s \geq t$ ist, und damit jeder Summand in der Definition von f_t durch X^t teilbar ist. Andererseits ist $1 - f_t$ durch $(1 - X)^t$ teilbar, da $1 - f_t$ gleich der Summe über die Summanden in Gleichung II.2 ist, für die $s > t$ ist.

Nun ist aber (c) einfach: $f_t - f_t^2 = f_t \cdot (1 - f_t)$ ist nämlich sowohl durch X^t als auch durch $(1 - X)^t$ teilbar und letztere sind teilerfremd. Auch (d) folgt sofort aus (b), da f_{t+1} erst recht durch X^t und $f_{t+1} - 1$ durch $(1 - X)^t$ teilbar ist. Damit ist $f_t - f_{t+1} = (1 - f_{t+1}) - (1 - f_t)$ sowohl durch X^t als auch durch $(1 - X)^t$ teilbar, also auch durch $X^t \cdot (1 - X)^t$. Aussage (e) folgt, da alle Summanden von f_t außer dem für $s = 0$ durch $X \cdot (1 - X)$ teilbar sind und $X^{2t} - X$ sowohl durch X als auch durch $(1 - X)$ teilbar ist.

Ist nun $f \in \overline{\mathcal{H}}$ ein Idempotent, so wählen wir zunächst ein Element $h \in \mathcal{H}$ mit $\bar{h} = f$. Dann ist $\bar{h}^2 - \bar{h} = 0$, also $h^2 - h \in I$. Wir können nun explizit ein Element in $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}} = \varprojlim \mathcal{H}/I^t$ angeben durch $e := (f_t(h) + I^t)_{t \in \mathbb{N}}$. Wegen (d) liegt e im inversen Limes und damit wegen der Vollständigkeit auch in $\mathcal{H}$, wegen (c) ist es ein Idempotent und wegen (e) ist $e - h \in I$ und damit $\bar{e} = f$.

Aussage (ii) folgt sofort aus Proposition II.(4.2) und der Tatsache, dass $e_1 \mathcal{H}$ und $e_2 \mathcal{H}$ projektive Moduln sind für zwei Idempotenten $e_1, e_2 \in \mathcal{H}$ und dass $\bar{e}_i \overline{\mathcal{H}} = \bar{e}_i \overline{\mathcal{H}}$ als $\overline{\mathcal{H}}$ -Moduln sind.

Für Aussage (iii) sei $e \in \mathcal{H}$ ein Idempotent, und $\bar{e} = f_1 + f_2$ mit zwei orthogonalen Idempotenten $f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{H}}$. Zu zeigen ist, dass auch e nicht primitiv ist. Dazu wählen wir ein $h \in \mathcal{H}$ mit $\bar{h} = f_1$ und setzen $g := ehe$. Dann ist $\bar{g} = \bar{e} f_1 \bar{e} = f_1$ und $eg = g = ge$. Ist nun wie oben e_1 gleich dem Element $(f_t(g) + I^t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, so gilt nicht nur $e_1^2 = e_1$, sondern auch $ee_1 = e_1 = e_1 e$ und $\bar{e}_1 = f_1$. Setzen wir nun $e_2 := e - e_1$, so folgt $e_2^2 = e_2$ und $\bar{e}_2 = f_2$. Außerdem ist $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$ und e ist nicht primitiv. Da die andere Richtung trivial ist, haben wir Aussage (iii) bewiesen.

Aussage (iv) enthält die Aussagen aus Theorem [CR81, (6.8)], wo allerdings zusätzliche Voraussetzungen gemacht werden, die aber nur für die Vollständigkeit gebraucht werden, die hier sowieso vorausgesetzt ist: Zu zeigen ist also noch, dass eine Zerlegung der Eins $1 = f_1 + \cdots + f_n$ in paarweise orthogonale Idempotenten in $\overline{\mathcal{H}}$ simultan hochgehoben werden kann. Dies ist für $n = 1$ trivial und für $n = 2$ kann man einfach f_1 zu e_1 heben und erhält mit $1 - e_1$ automatisch eine Hebung für f_2 .

Dann geht man per Induktion vor: Wenn die Aussage für $n - 1$ bewiesen ist, dann gruppiert man f_1 und f_2 zu $f := f_1 + f_2$ zusammen und wählt nach Induktionsannahme eine simultane Hebung $1 = e + e_3 + \cdots + e_n$ zu paarweise orthogonalen Idempotenten, wobei jeweils e_i über f_i für $3 \leq i \leq n$ und e über f liegt. Für f_1 geht man nun vor wie im Beweis zu Aussage (iii). Dies liefert ein e_1 mit $\bar{e}_1 = f_1$ und $ee_1 = e_1 = e_1e$. Dann ist $e_1 \cdot e_i = (e_1 \cdot e) \cdot e_i = 0 = e_i \cdot (e \cdot e_1) = e_i \cdot e_1$ für alle $i \geq 3$ und $e_2 := e - e_1$ ein Idempotent in $\mathcal{H}$, das orthogonal zu e_1 und allen e_i für $3 \leq i \leq n$ ist und für das $\bar{e}_2 = f_2$ gilt. Damit ist Aussage (iv) bewiesen. $\square$

Dieses Theorem über das Heben von Idempotenten ist insbesondere in zwei Situationen anwendbar:

(4.4) Proposition (Algebra über einem noetherschen, vollständigen, lokalen Ring)

Es sei A ein kommutativer, noetherscher, lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, der in der $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie vollständig ist. Weiter sei $\mathcal{H}$ eine als A -Modul endlich erzeugte A -Algebra und darin $I := \mathfrak{m}\mathcal{H} \subseteq \text{rad } \mathcal{H}$ (nach Lemma II.(4.1)). Dann ist I ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$ und die I -adische Topologie auf $\mathcal{H}$ stimmt mit der $\mathfrak{m}$ -adischen ($\mathcal{H}$ als A -Modul aufgefasst) überein.

Die Algebra $\mathcal{H}$ ist vollständig in der I -adischen Topologie, so dass man mit Theorem II.(4.3) Idempotenten von $\mathcal{H}/I$ nach $\mathcal{H}$ heben kann.

Beweis: Da alle unsere Algebren eine Eins haben (siehe Definition I.(2.1)), ist $I^k = \mathfrak{m}^k \mathcal{H}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (siehe Lemma II.(2.5)). Deswegen stimmt die I -adische Topologie von $\mathcal{H}$ mit der $\mathfrak{m}$ -adischen überein. Aus Proposition II.(3.9) folgt, dass $\mathcal{H}$ mit A vollständig in der $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie ist. Dann ist aber $\mathcal{H}$ wegen Proposition II.(3.5) auch vollständig in der I -adischen Topologie. $\square$

(4.5) Proposition (Ordnung über einem vollständigen Bewertungsrings)

Es sei $(\mathcal{O}, K, G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem und G_+ die Menge der positiven Elemente in G . Es sei $\mathcal{O}$ vollständig bezüglich der v -adischen Topologie, $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung und $\| - \|$ eine additive Norm wie in Theorem II.(2.3). Es sei $T \subseteq G_+ \cup \{\infty\}$ eine archimedische Teilmenge und I das Ideal $I_T^{\mathcal{H}} = \{h \in \mathcal{H} \mid v(h) \in T\}$ (vergleiche Definition II.(2.6)).

Dann ist $\mathcal{H}$ vollständig in der $I_T^{\mathcal{H}}$ -adischen Topologie, so dass man mit Theorem II.(4.3) Idempotenten von $\mathcal{H}/I_T^{\mathcal{H}}$ nach $\mathcal{H}$ heben kann.

Beweis: Aus Korollar II.(2.7) folgt, dass die $I_T^{\mathcal{H}}$ -adische Topologie auf $\mathcal{H}$ mit der Normtopologie übereinstimmt. Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{O}$ in der v -adischen Topologie ist die Algebra $\mathcal{H}$ nach II.(3.12) bezüglich der Normtopologie vollständig. Die Vervollständigung hängt aber nach II.(3.5) nur von der Topologie ab, also ist $\mathcal{H}$ auch vollständig bezüglich der $I_T^{\mathcal{H}}$ -adischen Topologie und man kann Theorem II.(4.3) anwenden. $\square$

Bemerkung: Der Unterschied zwischen den beiden letzten Propositionen ist, dass einmal der Grundring als noethersch vorausgesetzt ist. Hat man dies nicht, braucht man dafür Projektivität über dem Grundring, außerdem muss das Ideal I in $\mathcal{H}$ so gewählt sein, dass die Elemente in den Potenzen von I in der Norm „immer größere Werte“ bekommen (dies wird hier durch die Voraussetzung „archimedisch“ für T erreicht). Die Voraussetzung „Bewertungsring“ wird hier wegen der Verwendung von II.(3.12) gebraucht, damit die I -adische Topologie wirklich dieselbe ist wie die Normtopologie (und keine feinere).

II.5 Semilokale und semiperfekte Ringe

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Semiperfektheit eines Ringes eingeführt. Es wird gezeigt, dass für semiperfekte Ringe der Satz von Krull und Schmidt für projektive Moduln gilt. Semiperfekte

Ringe werden in Kapitel V zur Definition der Klebeabbildung (siehe V.(3.1)) und für die Brauer-Reziprozität (siehe V.(4.1)) verwendet und spielen deswegen eine wichtige Rolle bei den Umformulierungen der James-Geck-Vermutung in Kapitel VII.

(5.1) Definition (Semilokaler Ring, vgl. [CR81, (5.27)])

Ein Ring $\mathcal{H}$ heißt **semilokal**, wenn $\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ ein halbeinfacher, artinscher Ring ist.

(5.2) Proposition (Endlich erzeugte Algebra über lokalem Ring, vgl. [CR81, (5.28)(ii)])

Sei A ein kommutativer, lokaler Ring und $\mathcal{H}$ eine endlich erzeugte A -Algebra. Dann ist $\mathcal{H}$ **semilokal**.

Beweis: Siehe [CR81, (5.28)(ii)]. □

(5.3) Lemma (Radikalfaktor projektiver Moduln)

Es sei $\mathcal{H}$ ein semilokaler Ring und $e \in \mathcal{H}$ ein Idempotent. Weiter sei die kanonische Projektion $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ mit π bezeichnet. Dann ist der Radikalfaktor $e\mathcal{H}/\text{rad}(e\mathcal{H})$ des projektiven $\mathcal{H}$ -Moduls $e\mathcal{H}$ isomorph zu $\pi(e)(\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H})$.

Beweis: Wegen [CR81, (5.29)] ist $\text{rad}(e\mathcal{H}) = (e\mathcal{H}) \cdot \text{rad } \mathcal{H} = e \text{rad } \mathcal{H}$, da $\mathcal{H}$ semilokal ist. Andererseits ist $e \text{rad } \mathcal{H} = e\mathcal{H} \cap \text{rad } \mathcal{H}$. Also ist die Einschränkung von π auf $e\mathcal{H}$ gleich der Projektion auf $e\mathcal{H}/\text{rad}(e\mathcal{H})$. Das Bild von $e\mathcal{H}$ unter π ist aber gleich $\pi(e)(\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H})$. □

Der folgende Begriff ist für diese Arbeit von grundlegender Bedeutung.

(5.4) Definition (Semiperfekter Ring, vgl. [CR81, (6.22)])

Ein Ring $\mathcal{H}$ heißt **semiperfekt**, wenn $\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ ein halbeinfacher, artinscher Ring ist (d.h. $\mathcal{H}$ ist semilokal) und sich jedes Idempotent in $\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ zu einem Idempotent in $\mathcal{H}$ heben lässt.

Die folgende Proposition ist genau so einfach zu beweisen wie nützlich, da alle endlich-dimensionalen Algebren über Körpern artinsche Ringe sind:

(5.5) Proposition (Artinsche Ringe sind semiperfekt, vgl. [CR81, (5.19)])

Jeder artinsche Ring $\mathcal{H}$ ist **semiperfekt**.

Beweisidee: Mit [CR81, (5.19)] ist $\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ halbeinfach und wegen [CR81, (6.5)] ist $\mathcal{H}$ vollständig ($\text{rad } \mathcal{H}$ ist nilpotent), also kann man Idempotenten nach Theorem II.(4.3) heben. □

(5.6) Theorem (Projektive Hüllen bei semiperfekten Ringen, vgl. [CR81, (6.23)])

Es seien $\mathcal{H}$ ein semiperfekter Ring und $N := \text{rad } \mathcal{H}$. Dann hat jeder endlich erzeugte $\mathcal{H}$ -Modul X eine projektive Hülle. **Genauer:** Es gibt einen endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{H}$ -Modul P mit $P/PN \cong X/XN$ als $\mathcal{H}/N$ -Moduln und dieser Isomorphismus lässt sich zu einer surjektiven Abbildung $P \rightarrow X$ heben, so dass P damit eine projektive Hülle von X ist.

Beweis: Siehe [CR81, (6.23)]. □

Bemerkung: Die Tatsache, dass jeder Modul X eine projektive Hülle hat, ist nach [CR81, (6.26)(i)] sogar äquivalent damit, dass $\mathcal{H}$ semiperfekt ist. In II.(5.10) unten wird ein Spezialfall dieses Ergebnisses bewiesen.

(5.7) Korollar (Projektive Moduln sind Summen von PIMs)

Es seien $\mathcal{H}$ ein semiperfekter Ring und Q ein endlich erzeugter, projektiver $\mathcal{H}$ -Modul. Dann ist Q isomorph zu einer (endlichen) Summe von projektiv unzerlegbaren Moduln der Form $e_i\mathcal{H}$ mit primitiven Idempotenten $e_i \in \mathcal{H}$.

Beweis: Wir wenden Theorem II.(5.6) für $X = Q$ an: Wie im Beweis dieses Resultats in [CR81, (6.23)] findet man P , indem man die einfachen direkten Summanden des halbeinfachen $\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ -Moduls $Q/\text{rad } Q \cong Q/(Q \text{rad } \mathcal{H})$ (siehe [CR81, (5.29)]) in der Form $\bar{e}_i(\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H})$ schreibt und die primitiven Idempotenten $\bar{e}_i$ zu primitiven Idempotenten $e_i \in \mathcal{H}$ hebt. Wegen Lemma II.(5.3) ist der Radikalfaktor $e_i\mathcal{H}/\text{rad}(e_i\mathcal{H})$ jeweils als $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zu $\bar{e}_i(\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H})$. Der projektive Modul Q ist natürlich seine eigene projektive Hülle, welche eindeutig ist, also hat Q die behauptete Form. □

(5.8) Lemma (Kopf der projektiven Hülle eines einfachen Moduls)

Es seien $\mathcal{H}$ ein Ring, V ein einfacher $\mathcal{H}$ -Modul und $f : P \rightarrow V$ eine projektive Hülle von V . Dann ist $\ker f = \text{rad } P$, also hat P einen einfachen Kopf.

Beweis: Angenommen P hätte zwei verschiedene maximale Untermoduln $M_1 := \ker f$ und M_2 . Dann könnte $f|_{M_2}$ nicht gleich der Nullabbildung sein (sonst wäre $M_2 \subseteq M_1$), wäre also surjektiv (V ist einfach). Dann wäre aber f nicht essentiell und P damit keine projektive Hülle. Also hat P einen eindeutigen, maximalen Untermodul $\text{rad } P = \ker f$. $\square$

Bemerkung: An diesem und dem vorigen Ergebnis sieht man, dass die endlich erzeugten, projektiv unzerlegbaren Moduln semiperfekter Ringe genau die projektiven Hüllen der einfachen Moduln sind. Es gibt also zu jedem Isomorphietyp einfacher Moduln genau einen Isomorphietyp projektiv unzerlegbarer Moduln.

(5.9) Theorem (Krull-Schmidt für projektive Moduln über semiperfekten Ringen)

Es sei $\mathcal{H}$ ein semiperfekter Ring. Jeder endlich erzeugte, projektive $\mathcal{H}$ -Modul ist isomorph zu einer endlichen direkten Summe projektiv unzerlegbarer $\mathcal{H}$ -Moduln, nämlich den projektiven Hüllen der einfachen Konstituenten seines Kopfs. Sind zwei endliche direkte Summen projektiv unzerlegbarer $\mathcal{H}$ -Moduln als Ganzes isomorph, gilt also

$$\bigoplus_{i=1}^n P_i \cong \bigoplus_{j=1}^m Q_j \quad (\text{II.3})$$

dann ist $n = m$ und es gibt eine Permutation π auf $\{1, \dots, n\}$, so dass $P_i \cong Q_{\pi(i)}$ für $1 \leq i \leq n$ gilt.

Beweis: Nach Korollar II.(5.7) ist jeder endlich erzeugte, projektive Modul isomorph zu einer endlichen direkten Summe projektiv unzerlegbarer Moduln. Diese Zerlegung findet man, indem man die projektiven Hüllen der einfachen Konstituenten des Kopfs des Moduls nimmt und deren direkte Summe bildet. Dies sind nur endlich viele, da der Kopf auch endlich erzeugt ist.

Da nach II.(5.7) und II.(5.8) die projektiv unzerlegbaren $\mathcal{H}$ -Moduln genau diejenigen Projektiven mit einfachem Kopf sind, sind zwei projektiv unzerlegbare Moduln wegen Proposition II.(4.2) genau dann isomorph, wenn ihre Köpfe isomorph sind, dann sind sie nämlich jeweils die projektive Hülle ihres einfachen Kopfes.

In Gleichung II.3 folgt aus der Isomorphie der Moduln als Ganzes die Isomorphie der Köpfe auf beiden Seiten. Das Radikal auf beiden Seiten ist aber jeweils die direkte Summe der Radikale der projektiv unzerlegbaren Summanden (siehe [CR81, Exercise 5.11]). Also hängt der Isomorphietyp und die Vielfachheit der P_i bzw. der Q_j nur vom Isomorphietyp und der Vielfachheit der einfachen Konstituenten im Kopf des Moduls ab. $\square$

(5.10) Proposition (Semiperfektheit und Heben von Idempotenten)

Es sei $\mathcal{H}$ eine Algebra über dem kommutativen, lokalen Ring A , die als A -Modul endlich erzeugt ist, und k sei der Restklassenkörper von A . Dann ist $\mathcal{H}$ genau dann semiperfekt, wenn zu jedem Idempotent $\bar{e} \in k\mathcal{H}$ ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ existiert mit $1_k \otimes_A e = \bar{e}$.

Beweis: Die kanonische Projektion $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ sei mit π und das maximale Ideal von A mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet. Nach Lemma II.(4.1).(v) ist $\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H} \cong k \otimes_A \mathcal{H} = k\mathcal{H}$ und $\mathfrak{m}\mathcal{H} \subseteq \text{rad } \mathcal{H}$ (Teil (i)). Wir haben also die Restklassenvergrößerung $\psi : \mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$. Wir bezeichnen die kanonische Projektion $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H}$ mit φ , es gilt also $\pi = \psi \circ \varphi$. Außerdem ist nach Lemma II.(4.1) das Radikal von $\mathcal{H}$ genau das Urbild des Radikals von $\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H}$ unter φ . Deswegen hat ψ als Kern das Radikal von $\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ ist isomorph zum Radikalfaktor von $\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H}$.

Angenommen zu jedem Idempotent $\bar{e} \in k\mathcal{H}$ existiert ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ mit $1_k \otimes_A e = \bar{e}$. Nach Proposition II.(5.2) ist $\mathcal{H}$ semilokal. Es bleibt also zu zeigen, dass zu jedem Idempotent $\hat{e} \in \mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{H}$ ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ existiert mit $\pi(e) = \hat{e}$. Da aber $k\mathcal{H} \cong \mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H}$ als endlich-dimensionale k -Algebra

semiperfekt ist, gibt es zu jedem Idempotent $\hat{e} \in \mathcal{H} / \text{rad } \mathcal{H}$ ein Idempotent $\bar{e} \in \mathcal{H} / \mathfrak{m}\mathcal{H}$ mit $\psi(\bar{e}) = \hat{e}$. Dazu gibt es aber nach Voraussetzung ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ mit $\varphi(e) = 1_k \otimes_A e = \bar{e}$.

Also ist $(\psi \circ \varphi)(e) = \pi(e) = \hat{e}$ und wir haben gezeigt, dass $\mathcal{H}$ semiperfekt ist.

Sei umgekehrt $\mathcal{H}$ semiperfekt. Ist $\bar{e} \in \mathcal{H} / \mathfrak{m}\mathcal{H}$ ein Idempotent, so ist $\hat{e} := \psi(\bar{e}) \in \mathcal{H} / \text{rad } \mathcal{H}$ ebenfalls eines, wir finden also nach Voraussetzung ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ mit $\pi(e) = \psi(\varphi(e)) = \hat{e} = \psi(\bar{e}) \in \mathcal{H} / \text{rad } \mathcal{H}$. Es kann nun aber sein, dass $e' := \varphi(e) \neq \bar{e}$ ist, obgleich beide unter ψ auf $\hat{e}$ abgebildet werden!

Nach Lemma II.(5.3) bedeutet $\psi(e') = \psi(\bar{e})$ aber, dass die projektiven $k\mathcal{H}$ -Moduln $\bar{e}k\mathcal{H}$ und $e'k\mathcal{H}$ isomorph sind, da ihre Radikalfaktoren beide isomorph zu $\hat{e} \cdot (\mathcal{H} / \text{rad } \mathcal{H})$ sind (vgl. Proposition II.(4.2)). Also gibt es eine Einheit $\bar{u} \in k\mathcal{H}$ mit $\bar{u}e'\bar{u}^{-1} = \bar{e}$. Ist nun u ein beliebiges Urbild von $\bar{u}$ unter φ , dann ist u in $\mathcal{H}$ invertierbar: In $k\mathcal{H}$ ist die Linksmultiplikation mit $\bar{u}$ surjektiv. Also gilt in $\mathcal{H}$, dass $u\mathcal{H} + \mathfrak{m}\mathcal{H} = \mathcal{H}$ ist, nach dem Nakayama-Lemma ist also $u\mathcal{H} = \mathcal{H}$, also hat u ein Rechtsinverses u_r . Analog hat u aber auch ein Linksinverses u_l . Dann gilt aber $u_l = u_l \cdot u \cdot u_r = u_r$. Also ist $e := ue'u^{-1}$ ein Idempotent in $\mathcal{H}$ mit $\varphi(e) = \bar{e}$. $\square$

II.6 Verbesserung von Idempotenten

Unter dem Stichwort „Verbesserung von Idempotenten“ verstehen wir den Vorgang, zu einem Idempotent, das nach einem Hebungsprozess in einer Vervollständigung gefunden wurde, nachträglich durch einen Approximationsvorgang ein „besseres“ zu finden, das auch eine Hebung ist, aber keine Vervollständigung braucht. Dadurch kann an vielen Stellen auf die Vervollständigung verzichtet werden.

(6.1) Theorem (Idempotent-Verbesserungssatz, vgl. [Mül95, 3.4.1] bzw. [CR81, Exercise 6.16])

Es sei $(\mathcal{O}, K, G, \nu, \hat{\mathcal{O}})$ ein Bewertungssystem, $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung und die Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$ zerfalle über K . Die Vervollständigung von $\mathcal{O}$ bezüglich ν sei mit $\hat{\mathcal{O}}$ bezeichnet, $\hat{K}$ sei der Quotientenkörper von $\hat{\mathcal{O}}$ und ν sei auf $\hat{\mathcal{O}}$ und $\hat{K}$ fortgesetzt (vergleiche Proposition II.(3.7)). Wie in Theorem II.(2.3) definieren wir mit ν durch Wahl einer Basis in $\mathcal{H}$ eine additive Norm $\| - \|$ auf $\mathcal{H}$ (und den Konstantenerweiterungen). Zusätzlich sei $\hat{e} \in \hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ ein Idempotent und $0 \leq g \in G$ ein Element der Wertegruppe.

Dann gibt es ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ mit $\|e - \hat{e}\| \geq g$.

Beweis: Es gelten die Inklusionen $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \hat{K}$ und $K \subseteq \hat{K}$, so dass also $\hat{K}$ ein Erweiterungskörper von K ist (vergleiche Proposition II.(3.7)) und K in $\hat{K}$ bezüglich der ν -adischen Topologie dicht liegt.

Wir setzen $\hat{J} := \text{rad}(\hat{K}\mathcal{H})$ und $J := \text{rad}(K\mathcal{H})$. Weil K Zerfällungskörper von $K\mathcal{H}$ ist, folgt aus [CR81, (7.9).(i)], dass $\hat{J} = \hat{K} \otimes_K J$ und $\hat{K}\mathcal{H} / \hat{J} \cong \hat{K} \otimes_K (K\mathcal{H} / J)$ ist.

Wir zeigen zunächst die Existenz eines Idempotents $e' \in K\mathcal{H}$ mit $e'\hat{K}\mathcal{H} \cong \hat{e}\hat{K}\mathcal{H}$ als $\hat{K}\mathcal{H}$ -Rechtsmoduln.

Da $K\mathcal{H}$ endlich-dimensional ist, ist es als artinscher Ring semiperfekt und damit insbesondere semilokal (d.h., dass $K\mathcal{H} / J$ halbeinfach und artinsch ist, siehe II.(5.5)), dasselbe gilt für $\hat{K}\mathcal{H}$. Deswegen ist der $\hat{K}\mathcal{H} / \hat{J}$ -Modul $\hat{e}\hat{K}\mathcal{H} / \text{rad}(\hat{e}\hat{K}\mathcal{H})$ mit Lemma II.(5.3) isomorph zum Rechtsideal $\hat{f} \cdot (\hat{K}\mathcal{H} / \hat{J})$ für ein Idempotent $\hat{f} \in \hat{K}\mathcal{H} / \hat{J}$.

Aber K ist Zerfällungskörper für die Algebra $K\mathcal{H} / J$. Also gibt es ein Idempotent $f' \in K\mathcal{H} / J$ mit $\hat{f} \cdot (\hat{K}\mathcal{H} / \hat{J}) \cong f' \cdot (\hat{K}\mathcal{H} / \hat{J})$ (siehe [CR62, (29.21)]). Da $K\mathcal{H}$ semiperfekt ist, lässt sich f' zu einem Idempotent $e' \in K\mathcal{H}$ heben. Nach Proposition II.(4.2) folgt, dass $\hat{e}\hat{K}\mathcal{H} \cong e'\hat{K}\mathcal{H}$ ist, und wir haben e' gefunden.

Dann ist aber auch $(1 - e')\hat{K}\mathcal{H} \cong (1 - \hat{e})\hat{K}\mathcal{H}$, da $\hat{K}\mathcal{H}$ endlich-dimensional ist (siehe Krull-Schmidt-Azumaya [CR81, (6.12)] oder Theorem II.(5.9)). Daher gibt es nach [CR81, Exercise 6.14] eine Einheit $u \in \hat{K}\mathcal{H}$ mit $\hat{e} = ue'u^{-1}$.

Wir approximieren nun u in $\hat{K}\mathcal{H}$ so gut durch ein $v \in K\mathcal{H}$, dass erstens v auch (in $K\mathcal{H}$!) invertierbar ist und zweitens $v \cdot e' \cdot v^{-1} \in K\mathcal{H}$ immer noch so nah an $\hat{e}$ liegt, dass es nicht nur in $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ und damit

in $K\mathcal{H} \cap \hat{\mathcal{O}}\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$ liegt, sondern auch noch die Behauptung des Theorems erfüllt. Dazu benutzen wir die Eigenschaften von Topologien, die durch additive Normen definiert sind (siehe Proposition II.(2.9)):

Sei $0 \leq g \in G$ aus den Voraussetzungen gegeben. Zunächst gibt es ein $g_1 \in G$, so dass jedes $v \in \hat{K}\mathcal{H}$ mit $\|v - u\| \geq g_1$ in $\hat{K}\mathcal{H}$ invertierbar ist (siehe Proposition II.(2.9)). Weiter ist wegen der Stetigkeit der Multiplikation und Inversion in $\hat{K}\mathcal{H}$ die Abbildung $v \mapsto ve'v^{-1}$ stetig (siehe Proposition II.(2.9)). Also gibt es ein $g_2 \in G$, so dass für $\|u - v\| \geq g_2$ auch $\|\hat{e} - ve'v^{-1}\| = \|ue'u^{-1} - ve'v^{-1}\| \geq g$ ist. Da $K\mathcal{H}$ in $\hat{K}\mathcal{H}$ dicht liegt (siehe II.(3.12) und II.(3.7)), können wir nun ein $v \in K\mathcal{H}$ wählen, für das $\|u - v\| \geq \max\{g_1, g_2\}$ ist. Dann ist v genau wie u invertierbar, zunächst in $\hat{K}\mathcal{H}$, da aber daraus nach Lemma II.(2.8) folgt, dass die Determinante von v in der regulären Darstellung auf $\hat{K}\mathcal{H}$ ungleich Null ist, gilt dasselbe auch in $K\mathcal{H}$ und es folgt, dass v auch in $K\mathcal{H}$ invertierbar ist. Außerdem ist $\|\hat{e} - ve'v^{-1}\| \geq g$. Wir setzen $e := ve'v^{-1}$.

Da v und e' in $K\mathcal{H}$ liegen, gilt dies auch für e . Da aber g größer oder gleich 0 ist, ist $\|\hat{e} - e\| \geq 0$, also liegt nach Proposition II.(2.9) auch e in $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ und damit in $\mathcal{H}$. $\square$

(6.2) Proposition (Semiperfekte Ordnungen über Bewertungsringen)

Es sei $(\mathcal{O}, K, G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem, $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung und die Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$ zerfalle über K . Das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ sei mit $\mathfrak{m} = \{x \in \mathcal{O} \mid v(x) > 0\}$ bezeichnet. Die Vervollständigung von $\mathcal{O}$ bezüglich v sei mit $\hat{\mathcal{O}}$ bezeichnet.

Für die Vervollständigung $\hat{\mathcal{H}} \cong \hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ (vergleiche Proposition II.(3.12)) gelte, dass sich Idempotente von $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}/\hat{\mathfrak{m}}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ nach $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ heben lassen, wobei $\hat{\mathfrak{m}}$ das maximale Ideal des Bewertungsringes $\hat{\mathcal{O}}$ ist. Dann ist $\mathcal{H}$ semiperfekt.

Bemerkung: Hier muss man explizit voraussetzen, dass sich Idempotente nach Vervollständigung heben lassen, da v eine nicht-diskrete Bewertung sein kann. In diesem Fall kann man nämlich nicht direkt Theorem II.(4.3) anwenden, da die Topologie in $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ nicht durch ein Ideal in $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ definiert ist.

Beweis: Es sei wie in Proposition II.(3.7) mit $\hat{K}$ der Quotientenkörper von $\hat{\mathcal{O}}$ bezeichnet und v auf $\hat{\mathcal{O}}$ und $\hat{K}$ fortgesetzt. Dann ist $\hat{\mathcal{O}}$ der Bewertungsring in $\hat{K}$ zur fortgesetzten Bewertung v (siehe wieder Proposition II.(3.7)). Wie in Theorem II.(2.3) definieren wir mit v durch Wahl einer Basis in $\mathcal{H}$ eine additive Norm $\| - \|$ auf $\mathcal{H}$ (und den Konstantenerweiterungen). Es ist $\mathfrak{m}\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{H} \mid \|h\| > 0\}$ und $\hat{\mathfrak{m}}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H} = \{h \in \hat{\mathcal{O}}\mathcal{H} \mid \|h\| > 0\}$ (siehe Definition II.(2.6) mit $T := \{g \in G \mid g > 0\} \cup \{\infty\}$).

Wegen Proposition II.(5.10) bleibt zu zeigen, dass sich Idempotente von $\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ heben lassen. Sei also $\bar{f}$ ein Idempotent in $\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{H}$. Wir betrachten ein beliebiges Element $f \in \mathcal{H}$, das über $\bar{f}$ liegt. Es ist ein Idempotent „modulo $\mathfrak{m}\mathcal{H}$ “: $\|f^2 - f\| > 0$. Fassen wir f als Element von $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ auf, so können wir nach Voraussetzung ein Idempotent $\hat{e} \in \hat{\mathcal{H}}$ finden mit $f - \hat{e} \in \hat{\mathfrak{m}}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$, also $\|f - \hat{e}\| > 0$. Da K Zerfällungskörper für $K\mathcal{H}$ ist, können wir nun den Idempotente-Verbesserungssatz II.(6.1) verwenden, um ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ mit $\|e - \hat{e}\| \geq g$ zu finden für irgendein $g > 0$. Dann ist aber wegen $\|e - \hat{e}\| > 0$ und $\|\hat{e} - f\| > 0$ auch $\|e - f\| > 0$, also $e - f \in \mathfrak{m}\mathcal{H}$ und e liegt über dem ursprünglichen $\bar{f}$. $\square$

(6.3) Korollar (Ordnungen über diskreten Bewertungsringen sind semiperfekt)

Es sei $(\mathcal{O}, K, \mathbb{Z}, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem, also v eine diskrete Bewertung. Es sei $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung und K Zerfällungskörper für die Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{H}$ semiperfekt.

Beweis: Das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ sei mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet. Es sei $\hat{\mathcal{O}}$ die Vervollständigung von $\mathcal{O}$ bezüglich der v -adischen Topologie und $\hat{\mathfrak{m}}$ die von $\mathfrak{m}$. Wir benutzen Proposition II.(6.2), es bleibt zu zeigen, dass sich Idempotente von $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}/\hat{\mathfrak{m}}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ nach $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ heben lassen.

Die Menge $T := \{t \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \mid t > 0\}$ ist archimedisch und $\hat{\mathfrak{m}}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H} = I_T^{\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}}$ wegen Proposition II.(2.6), also folgt die Behauptung aus Proposition II.(4.5). $\square$

Kapitel III

Der Polynomring über $\mathbb{Z}$

Dieses Kapitel beginnt mit einem Abschnitt, in dem die Primideale im Polynomring über $\mathbb{Z}$ und im Ring der Laurent-Polynome über $\mathbb{Z}$ klassifiziert werden. Danach wird unter gewissen Voraussetzungen für eine Primidealkette in einem Ring eine additive Bewertung konstruiert, die insofern angepasst ist, als im zugehörigen Bewertungsring ebenfalls eine Primidealkette existiert, die über der ursprünglichen liegt. Dies ermöglicht, im Quotientenkörper eine entsprechende Kette von ineinander enthaltenen Bewertungsringen zu definieren. Als Letztes wird noch gezeigt, dass Ordnungen über diesen Bewertungsringen semiperfekt sind.

All diese Konstruktionen werden bei der Umformulierung der James-Vermutung in Kapitel VII benutzt.

III.1 Primideale von $\mathbb{Z}[v]$

Im ganzen Abschnitt sei v eine Unbestimmte und $\mathbb{Z}[v]$ der Polynomring über dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Zunächst wollen wir uns einen Überblick über das Spektrum von $\mathbb{Z}[v]$ verschaffen.

(1.1) Definition (Inhalt von Polynomen über $\mathbb{Q}$, vgl. [Jac74, 2.16])

Der **Inhalt** eines Polynoms aus $\mathbb{Z}[v]$ ist der (positive) größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten und Polynome mit Inhalt 1 heißen **primitiv**. Wir definieren für ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[v]$ seinen **Inhalt** als dasjenige positive Element $\gamma \in \mathbb{Q}$, für das p/γ ein primitives Polynom in $\mathbb{Z}[v]$ ist (vgl. [Jac74, 2.16, Lemma 1]). Der Inhalt ist eindeutig bestimmt.

(1.2) Proposition (Primideale von $\mathbb{Z}[v]$)

Der Polynomring $\mathbb{Z}[v]$ hat die folgenden Primideale:

- (i) Das Nullideal $\{0\}$.
- (ii) Die Ideale $q\mathbb{Z}[v]$, wobei q ein in $\mathbb{Z}[v]$ irreduzibles Polynom mit Inhalt 1 ist.
- (iii) Die Ideale $\ell\mathbb{Z}[v]$, wobei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist.
- (iv) Die Ideale $\ell\mathbb{Z}[v] + p\mathbb{Z}[v]$, wobei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und p ein normiertes, in $\mathbb{Z}[v]$ irreduzibles Polynom ist, dessen Bild unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z}[v] \rightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ irreduzibel ist.

Die Krull-Dimension von $\mathbb{Z}[v]$ ist 2, alle Primidealketten maximaler Länge sind entweder von der Form $\{0\} \subsetneq \ell\mathbb{Z}[v] \subsetneq \ell\mathbb{Z}[v] + p\mathbb{Z}[v]$ für eine Primzahl $\ell \in \mathbb{N}$ und ein Polynom p wie in (iv) oder von der Form $\{0\} \subsetneq q\mathbb{Z}[v] \subsetneq \ell\mathbb{Z}[v] + p\mathbb{Z}[v]$ für ein Primideal $q\mathbb{Z}[v]$ wie in (ii) und ein Primideal $\ell\mathbb{Z}[v] + p\mathbb{Z}[v]$ wie in (iv).

Beweis: Die Primideale lassen sich zunächst unterteilen nach der Charakteristik des Restklassenringes. Anders gesagt, man kann den Schnitt mit dem Teilring $\mathbb{Z}$ betrachten: Sei $\mathfrak{p} \triangleleft \mathbb{Z}[v]$ ein Primideal.

Dann ist der Schnitt $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ ein Primideal in $\mathbb{Z}$, also entweder das Nullideal oder ein Ideal, das von einer rationalen Primzahl ℓ erzeugt wird.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass der Restklassenring Charakteristik 0 hat, dass also $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ ist. Dann können wir nämlich die Lokalisierung des Ringes $\mathbb{Z}[v]$ an der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ betrachten, diese ist isomorph zu $\mathbb{Q}[v]$, dem Polynomring über den rationalen Zahlen. Wir können nun alle Primideale von $\mathbb{Z}[v]$, die S nicht schneiden, bestimmen, indem wir die Primideale von $\mathbb{Q}[v]$ bestimmen und „zurückschneiden“ (siehe z.B. [AM69, Proposition 3.11]).

Da aber $\mathbb{Q}[v]$ als Polynomring in einer Unbestimmten über einem Körper ein Hauptidealring ist, wird jedes Primideal von einem irreduziblen Polynom $q \in \mathbb{Q}[v]$ erzeugt. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass q Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ hat und Inhalt 1. Für ein beliebiges Element $g \in \mathbb{Z}[v] \cap q\mathbb{Q}[v]$, also beispielsweise $g = qh$ mit $h \in \mathbb{Q}[v]$, ist dann nach dem Gaußschen Lemma (siehe z.B. [Jac74, 2.16, Lemma 2]) der Inhalt von g gleich dem Inhalt von h , also ist h auch in $\mathbb{Z}[v]$ und der Schnitt von $\mathfrak{p}$ mit $\mathbb{Z}[v]$ ist das Hauptideal $q\mathbb{Z}[v]$.

Ebenfalls mit dem Gaußschen Lemma folgt, dass jedes in $\mathbb{Z}[v]$ irreduzible Polynom auch in $\mathbb{Q}[v]$ irreduzibel ist, also sind alle in (ii) aufgeführten Ideale Primideale von $\mathbb{Z}[v]$. Damit ist bewiesen, dass in (i) und (ii) sämtliche Primideale von $\mathbb{Z}[v]$ aufgeführt sind, deren Restklassenring Charakteristik 0 hat.

Wir betrachten nun den Fall, dass der Restklassenring Charakteristik ℓ hat, wobei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist. Der kanonische Epimorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_\ell$ lässt sich koeffizientenweise auf den Polynomring fortsetzen: $\varphi : \mathbb{Z}[v] \rightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$. Der Kern von φ besteht aus den Polynomen, deren sämtliche Koeffizienten durch ℓ teilbar sind, ist also gleich dem Hauptideal, das von ℓ erzeugt wird. Nach [AM69, Kapitel I] stehen die Primideale von $\mathbb{Z}[v]$, die $\ell\mathbb{Z}[v]$ enthalten, in 1-1-Korrespondenz zu denjenigen von $\mathbb{F}_\ell[v]$.

Jedes Primideal außer dem Nullideal im Hauptidealring $\mathbb{F}_\ell[v]$ lässt sich von einem irreduziblen Polynom $\bar{p}$ erzeugen, das wir ohne Einschränkung normiert wählen können. Das Urbild eines solchen Ideals $\bar{p}\mathbb{F}_\ell[v]$ unter dem kanonischen Epimorphismus besteht dann aus allen Polynomen $g \in \mathbb{Z}[v]$, deren Reduktion modulo ℓ gleich einem Vielfachen von $\bar{p}$ ist. Anders ausgedrückt bedeutet das, dass $\varphi^{-1}(\bar{p}\mathbb{F}_\ell[v]) = \ell\mathbb{Z}[v] + p\mathbb{Z}[v]$ ist, wobei p ein **beliebiges** Urbild von $\bar{p}$ ist. Dieses Urbild können wir ohne Einschränkung normiert und von gleichem Grad wie $\bar{p}$ wählen. Ein normiertes Polynom $p \in \mathbb{Z}[v]$, dessen Reduktion modulo ℓ irreduzibel ist, muss aber selbst irreduzibel über $\mathbb{Z}$ sein.

Damit ist bewiesen, dass in (iii) und (iv) alle Primideale von $\mathbb{Z}[v]$ aufgeführt sind, deren Restklassenring positive Charakteristik hat.

Die Bemerkungen über die Krull-Dimension und Primidealketten folgen sofort aus der Klassifikation der Primideale. $\square$

(1.3) Korollar (Primideale von $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$)

Der Ring $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ der Laurent-Polynome über den ganzen Zahlen hat die folgenden Primideale:

- (i) Das Nullideal $\{0\}$.
- (ii) Die Ideale $q\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, wobei q ein in $\mathbb{Z}[v]$ irreduzibles Polynom ungleich $\pm v$ mit Inhalt 1 ist.
- (iii) Die Ideale $\ell\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, wobei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist.
- (iv) Die Ideale $\ell\mathbb{Z}[v, v^{-1}] + p\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, wobei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und p ein normiertes, in $\mathbb{Z}[v]$ irreduzibles Polynom ist, dessen Bild unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z}[v] \rightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ in $\mathbb{F}_\ell[v]$ irreduzibel und ungleich v ist.

Beweis: Der Laurent-Polynomring $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ ist die Lokalisierung des Polynomrings $\mathbb{Z}[v]$ an der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S := \{v^k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Wir müssen also nur zeigen, dass die einzigen Primideale von $\mathbb{Z}[v]$, die nicht-leeren Schnitt mit S haben, $v\mathbb{Z}[v]$ und $\ell\mathbb{Z}[v] + v\mathbb{Z}[v]$ für eine beliebige Primzahl $\ell \in \mathbb{N}$ sind.

Ist $q\mathbb{Z}[v]$ ein Ideal aus (ii) in Proposition III.(1.2), also q ein in $\mathbb{Z}[v]$ irreduzibles Polynom mit Inhalt 1, so ist nur dann eine Potenz von v^k in $q\mathbb{Z}[v]$, wenn q selbst ein Teiler von v^k ist. Das kommt — da q irreduzibel ist — nur in den Fällen $q = \pm v$ vor, die explizit ausgeschlossen sind.

Ist $\mathfrak{p} := \ell\mathbb{Z}[v] + p\mathbb{Z}[v]$ ein Ideal aus (iv) in Proposition III.(1.2), so ist p ein normiertes, in $\mathbb{Z}[v]$ irreduzibles Polynom, dessen Bild unter der kanonischen Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}[v] \rightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ irreduzibel in $\mathbb{F}_\ell[v]$ ist. Dieses Ideal $\mathfrak{p}$ enthält genau dann eine Potenz von v , wenn sein Bild $\varphi(\mathfrak{p})$ eine Potenz von v enthält. Dies ist aber wie oben nur dann der Fall, wenn $\varphi(p)$ selbst eine Potenz von v ist. Weil $\varphi(p)$ irreduzibel und normiert ist, trifft dies aber nur für den Fall zu, der explizit ausgeschlossen ist. $\square$

III.2 Primidealketten und nicht-diskrete Bewertungen

Das folgende Lemma wird nur für den Beweis des darauffolgenden Theorems gebraucht.

(2.1) Lemma (Existenz diskreter Bewertungen)

Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich, $K = \text{Quot}(R)$ sein Quotientenkörper und $\mathfrak{p} \triangleleft R$ ein Primideal der Höhe 1. Zusätzlich sei **entweder** vorausgesetzt, dass

- (a) $\mathfrak{p} = \pi R$ ein Hauptideal ist, **oder**, dass
- (b) der Ring R ganz-abgeschlossen in K ist.

Dann ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungsring und es gibt eine eindeutig bestimmte, additive, diskrete Bewertung $v_{\mathfrak{p}} : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit Wertegruppe $\mathbb{Z}$, so dass $R_{\mathfrak{p}} = \{x \in K \mid v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0\}$ ist. Es gilt $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ für alle $x \in R$ und $\mathfrak{p} = \{x \in R \mid v_{\mathfrak{p}}(x) > 0\}$.

Im Fall (a) ist $v_{\mathfrak{p}}(\pi) = 1$ und es gilt für alle $x \in R$ mit $v_{\mathfrak{p}}(x) = n > 0$, dass $x \in \mathfrak{p}^n$ ist und $\pi^{-n} \cdot x \in R \setminus \mathfrak{p}$ ist.

Beweis: Die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ ist wie R ein noetherscher Integritätsbereich (vgl. [Mat86, 4.1]) und außerdem lokal. Da $\mathfrak{p}$ in R die Höhe 1 hat, ist $R_{\mathfrak{p}}$ eindimensional. Unter der Voraussetzung (a) ist das maximale Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ von $R_{\mathfrak{p}}$ genau wie $\mathfrak{p}$ vom Element $\pi \in R$ erzeugt. Damit sind die Voraussetzungen von [Mat86, 11.2.(3)] erfüllt. Unter der Voraussetzung (b) folgt mit [Mat86, §9, Example 3], dass $R_{\mathfrak{p}}$ ebenfalls ganz-abgeschlossen in K ist, so dass die Voraussetzungen von [Mat86, 11.2.(4)] erfüllt sind (man beachte, dass in diesem Fall die Definition von „normal“ bei Matsumura mit „ganz-abgeschlossen“ übereinstimmt). In beiden Fällen folgt mit [Mat86, 11.2], dass $R_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungsring ist.

Wie in [Mat86, §10] erklärt, entspricht dem diskreten Bewertungsring $R_{\mathfrak{p}}$ eine additive Bewertung $v_{\mathfrak{p}} : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit Wertegruppe $\mathbb{Z}$ (d.h. $v_{\mathfrak{p}}$ ist surjektiv). Unter allen äquivalenten Bewertungen mit Bewertungsring $R_{\mathfrak{p}}$ wird $v_{\mathfrak{p}}$ durch diese Voraussetzung eindeutig bestimmt.

Wegen $R \subseteq R_{\mathfrak{p}}$ folgt $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ für alle $x \in R$. Da $R_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von R bei $\mathfrak{p}$ ist, gilt $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, so dass also $\mathfrak{p} = \{x \in R \mid v_{\mathfrak{p}}(x) > 0\}$ ist.

Im Fall (a) ist — wie oben erwähnt — das maximale Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ von $R_{\mathfrak{p}}$ gleich $\pi R_{\mathfrak{p}}$. Da v surjektiv ist, gibt es ein $x \in K$ mit $v(x) = 1$ und dieses x ist nicht nur im Bewertungsring $R_{\mathfrak{p}}$, sondern auch in dessen maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Da dieses aber — wie oben erwähnt — vom Element π erzeugt wird, folgt sofort, dass im Fall (a) das Element π den Wert 1 hat.

Es bleibt zu zeigen, dass für alle $x \in R$ mit $v_{\mathfrak{p}}(x) = n > 0$ gilt, dass $x \in \mathfrak{p}^n$ liegt und $\pi^{-n} \cdot x \in R \setminus \mathfrak{p}$ ist.

Sei also $x \in R$ und $v_{\mathfrak{p}}(x) = n > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist x von der Form $\pi^n \cdot y$ mit einem $y \in R_{\mathfrak{p}}$. Das Element y ist von der Form a/b mit $a \in R$ und $b \in R \setminus \mathfrak{p}$. Also ist $x \cdot b = \pi^n a$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R ist, folgt, dass $x \in \mathfrak{p} = \pi R$ ist. Also ist $\pi^{-1} \cdot x \in R$ und wir erhalten $(\pi^{-1} \cdot x) \cdot b = \pi^{n-1} \cdot a$, welches wieder eine Gleichung in R ist. Induktiv zeigt man so, dass x in R durch π^n teilbar ist, also im Ideal $\pi^n R$ liegt. Wäre $x \in \pi^{n+1} R = \mathfrak{p}^{n+1}$, dann wäre $v_{\mathfrak{p}}(x) > n$. Also ist $\pi^{-n} \cdot x \notin \pi R$. $\square$

Bemerkung: Es gilt $\pi^n R = \{x \in R \mid v_{\mathfrak{p}}(x) \geq n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt sofort, dass im Fall (a) die Gleichung $\pi^n R = R \cap \pi^n R_{\mathfrak{p}}$ gilt. Die Inklusion „ $\subseteq$ “ ist klar und die Inklusion „ $\supseteq$ “ wurde oben gezeigt.

(2.2) Theorem (Bewertung, die an eine Primidealkette angepasst ist)

Es sei A ein noetherscher Integritätsbereich, der ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper K ist und $0 = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_k \subsetneq A$ eine aufsteigende Kette von Primidealen von A , so dass $\mathfrak{p}_i$ für $1 \leq i \leq k$ von der Höhe i ist. Zusätzlich sei für $1 \leq i < k$ das Höhe-1-Primideal $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i-1}$ in $A/\mathfrak{p}_{i-1}$ ein Hauptideal und $A/\mathfrak{p}_{k-1}$ ganz-abgeschlossen in $\text{Quot}(A/\mathfrak{p}_{k-1})$.

Dann gibt es eine additive Bewertung $\nu : A \rightarrow \mathbb{Z}^k \cup \{\infty\}$, so dass für $1 \leq i \leq k$ gilt:

$$\mathfrak{p}_i = \{x \in A \mid \nu(x) > 0 \text{ und eine der ersten } i \text{ Komponenten von } \nu(x) \text{ ist ungleich } 0\}. \quad (\text{III.1})$$

Eine Möglichkeit für ν wird im Beweis explizit konstruiert.

Bemerkungen:

- Die abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}^k, +)$ sei lexikographisch geordnet, so dass also für $a, b \in \mathbb{Z}^k$ genau dann $a < b$ gilt, wenn die erste nicht-verschwindende Komponente von $b - a$ positiv ist. Zusätzlich sei $a < \infty$ für alle $a \in \mathbb{Z}^k$.
- Durch die Projektion $\mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^i$ auf die ersten i Komponenten erhält man für $1 \leq i \leq k - 1$ jeweils eine additive Bewertung $\nu_i : A \rightarrow \mathbb{Z}^i \cup \{\infty\}$, so dass $\mathfrak{p}_i = \{x \in A \mid \nu_i(x) > 0\}$ ist.

Beweis: Wir bezeichnen für $1 \leq i \leq k$ den Quotienten $A/\mathfrak{p}_{i-1}$ mit A_i und das Höhe-1-Primideal $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i-1}$ in A_i mit $\mathfrak{q}_i$. Es ist also $A_{i+1} \cong A_i/\mathfrak{q}_i$ für $1 \leq i < k$. Nach Voraussetzung sind die $\mathfrak{q}_i$ für $1 \leq i < k$ Hauptideale, sie seien jeweils vom Element $\pi_i \in A_i$ erzeugt.

Natürlich setzen wir $\nu(0) := \infty$. Ansonsten erfolgt die Definition von ν induktiv, wobei wir in jedem der Schritte 1 bis k einmal Lemma III.(2.1) anwenden:

Es sei $0 \neq x_1 \in A = A_1$ gegeben (der Index 1 steht hier aus systematischen Gründen).

Für die erste Komponente von ν wenden wir das Lemma auf $R := A = A_1$ und das Primideal $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1$ an. Die Lokalisierung von A_1 bei $\mathfrak{q}_1$ ist also ein diskreter Bewertungsring, die zugehörige Bewertung $\nu_{\mathfrak{q}_1}$ aus dem Lemma ergibt die erste Komponente von ν . Wir setzen also $\nu(x_1)_1 := \nu_{\mathfrak{q}_1}(x_1)$. Da wir im Fall (a) des Lemmas sind, folgt, dass wir π_1 abdividieren können, es ist also

$$\pi_1^{-\nu_{\mathfrak{q}_1}(x_1)} \cdot x_1 \in A_1 \setminus \mathfrak{q}_1.$$

Wir betrachten dieses Element nun modulo $\mathfrak{q}_1$, also in A_2 , und setzen

$$0 \neq x_2 := \pi_1^{-\nu_{\mathfrak{q}_1}(x_1)} \cdot x_1 + \mathfrak{q}_1 \in A_1/\mathfrak{q}_1 \cong A_2.$$

Für die i -te Komponente von ν ($2 \leq i < k$) wenden wir das Lemma auf $R := A_i$ und das Primideal $\mathfrak{p} := \mathfrak{q}_i$ an. Die Lokalisierung von A_i bei $\mathfrak{q}_i$ ist also ein diskreter Bewertungsring, die zugehörige Bewertung $\nu_{\mathfrak{q}_i}$ aus dem Lemma ergibt die i -te Komponente von ν . Wir setzen also $\nu(x_1)_i := \nu_{\mathfrak{q}_i}(x_i)$. Da wir im Fall (a) des Lemmas sind, folgt, dass wir π_i abdividieren können, es ist also

$$\pi_i^{-\nu_{\mathfrak{q}_i}(x_i)} \cdot x_i \in A_i \setminus \mathfrak{q}_i.$$

Wir betrachten dieses Element nun modulo $\mathfrak{q}_i$, also in A_{i+1} , und setzen

$$0 \neq x_{i+1} := \pi_i^{-\nu_{\mathfrak{q}_i}(x_i)} \cdot x_i + \mathfrak{q}_i \in A_i/\mathfrak{q}_i \cong A_{i+1}.$$

Für die k -te Komponente von ν wenden wir das Lemma auf $R := A_k$ und das Primideal $\mathfrak{p} := \mathfrak{q}_k$ an. Hier sind wir im Fall (b) des Lemmas. Die Lokalisierung von A_k bei $\mathfrak{q}_k$ ist also ein diskreter Bewertungsring, die zugehörige Bewertung $\nu_{\mathfrak{q}_k}$ aus dem Lemma ergibt die k -te Komponente von ν . Wir setzen also

$$\nu(x_1)_k := \nu_{\mathfrak{q}_k}(x_k).$$

Da aber die Induktion hier endet, ist auch kein weiteres Abdividieren erforderlich.

Die Wohldefiniertheit dieser Konstruktion ist klar. Sie hängt allerdings von der Wahl der Hauptideal-erzeuger π_i für $1 \leq i < k$ ab. Als nächstes wird gezeigt, dass ν eine additive Bewertung ist.

Nach Definition ist $\nu(x_1) = \infty$ genau dann, wenn $x_1 = 0$ ist, für $x_1 \neq 0$ ist in der Induktion gewährleistet, dass alle Zwischenergebnisse x_i ungleich 0 sind.

Die anderen Eigenschaften einer additiven Bewertung kommen aus der Konstruktion und den Eigenschaften der verwendeten diskreten Bewertungen. Es seien also $0 \neq x_1, y_1 \in A$ gegeben, wir setzen $z_1 := x_1 \cdot y_1$ und argumentieren wieder induktiv:

Für die erste Komponente von ν folgt $\nu(z_1)_1 = \nu(x_1)_1 + \nu(y_1)_1$ direkt aus den Eigenschaften der diskreten Bewertung ν_{q_1} . Es wird nun für x_2, y_2 und z_2 aus x_1, y_1 bzw. z_1 die Zahl π_1 so oft wie möglich abdividiert. Da aber $\nu(z_1)_1 = \nu(x_1)_1 + \nu(y_1)_1$ ist, gilt

$$z_2 = \pi_1^{-\nu_{q_1}(z_1)} \cdot z_1 + q_1 = (\pi_1^{-\nu_{q_1}(x_1)} \cdot x_1 + q_1) \cdot (\pi_1^{-\nu_{q_1}(y_1)} \cdot y_1 + q_1) = x_2 \cdot y_2 \in A_1/q_1 \cong A_2.$$

Es sei nun bereits $\nu(z_1)_j = \nu(x_1)_j + \nu(y_1)_j$ für $1 \leq j \leq i-1$ und $z_i = x_i \cdot y_i$ bewiesen. Für die i -te Komponente von ν folgt nun $\nu(z_1)_i = \nu(x_1)_i + \nu(y_1)_i$ direkt aus der entsprechenden Eigenschaft von ν_{q_i} , da $\nu(z_1)_i = \nu_{q_i}(z_i)$ und $\nu(x_1)_i = \nu_{q_i}(x_i)$ und $\nu(y_1)_i = \nu_{q_i}(y_i)$ ist. Für $i < k$ wird nun wieder aus x_i, y_i und z_i in A_i die Zahl π_i so oft wie möglich abdividiert, wieder gilt aber

$$z_{i+1} = \pi_i^{-\nu_{q_i}(z_i)} \cdot z_i + q_i = (\pi_i^{-\nu_{q_i}(x_i)} \cdot x_i + q_i) \cdot (\pi_i^{-\nu_{q_i}(y_i)} \cdot y_i + q_i) = x_{i+1} \cdot y_{i+1} \in A_i/q_i \cong A_{i+1}.$$

Damit ist $\nu(z_1) = \nu(x_1 \cdot y_1) = \nu(x_1) + \nu(y_1)$ für beliebige $0 \neq x_1, y_1 \in A$ gezeigt.

Es sei nun für den Nachweis der Minimumsungleichung $s_1 := x_1 + y_1$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\nu(x_1) \leq \nu(y_1)$ annehmen und unterscheiden die beiden Fälle $\nu(x_1) = \nu(y_1)$ und $\nu(x_1) < \nu(y_1)$.

Ist $\nu(x_1) = \nu(y_1)$, so werden zur Konstruktion der x_i und y_i für $2 \leq i \leq k$ jeweils dieselben Potenzen von π_i abdividiert und es gilt $\nu_{q_i}(x_i) = \nu_{q_i}(y_i)$ für $1 \leq i \leq k$. Wir betrachten nun die Konstruktion von $\nu(s_1)$. In der ersten Komponente kann entweder $\nu(s_1)_1 > \nu(x_1)_1$ sein, woraus wegen der lexikographischen Ordnung sofort $\nu(s_1) > \nu(x_1)$ folgt, oder es kann $\nu(s_1)_1 = \nu(x_1)_1$ sein. In diesem Fall wird aber zur Konstruktion von s_2 dieselbe Potenz von π_1 von s_1 abdividiert wie bei x_1 und y_1 . Also ist $s_2 = x_2 + y_2$. Betrachten wir nun die weiteren Komponenten, so folgt, dass jeweils entweder $\nu(s_1)_i > \nu(x_1)_i$ und damit $\nu(s_1) > \nu(x_1)$ gilt und weitere Komponenten uninteressant sind, oder dass $\nu(s_1)_i = \nu(x_1)_i$ ist und damit auch $s_{i+1} = x_{i+1} + y_{i+1}$ ist.

Ist $\nu(x_1) < \nu(y_1)$, so gibt es eine kleinste Komponente i , in der $\nu(x_1)_i < \nu(y_1)_i$ ist. Bis vor dieser Komponente greift die Argumentation aus dem letzten Absatz. Ist für $1 \leq j < i$ noch $\nu(s_1)_j = \nu(x_1)_j$, dann folgt daraus $s_i = x_i + y_i$. Nun folgt aber aus $\nu(x_1)_i < \nu(y_1)_i$ und Lemma II.(1.6).(iii), dass $\nu(s_1)_i = \nu(x_1)_i$ ist. Dann ist aber (wenn $i < k$ ist)

$$s_{i+1} = \pi_i^{-\nu_{q_i}(s_i)} \cdot s_i + q_i = (\pi_i^{-\nu_{q_i}(x_i)} \cdot x_i + \pi_i^{-\nu_{q_i}(y_i)} \cdot y_i) + q_i = x_{i+1} \in A_i/q_i \cong A_{i+1},$$

weil $\pi_i^{-\nu_{q_i}(x_i)} \cdot y_i \in q_i$ ist. Also ist $s_{i+1} = x_{i+1}$ und damit auch $\nu(s_1) = \nu(x_1)$.

Damit ist gezeigt, dass ν eine Bewertung ist.

Es bleibt, den Zusammenhang von ν mit der Primidealkette in Gleichung III.1 zu zeigen. Nach Konstruktion liegt ein $x_1 \in A$ genau dann in $\mathfrak{p}_1 = q_1$, wenn $\nu(x_1)_1 > 0$ ist. Damit ist Gleichung III.1 für $i = 1$ bewiesen, also

$$\mathfrak{p}_1 = \{x_1 \in A \mid \nu(x_1) > 0 \text{ und die erste Komponente von } \nu(x_1) \text{ ist ungleich } 0\}.$$

Für $i > 1$ argumentieren wir wieder induktiv: Es sei $1 < j \leq k$ und Gleichung III.1 bereits bis $1 \leq i < j$ bewiesen. Für $x_1 \in \mathfrak{p}_{j-1} \subsetneq \mathfrak{p}_j$ ist dann bereits bewiesen, dass $\nu(x_1) > 0$ ist und mindestens eine der Komponenten vor der j -ten ungleich 0 ist. Für $x_1 \notin \mathfrak{p}_{j-1}$ ist dann aber ebenfalls bereits bewiesen, dass die ersten $j-1$ Komponenten alle gleich 0 sind. Also ist in der obigen Konstruktion $x_j = x_1 + \mathfrak{p}_{j-1} \in A_j = A/\mathfrak{p}_{j-1}$. Dann ist aber die j -te Komponente nach Definition genau dann

größer als 0, wenn $x_j \in \mathfrak{q}_j = \mathfrak{p}_j/\mathfrak{p}_{j-1}$ ist, was äquivalent zu $x_1 \in \mathfrak{p}_j$ ist. Also ist Gleichung III.1 für $i = j$ und damit auch induktiv für alle $i \leq k$ bewiesen. $\square$

Es folgt nun ein Beispiel zur Anwendung dieses Theorems auf den Polynomring $\mathbb{Z}[v]$:

(2.3) Korollar (Zweistufige Bewertungen auf $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$)

Es sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und v eine Unbestimmte. Weiter sei $\mathfrak{p} = \ell\mathbb{Z}[v, v^{-1}] + p\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ das von p und ℓ erzeugte Höhe-2-Primideal von $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, wobei p ein normiertes, irreduzibles Polynom aus $\mathbb{Z}[v]$ ist, dessen Bild unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z}[v] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ irreduzibel in $\mathbb{F}_\ell[v]$ und ungleich v ist. Außerdem sei $q \in \mathbb{Z}[v]$ ein irreduzibles Polynom ungleich $\pm v$ mit Inhalt 1, das in $\mathfrak{p}$ enthalten ist. Wir bezeichnen das von q erzeugte Höhe-1-Primideal mit $\mathfrak{q}$, wir haben also die Primidealkette $0 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ in $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$. Es sei $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q}$ ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper.

Dann gibt es eine nicht-diskrete Bewertung $v : \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ (mit lexikographischer Ordnung auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), so dass

$$\mathfrak{q} = \{h \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \mid v(h) \geq (1, 0)\}, \quad \mathfrak{p} = \{h \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \mid v(h) > (0, 0)\} \quad \text{und} \quad v(q) = (1, 0)$$

gelten und es ein $x \in \mathfrak{p}$ mit $v(x) = (0, 1)$ gibt. Ist $\infty \neq v(h) = (v(h)_1, v(h)_2)$, dann lassen sich die beiden Komponenten $v(h)$ zum Beispiel durch folgende Eigenschaften bestimmen:

$$h \in \mathfrak{q}^{v(h)_1} \setminus \mathfrak{q}^{v(h)_1+1} \subseteq \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \quad \text{und} \quad v(h)_2 = v_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}(q^{-v(h)_1} \cdot h + q), \quad (\text{III.2})$$

wobei $v_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ die diskrete Bewertung zum diskreten Bewertungsring $(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ mit Wertegruppe $\mathbb{Z}$ ist.

Beweis: Wir wenden Theorem III.(2.2) auf $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ und die Primidealkette $0 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ an. Die Höhen der Ideale stimmen, das erste Primideal $\mathfrak{q}$ ist ein Hauptideal und $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q}$ ist nach Voraussetzung ganz-abgeschlossen in $\text{Quot}(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q})$.

Die Konstruktion im Theorem ist genau durch die in Gleichung III.2 angegebenen Eigenschaften beschrieben: Für die erste Komponente von $v(h)$ wird gezählt, wie oft q in h aufgeht und für die zweite Komponente von $v(h)$ wird — nach Abdividieren von q — im Quotienten $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q}$ die Bewertung zum diskreten Bewertungsring $(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ genommen. Die in Korollar III.(2.3) angegebene Verbindung zu $\mathfrak{q}$ bzw. zu $\mathfrak{p}$ ergibt sich aus dem Theorem, da v nach Konstruktion auf $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ nur Werte in $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ annimmt.

Die Gleichung $v(q) = (1, 0)$ ergibt sich aus der Konstruktion (und natürlich der Wahl der diskreten Bewertung im Lemma) und die Existenz eines Elements $x \in \mathfrak{p}$ mit $v(x) = (0, 1)$ kommt von der Wahl der diskreten Bewertung im Quotienten $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q}$ im Lemma. $\square$

Insbesondere lässt sich vorstehendes Korollar auf den Fall anwenden, dass ℓ eine rationale Primzahl und $q = \varphi_e$ das e -te Kreisteilungspolynom für ein $e > 1$ ist:

(2.4) Korollar (Anwendung auf Kreisteilungspolynome)

Es sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, v eine Unbestimmte, $1 < e \in \mathbb{N}$ und φ_e das e -te Kreisteilungspolynom im Polynomring $\mathbb{Z}[v]$. Weiter sei $\mathfrak{q} := \varphi_e\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ das von φ_e in $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ erzeugte Höhe-1-Primideal. Es sei $\psi : \mathbb{Z}[v] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ die kanonische Abbildung, $\bar{p} \in \mathbb{F}_\ell[v]$ ein normierter, irreduzibler Faktor von $\psi(\varphi_e)$ in $\mathbb{F}_\ell[v]$ und $p \in \mathbb{Z}[v]$ ein normiertes ψ -Urbild von $\bar{p}$. Dann ist $\bar{p} \neq v$, da φ_e in $\mathbb{Z}[v]$ ein Teiler von $v^e - 1$ ist und damit auch $\bar{p}$ in $\mathbb{F}_\ell[v]$ ein Teiler von $v^e - 1$ ist.

Das Primideal $\ell\mathbb{Z}[v, v^{-1}] + p\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ sei mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet, es ist von der Höhe 2 enthält $\mathfrak{q}$. Wir haben also die Primidealkette

$$0 \subsetneq \mathfrak{q} = \varphi_e\mathbb{Z}[v, v^{-1}] \subsetneq \mathfrak{p} = \ell\mathbb{Z}[v, v^{-1}] + p\mathbb{Z}[v, v^{-1}].$$

Der Quotient $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q}$ ist isomorph zum Ganzheitsring $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta_e)$, wobei ζ_e eine primitive e -te Einheitswurzel ist. Also ist $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q}$ ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper.

Damit ist Korollar III.(2.3) anwendbar. Es gelten die dortigen Ausführungen. Insbesondere lässt sich die dort konstruierte Bewertung $v : \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ wie folgt beschreiben: Für $h \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ gibt $v(h)_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ an, wie oft h durch φ_e teilbar ist. Die zweite Komponente $v(h)_2$ von $v(h)$ ist dann der Wert von $\varphi_e^{-v(h)_1} \cdot h + \varphi_e \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\varphi_e \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \cong \mathbb{Z}[\zeta_e]$ in der diskreten Bewertung mit Wertegruppe $\mathbb{Z}$, die zum Primideal $\mathfrak{p}/\mathfrak{q} \triangleleft \mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\varphi_e \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ gehört.

Beweis: Siehe Beweis zu III.(2.3). □

Der Restklassenkörper des Bewertungsringes zur so konstruierten Bewertung lässt sich bestimmen:

(2.5) Proposition (Isomorphie von Restklassenkörpern)

Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Korollar III.(2.4).

Dann sind der Restklassenkörper k_1 des Bewertungsringes $\mathcal{O}$ zur Bewertung v in $\mathbb{Q}(v)$, der Restklassenkörper k_2 der Lokalisierung $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathfrak{p}}$ beim Höhe-2-Primideal $\mathfrak{p}$ und der Restklassenkörper k_3 des diskreten Bewertungsringes $(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ isomorph.

Beweis: Es sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring zur Bewertung v , also $\mathcal{O} := \{x \in \mathbb{Q}(v) \mid v(x) \geq (0, 0)\}$ und $\mathfrak{m} := \{x \in \mathbb{Q}(v) \mid v(x) > (0, 0)\}$ sein maximales Ideal.

Da die erste Komponente von v die (diskrete) Bewertung ist, die in $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ Teilbarkeit durch φ_e misst (bzw. im Sinne von Lemma III.(2.1) zum Primideal $\mathfrak{q}$ gehört), ist $\mathcal{O}' := \{x \in \mathbb{Q}(v) \mid v(x)_1 \geq 0\}$ ein diskreter Bewertungsring, dessen maximales Ideal gleich $\mathfrak{m}' := \{x \in \mathbb{Q}(v) \mid v(x)_1 > 0\}$ ist. Es gilt $\mathfrak{m}' \subsetneq \mathfrak{m} \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}'$, alle Inklusionen sind echt.

Der Ring $\mathcal{O}'$ ist gleich der Lokalisierung $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathfrak{q}}$ von $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ beim Primideal $\mathfrak{q} = \varphi_e \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ (siehe Lemma III.(2.1)). Also ist $\mathfrak{m}' = \mathfrak{q}_{\mathcal{O}'}$ und wegen $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q} \cong \mathbb{Z}[\zeta_e]$ ist $\mathbb{Q}(\zeta_e) = \text{Quot}(\mathbb{Z}[\zeta_e]) \cong \text{Quot}(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q}) \cong (\mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathfrak{q}})/(\mathfrak{q}_{\mathcal{O}'}) = \mathcal{O}'/\mathfrak{m}'$ (Lokalisierung vertauscht mit Quotientenbildung, siehe [Mat86, 4.2]).

Nun können wir aber [Mat86, 10.1] anwenden. Danach ist $\mathfrak{m}'$ ein Primideal von $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}/\mathfrak{m}'$ ein Bewertungsring im Körper $\mathcal{O}'/\mathfrak{m}'$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}'$. Da aber $\mathcal{O}'/\mathfrak{m}' \cong \mathbb{Q}(\zeta_e)$ ist, ist $\mathcal{O}/\mathfrak{m}'$ darin gerade der diskrete Bewertungsring, der durch die zweite Komponente von v gegeben ist. Also ist $(\mathcal{O}/\mathfrak{m}')/(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}') \cong \mathcal{O}/\mathfrak{m} = k_1$ isomorph zu k_3 .

Andererseits ist $k_2 = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{p} \cong (\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q})/(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = k_3$, wieder mit [Mat86, 4.2]. Damit sind alle Behauptungen bewiesen. □

Für gewisse Werte von ℓ und e lässt sich noch mehr über den Restklassenkörper des Bewertungsringes zur Bewertung v sagen:

(2.6) Proposition (Restklassenkörper ist $\mathbb{F}_{\ell}$)

Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Korollar III.(2.4). Gilt zusätzlich, dass $\ell \equiv 1 \pmod{e}$ oder $e = \ell$ ist, dann ist der Restklassenkörper des Bewertungsringes $\mathcal{O}$ zur Bewertung v aus Korollar III.(2.4) isomorph zu $\mathbb{F}_{\ell}$.

Bemerkung: Diese Situation wird später bei einer Umformulierung der James-Vermutung auftreten.

Beweis: Wir betrachten den Ganzheitsring $\mathbb{Z}[\zeta_e] \cong \mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q}$ des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta_e) \cong \mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}_{\mathcal{O}'}$. Wegen Proposition III.(2.5) können wir so den Isomorphietyp des Restklassenkörpers des Bewertungsringes zur Bewertung v bestimmen.

Aus $\ell \equiv 1 \pmod{e}$ folgt zunächst, dass e ein Teiler von $\ell - 1$ ist, dass also im endlichen Körper $\mathbb{F}_{\ell}$ primitive e -te Einheitswurzeln existieren. Zusätzlich bedeutet dies nach [CR81, (4.34)+Beweis], dass φ_e modulo ℓ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt, dass das Hauptideal $\ell \mathbb{Z}[\zeta_e]$ ein Produkt aus paarweise verschiedenen Primidealen ist und dass deren Restklassenkörper (da $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ ein Dedekindring ist, sind alle Primideale maximal) isomorph zu $\mathbb{F}_{\ell}$ sind. Insbesondere ist also das $\bar{p}$ aus III.(2.4) gleich $v - q$ für eine primitive e -te Einheitswurzel $q \in \mathbb{F}_{\ell}$ ist und das p aus III.(2.4) von der Form $v - a$, wobei $a \in \mathbb{Z}$ Urbild von q unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_{\ell}$ ist. Also

wird das Ideal $\mathfrak{p} = \ell\mathbb{Z}[v, v^{-1}] + (v - a)\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z}[v, v^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q} \cong \mathbb{Z}[\zeta_e]$ auf das Ideal $\bar{\mathfrak{p}} = \ell\mathbb{Z}[\zeta_e] + (\zeta_e - a)\mathbb{Z}[\zeta_e]$ abgebildet.

Im anderen Fall folgt aus $e = \ell$ mittels [CR81, (4.38)], dass die Reduktion von φ_e modulo ℓ gleich $(v - \bar{1})^{e-1} \in \mathbb{F}_\ell[v]$ ist, dass das p aus III.(2.4) ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich $v - 1$ ist, dass das Bild $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p}$ unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z}[v, v^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q} \cong \mathbb{Z}[\zeta_e]$ gleich $(\zeta_e - 1)\mathbb{Z}[\zeta_e]$ ist und dass der zu $\bar{\mathfrak{p}}$ diskrete Bewertungsring $\mathbb{Z}[\zeta_e]_{\bar{\mathfrak{p}}}$ von $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ den Restklassenkörper $\mathbb{F}_\ell$ hat.

Also ist in beiden Fällen der Restklassenkörper des diskreten Bewertungsring $(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ isomorph zu $\mathbb{F}_\ell$. Dies gilt nach Proposition III.(2.5) dann auch für den Restklassenkörper von $\mathcal{O}$. $\square$

III.3 Semiperfekte Ordnungen über Bewertungsringen in $\mathbb{Q}(v)$

Semiperfektheit bedeutet im Wesentlichen (siehe II.(5.10)), dass man Idempotente heben kann. Für Ordnungen über vollständigen, diskreten Bewertungsringen ist dies ein klassisches Resultat. Dass man im Fall von diskreten Bewertungsringen ohne Vervollständigung auskommt, steht bereits in [CR81, Example 6.16] und [Mül95, 3.4.1]. Neu an den Ergebnissen in diesem Abschnitt ist, dass Ordnungen über gewissen nicht-diskreten Bewertungsringen semiperfekt sind.

(3.1) Voraussetzungen

Es sei $(\mathcal{O}, K, \mathbb{Z} \times G, v, \mathcal{O})$ ein Bewertungssystem (siehe II.(1.8)), wobei $\mathbb{Z} \times G$ lexikographisch geordnet sei. Es sei $\mathfrak{p} := \{x \in K \mid v(x) > (0, 0)\}$ das maximale Ideal des Bewertungsring $\mathcal{O}$.

(3.2) Folgerungen/Bezeichnungen

Es gelten die Voraussetzungen aus III.(3.1). Wir bezeichnen die beiden Komponenten der Bewertung v mit $v_1 : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ bzw. $v_2 : K \rightarrow G \cup \{\infty\}$, so dass also $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$ ist für $x \neq 0$ und $v_1(0) = \infty = v_2(0)$. Dann ist v_1 eine diskrete Bewertung auf K . Es sei $\mathcal{O}'$ der Bewertungsring zu v_1 , so dass also $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}' \subsetneq K$ gilt. Das maximale Ideal von $\mathcal{O}'$ ist gleich $\mathfrak{q} := \{x \in K \mid v_1(x) > 0\}$, es ist ein Primideal in $\mathcal{O}$ mit $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. Laut [Mat86, 10.1] ist dann $\mathcal{O}'$ gleich der Lokalisierung $\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}$ von $\mathcal{O}$ beim Primideal $\mathfrak{q}$ und $R := \mathcal{O}/\mathfrak{q}$ ist ein Bewertungsring in seinem Quotientenkörper

$$\text{Quot}(\mathcal{O}/\mathfrak{q}) \cong \mathcal{O}_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}'/\mathfrak{q}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}'/\mathfrak{q}$$

(das letzte Gleichheitszeichen gilt, da $\mathfrak{q}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}'$ ist).

Weil v_1 auf den Nebenklassen $x + \mathfrak{q} \subseteq \mathcal{O}' \setminus \mathfrak{q}$ konstant gleich 0 ist, induziert v_2 auf $\mathcal{O}'/\mathfrak{q}$ eine additive Bewertung, die wir ebenfalls mit v_2 bezeichnen. Es gilt $v_2(r) \geq 0$ für alle $r \in R$. Da andererseits $v_2(x) < 0$ für alle $x \in \mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$ gilt, ist R gleich dem Bewertungsring zur Bewertung v_2 auf $\text{Quot}(R) \cong \mathcal{O}'/\mathfrak{q}$. Das maximale Ideal von R ist deswegen gleich $\bar{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$.

(3.3) Theorem (Ordnung über Bewertungsring ist semiperfekt)

Es gelten die Voraussetzungen aus III.(3.1) und die Folgerungen und Bezeichnungen aus III.(3.2). Weiter sei $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung, so dass K Zerfällungskörper für die Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$ ist und $R\mathcal{H}$ semiperfekt ist. Dann ist $\mathcal{H}$ semiperfekt.

Beweis: Wir benutzen Proposition II.(5.10), müssen also nur noch zeigen, dass wir Idempotente von $\mathcal{H}/\mathfrak{p}\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ heben können.

Wie in Theorem II.(2.3) wählen wir eine beliebige, aber feste Basis von $\mathcal{H}$ und erhalten damit aus v eine Norm $\| - \|$ auf $\mathcal{H}$ mit Werten in $(\mathbb{Z} \times G) \cup \{\infty\}$. Es seien $S, T \subseteq (\mathbb{Z} \times G) \cup \{\infty\}$ die beiden nach oben abgeschlossenen Teilmengen $S := \{(z, g) \in \mathbb{Z} \times G \mid (z, g) > (0, 0)\} \cup \{\infty\}$ und $T := \{(z, g) \in \mathbb{Z} \times G \mid z > 0\} \cup \{\infty\}$, wobei letztere laut Bemerkung II.(1.16) sogar archimedisch (vgl. Definition II.(1.14)) ist. Nach Proposition II.(2.6) gilt $\mathfrak{p}\mathcal{H} = I_S^{\mathcal{H}}$ und $\mathfrak{q}\mathcal{H} = I_T^{\mathcal{H}}$, natürlich gilt $\mathfrak{q}\mathcal{H} \subsetneq \mathfrak{p}\mathcal{H}$. Also haben wir die kanonischen Abbildungen

$$\mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{H}/\mathfrak{q}\mathcal{H} \cong R\mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{H}/\mathfrak{p}\mathcal{H} \cong R\mathcal{H}/\bar{\mathfrak{p}}R\mathcal{H}.$$

Es sei nun $\bar{e} \in \mathcal{H}/\mathfrak{p}\mathcal{H} \cong R\mathcal{H}/\bar{\mathfrak{p}}R\mathcal{H}$ ein Idempotent. Dann ist zu zeigen, dass ein Idempotent $e \in \mathcal{H}$ existiert, das unter der kanonischen Abbildung auf $\bar{e}$ abgebildet wird.

Da $R\mathcal{H}$ nach Voraussetzung semiperfekt ist, folgt mit Proposition II.(5.10), dass es ein Idempotent $\bar{e} \in \mathcal{H}/\mathfrak{q}\mathcal{H} \cong R\mathcal{H}$ gibt, das über $\bar{e}$ liegt. Um dieses wiederum über den zweiten Schritt $\mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathfrak{q}\mathcal{H}$ zu heben, brauchen wir vorübergehend eine Vervollständigung.

Es sei $\hat{\mathcal{O}}$ die Vervollständigung von $\mathcal{O}$ bezüglich der ν -adischen Topologie und $\hat{K}$ der Quotientenkörper von $\hat{\mathcal{O}}$. Nach Proposition II.(3.7) ist $\mathcal{O}$ ein Teilring von $\hat{\mathcal{O}}$ und K ein Teilkörper von $\hat{K}$ und ν lässt sich auf $\hat{\mathcal{O}}$ und $\hat{K}$ fortsetzen. Außerdem ist $\hat{\mathcal{O}}$ der Bewertungsring der Fortsetzung ν in $\hat{K}$. Wir setzen $\hat{\mathfrak{q}} := I_T^{\hat{\mathcal{O}}} = \{x \in \hat{\mathcal{O}} \mid \nu(x) \in T\}$. Damit ist $\hat{\mathfrak{q}}$ ein Primideal von $\hat{\mathcal{O}}$, das im maximalen Ideal $\hat{\mathfrak{p}}$ enthalten ist. Der Ring $R = \mathcal{O}/\mathfrak{q}$ bettet in den Ring $\hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{q}}$ ein, weil $\mathfrak{q}$ der Kern der Abbildung $\mathcal{O} \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}} \twoheadrightarrow \hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{q}}$ ist. Also ist auch die Konstantenreduktion $R\mathcal{H} \cong \mathcal{H}/\mathfrak{q}\mathcal{H}$ in $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}/\hat{\mathfrak{q}}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ enthalten und wir können $\bar{e}$ als Element von $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}/\hat{\mathfrak{q}}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ auffassen.

Da T eine archimedische Teilmenge von $(\mathbb{Z} \times G) \cup \{\infty\}$ ist, existiert nach Proposition II.(4.5) ein Idempotent $\hat{e} \in \hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$, das unter der kanonischen Abbildung auf $\bar{e} \in \hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}/\hat{\mathfrak{q}}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ abgebildet wird. Dieses lässt sich aber mit Hilfe von Theorem II.(6.1) zu einem Idempotent $e \in \mathcal{H}$ „verbessern“, für das $\|e - \hat{e}\| \geq (1, 0)$ ist. Ist nun $f \in \mathcal{H}$ ein beliebiges Element, das unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{H}/\mathfrak{q}\mathcal{H}$ auf $\bar{e}$ abgebildet wird, dann ist $\|\hat{e} - f\| \in T$, da $\hat{e}$ unter der kanonischen Abbildung $\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H} \twoheadrightarrow \hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}/\hat{\mathfrak{q}}\hat{\mathcal{O}}\mathcal{H}$ auf $\bar{e}$ abgebildet wird. Also ist $\|e - f\| \geq \min\{\|e - \hat{e}\|, \|\hat{e} - f\|\} \in T$ und e liegt über $\bar{e}$ und damit auch über $\bar{e}$. $\square$

(3.4) Theorem (Ordnung über Bewertungsring zu Primidealkette ist semiperfekt)

Es gelten die Voraussetzungen aus Theorem III.(2.2), ν sei die dort konstruierte Bewertung auf K und $\mathcal{O} \subseteq K$ der Bewertungsring zu ν . Weiter sei $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung, so dass K Zerfällungskörper für $K\mathcal{H}$ und $\text{Quot}(A/\mathfrak{p}_i)$ für $1 \leq i < k$ jeweils Zerfällungskörper für $\text{Quot}(A/\mathfrak{p}_i)\mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{H}$ semiperfekt.

Beweis: Die Behauptung folgt per Induktion über die Länge k der Primidealkette in III.(2.2) mit Hilfe von Theorem III.(3.3): Im Fall $k = 1$ ist der Bewertungsring $\mathcal{O}$ gleich der Lokalisierung von A beim Höhe-1-Primideal $\mathfrak{p}_1$, also ein diskreter Bewertungsring. Damit ist $\mathcal{H}$ nach Korollar II.(6.3) semiperfekt. Für $k > 1$ liefert Theorem III.(3.3) genau den Induktionsschritt: Man spaltet mit $G := \mathbb{Z}^{k-1}$ den ersten Faktor in $\mathbb{Z}^k \cong \mathbb{Z} \times G$ ab, dann ist die zweite Komponente ν_2 der Bewertung ν genau die Bewertung, die mit Theorem III.(2.2) für den Ring $A/\mathfrak{p}_1$ und die Primidealkette $0 \triangleleft \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \triangleleft \dots \triangleleft \mathfrak{p}_k/\mathfrak{p}_1$ der Länge $k - 1$ konstruiert wird. Dadurch und durch die Voraussetzung mit den Zerfällungskörpern sind alle Voraussetzungen von III.(3.3) erfüllt und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

(3.5) Korollar (Anwendung auf Spezialfall in III.(2.3))

Es gelten die Voraussetzungen aus Korollar III.(2.3). Es sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring zur Bewertung ν in $K = \text{Quot}(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]) = \mathbb{Q}(v)$ und $\mathcal{H}$ sei eine $\mathcal{O}$ -Ordnung. Es seien K Zerfällungskörper für die Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$ und $\text{Quot}(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q})$ Zerfällungskörper für die Konstantenreduktion $\text{Quot}(\mathbb{Z}[v, v^{-1}]/\mathfrak{q})\mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{H}$ semiperfekt.

Beweis: Dies ist ein Spezialfall von Theorem III.(3.4). $\square$

Kapitel IV

Idempotente aus Matrixdarstellungen zu projektiven Moduln

Ist $\mathcal{H}$ eine halbeinfache Algebra über dem Körper K und K Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$, dann kann man mit Hilfe der Frobenius-Schur-Relationen aus irreduziblen Matrixdarstellungen von $\mathcal{H}$ explizite Formeln für primitive Idempotente in $\mathcal{H}$ gewinnen. In diesem Kapitel wird dies auf den Fall einer symmetrischen Algebra $\mathcal{H}$ über einem Körper verallgemeinert. Man kommt dann aber nicht mehr mit irreduziblen Matrixdarstellungen aus, sondern braucht Matrixdarstellungen, die durch geeignete Basiswahl aus projektiv unzerlegbaren Moduln entstehen. Hierbei ist eine Basis eines projektiv unzerlegbaren $\mathcal{H}$ -Moduls P „geeignet“, wenn sie an die Untermodulkette

$$\text{soc } P \leq \text{rad } P \leq P$$

angepasst ist, wobei $\text{soc } P$ der Sockel und $\text{rad } P$ das Radikal von P sind.

IV.1 Grundlagen und Definitionen

(1.1) Definition (Nicht ausgeartete Bilinearform, vgl. [GP00, 7.1.1])

Es sei A ein kommutativer Ring und $\mathcal{H}$ eine A -freie A -Algebra von endlichem Rang. Eine Bilinearform $(-|-) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow A$ auf $\mathcal{H}$ heißt **nicht ausgeartet**, wenn für eine A -Basis $(T_w)_{w \in W}$ von $\mathcal{H}$ die Determinante der Gram-Matrix $(T_w|T_v)_{w,v \in W}$ eine Einheit in A ist.

(1.2) Proposition (Duale Basen)

Es sei A ein kommutativer Ring und $\mathcal{H}$ eine A -freie A -Algebra von endlichem Rang. Weiter sei $(-|-) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow A$ eine Bilinearform auf $\mathcal{H}$.

Ist $(-|-)$ **nicht ausgeartet**, dann ist für eine **beliebige** A -Basis $(C_y)_{y \in W}$ von $\mathcal{H}$ die Determinante der Matrix $(C_y|C_x)_{y,x \in W}$ eine Einheit in A und es gibt eine A -Basis $(C_y^\vee)_{y \in W}$ von $\mathcal{H}$ mit

$$(C_y^\vee|C_x) = \delta_{y,x} \quad \text{für alle } y, x \in W. \quad (\text{IV.1})$$

Diese nennen wir die **zu $(C_y)_{y \in W}$ duale Basis**.

Existiert umgekehrt zu **einer** A -Basis $(C_y)_{y \in W}$ von $\mathcal{H}$ eine Basis $(C_y^\vee)_{y \in W}$ mit IV.1, dann ist die Bilinearform $(-|-)$ **nicht ausgeartet**.

Beweis:

Es sei $(T_w)_{w \in W}$ eine A -Basis von $\mathcal{H}$, für die die Determinante der Gram-Matrix $(T_w|T_v)_{w,v \in W}$ eine Einheit in A ist.

Für eine beliebige A -Basis $(C_y)_{y \in W}$ von $\mathcal{H}$ gibt es dann eine Basiswechselmatrix $S = (S_{y,w})_{y,w \in W}$ mit $C_y = \sum_{w \in W} S_{y,w} T_w$ für alle $y \in W$, und die Determinante von S ist ebenfalls eine Einheit in A . Dann gilt aber die folgende Matrixgleichung:

$$(C_y|C_x)_{y,x \in W} = S(T_w|T_v)_{w,v \in W} S^T,$$

wobei S^T die Transponierte von S ist. Daraus folgt, dass die Determinante von $(C_y|C_x)_{y,x \in W}$ ebenfalls eine Einheit ist.

Wenn $N = (N_{w,y})_{w,y \in W}$ die Inverse der Gram-Matrix $(C_y|C_x)_{y,x \in W}$ ist, dann setzen wir einfach $C_w^\vee := \sum_{y \in W} N_{w,y} C_y$ für $w \in W$. Damit gilt $(C_w^\vee|C_x) = \delta_{w,x}$ für alle $w, x \in W$. Also ist $(C_w^\vee)_{w \in W}$ die duale Basis zu $(C_w)_{w \in W}$.

Existiert zu einer beliebigen A -Basis $(C_y)_{y \in W}$ von $\mathcal{H}$ die duale Basis $(C_y^\vee)_{y \in W}$, dann kann man $C_y^\vee$ in der Basis $(C_w)_{w \in W}$ schreiben:

$$C_y^\vee = \sum_{w \in W} N_{y,w} C_w \quad \text{für alle } y \in W.$$

Da aber auch $(C_y^\vee)_{y \in W}$ eine A -Basis von $\mathcal{H}$ ist, ist die Matrix $N = (N_{y,w})_{y,w \in W}$ invertierbar, also ist ihre Determinante $\det(N)$ eine Einheit in A . Weil

$$(C_y^\vee|C_x)_{y,x \in W} = N \cdot (C_w|C_x)_{w,x \in W}$$

die Einheitsmatrix ist, ist $(-|-)$ nicht ausgeartet. $\square$

(1.3) Definition (Spurform, symmetrische Algebra, vgl. [GP00, (7.1.1)])

Es sei A ein kommutativer Ring und $\mathcal{H}$ eine A -freie A -Algebra von endlichem Rang. Eine A -lineare Abbildung $\tau : \mathcal{H} \rightarrow A$ heißt **Spurform**, wenn $\tau(hh') = \tau(h'h)$ für alle $h, h' \in \mathcal{H}$ gilt. Wir nennen eine Spurform τ **symmetrisierend**, wenn die zugehörige symmetrische Bilinearform

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow A, \quad (h, h') \mapsto \tau(hh')$$

nicht ausgeartet im Sinne von IV.(1.1) ist. Eine Algebra $\mathcal{H}$ wie oben mit einer symmetrisierenden Spurform τ heißt **symmetrische Algebra**.

(1.4) Lemma (Isomorphie mit Dualraum, vgl. [CR81, (9.5)])

Es sei $\mathcal{H}$ eine symmetrische Algebra über dem kommutativen Ring A mit symmetrisierender Spurform τ . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{H}_{\mathcal{H}} &\longrightarrow (\mathcal{H}_{\mathcal{H}})^* := \text{Hom}_A(\mathcal{H}_{\mathcal{H}}, A) \\ h &\longmapsto (x \mapsto \tau(hx)) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{H}$ -Moduln.

Beweis: Offenbar ist θ linear und ein Homomorphismus von $\mathcal{H}$ -Moduln:

$$\theta(hy)(x) = \tau(hy \cdot x) = \tau(h \cdot yx) = \theta(h)(yx) \quad \text{für alle } h, x, y \in \mathcal{H}.$$

Da die Bilinearform zu τ , die (h, h') auf $\tau(h \cdot h')$ abbildet, nach Voraussetzung nicht ausgeartet ist, existiert wegen Proposition IV.(1.2) zu jeder Basis $(T_w)_{w \in W}$ die duale Basis $(T_w^\vee)_{w \in W}$. Deswegen ist θ injektiv, ist nämlich $h = \sum_{w \in W} a_w T_w$, so folgt aus $0 = \theta(h)(T_w^\vee) = \tau(h \cdot T_w^\vee) = a_w$ für alle $w \in W$, dass $h = 0$ ist. Der Homomorphismus θ ist aber auch surjektiv, da ein Element von $(\mathcal{H}_{\mathcal{H}})^*$ durch seine Werte auf einer Basis von $\mathcal{H}$ festgelegt wird. $\square$

(1.5) Definition/Proposition (Element z_ρ , vgl. [CR81, (9.17)])

Es sei $\mathcal{H}$ eine symmetrische Algebra mit Spurform τ über dem kommutativen Ring A . Wir bezeichnen mit z_ρ das Element von $\mathcal{H}$ (siehe IV.(1.4)), für das die Linearform $h \mapsto \tau(z_\rho \cdot h)$ gleich dem Charakter ρ der regulären Darstellung von $\mathcal{H}$ ist (damit ist auch in Charakteristik $p \neq 0$ die Spur der regulären Darstellung gemeint).

Dann lässt sich z_ρ auch so beschreiben: Ist $(T_w)_{w \in W}$ eine beliebige A -Basis von $\mathcal{H}$ und $(T_w^\vee)_{w \in W}$ die zugehörige duale Basis, dann gilt:

$$z_\rho = \sum_{w \in W} T_w^\vee T_w = \sum_{w \in W} \rho(T_w) \cdot T_w^\vee.$$

Außerdem ist z_ρ zentral in $\mathcal{H}$.

Beweis: Wir verwenden mehrfach, dass die zu τ gehörende symmetrische Bilinearform nicht ausgeartet ist, also wie in IV.(1.4) einen Isomorphismus mit dem Dualraum induziert.

Die Koordinaten eines beliebigen Elements $x \in \mathcal{H}$ bezüglich der Basis $(T_w)_{w \in W}$ lassen sich wegen

$$x = \sum_{w \in W} \tau(T_w^\vee \cdot x) T_w \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H} \quad (\text{IV.2})$$

bequem mit der dualen Basis ausdrücken. Für den Charakter ρ der rechts-regulären Darstellung ist der Charakterwert $\rho(h)$ eines Elementes $h \in \mathcal{H}$ gleich der Summe der Diagonaleinträge der Darstellungsmatrix zu h bezüglich einer beliebigen Basis. Deswegen gilt mit Gleichung IV.2

$$\rho(h) = \sum_{w \in W} \tau(T_w^\vee \cdot T_w h)$$

für alle $h \in \mathcal{H}$ und damit:

$$\tau(z_\rho \cdot h) = \rho(h) = \sum_{w \in W} \tau(T_w^\vee \cdot T_w h) = \tau \left(\sum_{w \in W} T_w^\vee T_w \cdot h \right) \quad \text{für alle } h \in H.$$

Also ist $z_\rho = \sum_{w \in W} T_w^\vee T_w$ und diese Formel ist unabhängig von der gewählten Basis.

Die andere Gleichung folgt sofort wegen $\tau(z_\rho \cdot T_v) = \rho(T_v)$ für alle $v \in W$, da dies zeigt, dass die $T_v^\vee$ -Koordinate von z_ρ gleich $\rho(T_v)$ ist.

Wegen

$$\tau(z_\rho h \cdot T_w) = \rho(h T_w) = \rho(T_w h) = \tau(z_\rho \cdot T_w h) = \tau(h z_\rho \cdot T_w) \quad \text{für alle } w \in W$$

vertauscht z_ρ mit jedem Element $h \in \mathcal{H}$. □

(1.6) Definition/Proposition (Mittelungsoperator I , vgl. [GP00, (7.1.9)])

Es sei $\mathcal{H}$ eine symmetrische Algebra mit Spurform τ über dem kommutativen Ring A . Weiter seien M und N zwei $\mathcal{H}$ -Moduln, $\varphi \in \text{Hom}_A(M, N)$ ein A -Modulhomomorphismus und $(T_w)_{w \in W}$ eine beliebige A -Basis von $\mathcal{H}$ mit zugehöriger dualer Basis $(T_w^\vee)_{w \in W}$.

Wir definieren $I(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N)$ durch:

$$I(\varphi)(m) := \sum_{w \in W} \varphi(m T_w^\vee) T_w \quad \text{für alle } m \in M.$$

Dann ist $I(\varphi)$ ein $\mathcal{H}$ -Modulhomomorphismus und hängt nicht von der Wahl der Basis ab. Sind X und Y zwei weitere $\mathcal{H}$ -Moduln, dann gilt für beliebige $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(X, M)$ und $\pi \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(N, Y)$:

$$I(\varphi \circ \psi) = I(\varphi) \circ \psi \quad \text{und} \quad I(\pi \circ \varphi) = \pi \circ I(\varphi).$$

Bemerkung: Diese „Mittelungsmethode“ wird zum Beispiel auch zum Beweis des Satzes von Maschke benutzt und erlaubt, einen A -Homomorphismus zwischen $\mathcal{H}$ -Moduln zu einem $\mathcal{H}$ -Homomorphismus zu „verbessern“.

Beweis: Nachrechnen, siehe z.B. [GP00, (7.1.10)]. □

(1.7) Lemma (Gaschütz-Ikeda, vgl. [GP00, 7.1.11])

Es sei $\mathcal{H}$ eine symmetrische Algebra mit Spurform τ über dem kommutativen Ring A . Weiter sei P ein $\mathcal{H}$ -Modul, der als A -Modul projektiv ist. Dann ist P als $\mathcal{H}$ -Modul genau dann projektiv, wenn es ein $\varphi \in \text{End}_A(P)$ gibt mit $I(\varphi) = \text{id}_P$.

Beweis: Siehe [GP00, 7.1.11]. □

IV.2 Symmetrische Algebren über Körpern

(2.1) Vorbemerkungen (Krull-Schmidt-Azumaya, projektiv unzerlegbare Moduln)

In diesem Abschnitt werden wir symmetrische Algebren über Körpern betrachten. Da man hier mit der Dimension über dem Grundkörper argumentieren kann, erhält man automatisch die aufsteigende und die absteigende Kettenbedingung für endlich-dimensionale Moduln und damit den Satz von Krull-Schmidt-Azumaya (siehe [CR81, (6.12)]). Deswegen ist jeder projektiv unzerlegbare Modul für eine symmetrische Algebra $\mathcal{H}$ über einem Körper als $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zu einem Ideal $e\mathcal{H}$, wobei e ein primitives Idempotent in $\mathcal{H}$ ist.

(2.2) Definition/Proposition (Schur-Elemente, vgl. [GP00, (7.2.1)])

Es sei $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale symmetrische Algebra mit Spurform τ über dem Körper K und V ein absolut einfacher $\mathcal{H}$ -Modul. Dann gibt es eine eindeutige Konstante $c_V \in K$ mit

$$I(\varphi) = c_V \operatorname{Tr}(\varphi) \operatorname{id}_V \quad \text{für alle } \varphi \in \operatorname{End}_K(V).$$

Die Konstante c_V hängt nur vom Isomphietyp von V ab. Sie wird das **Schur-Element** zu V genannt.

Beweis: Siehe [GP00, (7.1.10)], analoge Rechnungen finden sich später in diesem Abschnitt. $\square$

(2.3) Definition/Proposition (Orthogonalraum, vgl. [CR81, (9.8)])

Es sei $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale symmetrische Algebra mit Spurform τ über dem Körper K und $M \subseteq \mathcal{H}$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$M^\perp := \{h \in \mathcal{H} \mid \tau(hm) = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

der **Orthogonalraum** von M .

Ist L ein Linksideal in $\mathcal{H}$, dann ist $L^\perp$ ein Rechtsideal in $\mathcal{H}$, nämlich der Rechtsannihilator von L . Ist R ein Rechtsideal in $\mathcal{H}$, dann ist $R^\perp$ ein Linksideal, nämlich der Linksannihilator von R . Die Zuordnung $L \leftrightarrow L^\perp$ ist eine bijektive, inklusionsumkehrende Korrespondenz zwischen der Menge der Linksideale von $\mathcal{H}$ und der Menge der Rechtsideale von $\mathcal{H}$.

Beweis: Nach Definition bedeutet $h \in L^\perp$, dass $\tau(Lh) := \{\tau(lh) \mid l \in L\}$ gleich $\{0\}$ ist. Daraus folgt aber sofort $Lh = 0$, da τ symmetrisierend ist. Damit ist klar, dass $L^\perp$ gleich dem Rechtsannihilator des Linksideals L , also ein Rechtsideal und insbesondere ein Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist. Die zweite Behauptung folgt analog.

Aus $M \subseteq N$ folgt sofort $M^\perp \supseteq N^\perp$, also ist $L \leftrightarrow L^\perp$ inklusionsumkehrend. Die Inklusion $L \subseteq L^{\perp\perp}$ ist klar, da aber $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^*$ als K -Vektorräume isomorph sind, ist $\dim_K L^\perp = \dim_K \mathcal{H} - \dim_K L$, also ist sogar $L = L^{\perp\perp}$. $\square$

Bemerkung: Für diese Proposition braucht man nicht „symmetrische Algebra“, sondern nur „Frobenius-Algebra“. Dann muss man aber den Orthogonalraum anders definieren (siehe [CR81, (9.8)]).

(2.4) Proposition (symmetrisch $\implies$ quasi-Frobenius, vgl. [CR81, (9.9)])

Es sei $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale symmetrische Algebra mit Spurform τ über dem Körper K und $N := \operatorname{rad}(\mathcal{H})$ das Jacobson-Radikal von $\mathcal{H}$. Dann gilt:

1. $N^\perp$ ist ein zweiseitiges Ideal von $\mathcal{H}$.
2. Für jedes primitive Idempotent $e \in \mathcal{H}$ ist $eN = \operatorname{rad}(e\mathcal{H})$ der eindeutige maximale Untermodul von $e\mathcal{H}$ und $e \cdot (N^\perp) = \operatorname{soc}(e\mathcal{H})$ der eindeutige minimale Untermodul von $e\mathcal{H}$.
3. Die Algebra $\mathcal{H}$ ist selbst-injektiv (= quasi-Frobenius), d.h. der rechts-reguläre Modul $\mathcal{H}_{\mathcal{H}}$ ist injektiv.

Beweis: Analog zu [CR81, (9.9)]. Beachte $N^\perp = \{h \in \mathcal{H} \mid Nh = 0\}$ aus Proposition IV.(2.3). $\square$

IV.3 Schur-Relationen

Die folgenden Voraussetzungen sind nützlich, wenn man explizit über die Struktur eines projektiv unzerlegbaren Moduls (PIM) reden will:

(3.1) Voraussetzungen (Basiswahl in projektiv unzerlegbarem Modul)

Es sei $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale symmetrische Algebra mit Spurform τ über dem Körper K und $N := \text{rad } \mathcal{H}$ das Jacobson-Radikal von $\mathcal{H}$. Der Körper K sei ein Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$. Weiter sei P ein nicht-einfacher, projektiv unzerlegbarer Modul für $\mathcal{H}$ mit Sockel $V := \text{soc } P$ und Radikal $\text{rad } P$.

Es seien $d, m, n \in \mathbb{N}$ und $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von P , so dass $(b_i)_{1 \leq i \leq d}$ eine Basis von $V = \text{soc } P$ und $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ eine Basis von $\text{rad } P$ ist.

Wie in IV.(2.1) erklärt, ist P als $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zum Rechtsideal $e\mathcal{H}$ für ein primitives Idempotent $e \in \mathcal{H}$ und mit [CR81, Proposition (9.12)] folgt, dass der Kopf $P/\text{rad } P$ als $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zum Sockel $V = \text{soc}(P)$ ist. Also ist $n = m + d$.

Die Basis sei nun so gewählt, dass

$$\begin{aligned} \pi : P &\longrightarrow P \\ b_i &\longmapsto \begin{cases} b_{i-m} & \text{für } i > m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

ein $\mathcal{H}$ -Endomorphismus ist. Wir nennen π die **Projektion vom Kopf auf den Sockel**.

Wir bezeichnen mit $(b_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ die zu $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ **duale Basis** von $P^* := \text{Hom}_K(P, K)$, es gilt also $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$.

(3.2) Bemerkung (Basiswahl ist immer möglich)

Obige Basiswahl ist immer möglich: Nach Voraussetzung ist P nicht einfach, also sind Sockel, Radikal und P echt verschieden. Man kann nun zunächst eine Basis des Sockels wählen, dann zu einer Basis des Radikals ergänzen und verwenden, dass der Kopf isomorph zum Sockel ist. Wählt man dann nämlich Urbilder der Basisvektoren des Sockels unter einem Endomorphismus von P , der das Radikal im Kern hat und den Sockel als Bild, dann erhält man automatisch Vektoren $(b_i)_{m < i \leq n}$ mit der gewünschten Eigenschaft.

(3.3) Proposition (Struktur von $\text{End}_{\mathcal{H}}(P)$)

Es gelten die Voraussetzungen in IV.(3.1). Dann gibt es für jedes $\varphi \in \text{End}_{\mathcal{H}}(P)$ eine eindeutige Konstante $c \in K$, so dass $\text{Im}(\varphi - c \cdot \text{id}_P) \subseteq \text{rad } P$ ist. Es gilt dann $\pi \circ \varphi = c \cdot \pi = \varphi \circ \pi$.

Beweis: Man beachte, dass wir für die folgenden Überlegungen **nicht** verwenden, dass P projektiv ist, sondern nur, dass P einen einfachen Kopf hat, der isomorph zum Sockel $\text{soc } P = V$ ist.

Da K Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$ ist, ist der einfache Modul V absolut einfach und es gilt $\text{End}_{\mathcal{H}}(V) = K \cdot \text{id}_V$ (siehe zum Beispiel [CR81, (3.43)]). Das Radikal $\text{rad } P$ liegt im Kern jedes Homomorphismus $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, V)$. Dementsprechend ist $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, V)$ eindimensional als K -Vektorraum, besteht also nur aus den Vielfachen der kanonischen Projektion $P \twoheadrightarrow P/\text{rad } P \cong V$. Die folgende Sequenz ist exakt ($\text{Hom}(M, -)$ ist links-exakt):

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, \text{rad } P) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, P) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, P/\text{rad } P).$$

Fassen wir $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, \text{rad } P)$ als Teilmenge von $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, P)$ auf, so folgt daraus, dass es zu jedem $\varphi \in \text{End}_{\mathcal{H}}(P)$ eine eindeutige Konstante $c \in K$ gibt, für die $\varphi - c \cdot \text{id}_P \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, \text{rad } P)$ ist, so dass also $\text{Im}(\varphi - c \cdot \text{id}_P) \subseteq \text{rad } P$ gilt.

Dann ist $\pi \circ (\varphi - c \cdot \text{id}_P) = 0$, da $\text{rad } P = \ker \pi$ ist, und damit $\pi \circ \varphi = c \cdot \pi$. Für die andere Verkettung überlegt man sich, dass ein $\mathcal{H}$ -Endomorphismus von P , dessen Bild im Radikal liegt, in der Radikalreihe „nach unten“ abbildet, also den Sockel auf 0 abbildet, da der Sockel der letzte nicht-verschwindenden Modul in der Radikalreihe ist. Also ist auch $(\varphi - c \cdot \text{id}_P) \circ \pi = 0$, da $\text{soc } P = \text{Im } \pi$ ist. So folgt $\varphi \circ \pi = c \cdot \pi$. $\square$

Bemerkung: Wir hätten die vorliegende Proposition auch folgendermaßen beweisen können: Wie oben erwähnt ist P als $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zum Rechtsideal $e\mathcal{H}$ für ein primitives Idempotent $e \in \mathcal{H}$. Der Endomorphismenring $\text{End}_{\mathcal{H}}(e\mathcal{H})$ ist nach [CR81, (6.10)] lokal. Wegen [Fei82, (I.18.8)] ist aber

$$\text{End}_{\mathcal{H}}(e\mathcal{H}) / \text{rad}(\text{End}_{\mathcal{H}}(e\mathcal{H})) \cong e\mathcal{H}e / \text{rad}(e\mathcal{H}e) \cong K.$$

Ein Endomorphismus von $e\mathcal{H}$ ist aber genau dann nicht invertierbar (und damit in $\text{rad}(e\mathcal{H}e)$), wenn er nicht surjektiv ist, wenn er also ins Radikal (eindeutiger, maximaler Untermodul) abbildet. $\square$

(3.4) Proposition (Umformulierung in Koordinaten)

Es gelten die Voraussetzungen in IV.(3.1). Dann gibt es zu jedem Endomorphismus $\varphi \in \text{End}_{\mathcal{H}}(P)$ von P eine eindeutige Konstante $c \in K$, so dass für die Matrixkoordinatenfunktionen gilt:

$$b_i^*(\varphi(b_j)) = \begin{cases} \delta_{ij} \cdot c & \text{für } 1 \leq i \leq d \text{ und } 1 \leq j \leq d \\ \delta_{ij} \cdot c & \text{für } m < i \leq n \text{ und } m < j \leq n \\ 0 & \text{für } d < i \leq n \text{ und } 1 \leq j \leq d \\ 0 & \text{für } m < i \leq n \text{ und } 1 \leq j \leq m \end{cases}.$$

Für die Konstante $c \in K$ gilt $\pi \circ \varphi = c \cdot \pi = \varphi \circ \pi$ mit dem Endomorphismus π aus IV.(3.1).

Beweis: Ein Endomorphismus $\varphi \in \text{End}_{\mathcal{H}}(P)$ bildet das Radikal $\text{rad } P$ in sich ab (siehe z.B. [CR81, (5.1)(i)]). Dies gilt dann induktiv auch für die weiteren Glieder der Radikalreihe, also zuletzt auch für den Sockel. Damit folgen alle Aussagen aus der Basiswahl in IV.(3.1) und aus IV.(3.3). $\square$

(3.5) Bemerkung (Umformulierung mit Matrizen)

Beschreibt man einen Endomorphismus $\varphi \in \text{End}_{\mathcal{H}}(P)$ bezüglich der Basis $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ durch eine Matrix (in Spaltenkonvention), so erhält man eine Blockstruktur, wie sie in Abbildung IV.1 zu sehen ist (mit E_d ist die $d \times d$ -Einheitsmatrix gemeint).

$$\left[\begin{array}{c|c|c} c \cdot E_d & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & c \cdot E_d \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} d \text{ Zeilen} \\ m - d \text{ Zeilen} \\ d \text{ Zeilen} \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\quad}_d \text{ Spalten} \quad \underbrace{\quad}_{m-d} \text{ Spalten} \quad \underbrace{\quad}_d \text{ Spalten}$$

Abbildung IV.1: Matrizen von Endomorphismen bezüglich der Basis (b_i) in Spaltenkonvention

Wir betrachten jetzt den Mittelungsoperator I mit expliziten Koordinatenrechnungen. Wir werden uns nämlich einen Überblick über alle Mittelungen verschaffen, indem wir K -Homomorphismen vom Rang 1 mitteln. Wir betrachten insbesondere solche, deren Kern von allen bis auf einen Basisvektor aufgespannt wird.

(3.6) Proposition (Mittelung von K -Homomorphismen vom Rang 1)

Es gelten die Voraussetzungen aus IV.(3.1). Zusätzlich sei $\tilde{V}$ ein einfacher $\mathcal{H}$ -Modul, der nicht isomorph zu V , dem Kopf von P , ist. Weiter seien $\tilde{v} \in \tilde{V}$ und $b^* \in P^*$ beliebig, $(B_w)_{w \in W}$ eine beliebige Basis von $\mathcal{H}$ und $(B_w^\vee)_{w \in W}$ die zugehörige duale Basis bezüglich der zu τ gehörenden Bilinearform.

Dann verschwindet die Mittelung $I(\varphi)$ des K -Homomorphismus vom Rang 1

$$\begin{aligned} \varphi : P &\longrightarrow \tilde{V} \\ x &\longmapsto b^*(x) \cdot \tilde{v} \end{aligned}$$

überall, es gilt also

$$0 = I(\varphi)(x) = \sum_{w \in W} b^*(x B_w) \tilde{v} B_w^\vee \quad \text{für alle } x \in P.$$

Insbesondere ist für jede Linearform $f^* \in \tilde{V}^* = \text{Hom}_K(\tilde{V}, K)$

$$0 = \sum_{w \in W} b^*(x B_w) f^*(\tilde{v} B_w^\vee) \quad \text{für alle } x \in P.$$

Bemerkung: Die letzte Gleichung kann wie bei den klassischen Frobenius-Schur-Relationen als eine Orthogonalität von Matrixkoordinatenfunktionen verschiedener Darstellungen aufgefasst werden (vgl. [GP00, 7.2.2]).

Beweis: Nach Schur's Lemma (siehe z.B. [CR81, (3.17)]) ist $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(V, \tilde{V}) = 0$. Da aber P ein Modul mit einfachem Kopf V ist, ist auch $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, \tilde{V}) = 0$, weil P keinen Untermodul mit Faktormodul isomorph zu $\tilde{V}$ hat. Die Mittelung $I(\varphi)$ ist aber ein $\mathcal{H}$ -Homomorphismus. $\square$

(3.7) Proposition (Mittelung von K -Endomorphismen vom Rang 1)

Es gelten die Voraussetzungen aus IV.(3.1). Es sei $(B_w)_{w \in W}$ eine beliebige Basis von $\mathcal{H}$ und $(B_w^\vee)_{w \in W}$ die zugehörige duale Basis bezüglich der zu τ gehörenden Bilinearform.

Weiter sei für $1 \leq s, t \leq n$ mit $\varphi_{s,t}$ der K -Endomorphismus des projektiven Moduls P vom Rang 1 mit der folgenden Abbildungsvorschrift bezeichnet:

$$\begin{aligned} \varphi_{s,t} : P &\longrightarrow P \\ x &\longmapsto b_s^*(x) \cdot b_t \end{aligned}$$

Dann gilt für die Matrixkoordinaten der Mittelung $I(\varphi_{s,t})$:

$$C(i, j, s, t) := b_i^*(I(\varphi_{s,t})(b_j)) = \sum_{w \in W} b_i^*(b_t B_w) \cdot b_s^*(b_j B_w^\vee) = b_s^*(I(\varphi_{i,j})(b_t)) \quad (\text{IV.3})$$

für $1 \leq i, j, s, t \leq n$.

Damit haben wir für diese Zahlen eine zweite Interpretation als Matrixkoordinaten einer anderen Mittelung gefunden! Wir bezeichnen den Ausdruck in Gleichung IV.3 mit $C(i, j, s, t)$, es gilt also $C(i, j, s, t) = C(s, t, i, j)$ für alle i, j, s und t zwischen 1 und n .

Bemerkung: Dieser Trick stammt aus [GP00, 7.2.1] und wird dort zum Beweis der Frobenius-Schur-Relationen für Matrixkoordinatenfunktionen einfacher Moduln benutzt.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} b_i^*(I(\varphi_{s,t})(b_j)) &= \sum_{w \in W} b_i^*(b_s^*(b_j B_w^\vee) \cdot b_t B_w) \\ &= \sum_{w \in W} b_i^*(b_t B_w) \cdot b_s^*(b_j B_w^\vee) \\ &= \sum_{w \in W} b_s^*(b_i^*(b_t B_w) \cdot b_j B_w^\vee) \\ &= b_s^*(I(\varphi_{i,j})(b_t)), \end{aligned}$$

weil die Mittelung unabhängig von der gewählten Basis ist und $(B_w)_{w \in W}$ die duale Basis zu $(B_w^\vee)_{w \in W}$ bezüglich der zu τ gehörenden Bilinearform ist. $\square$

Über den Ausdruck $C(i, j, s, t)$ in Gleichung IV.3 können wir nun mit Hilfe von Proposition IV.(3.4) einige Aussagen treffen, indem wir beide Interpretationen als Mittelung verwenden:

(3.8) Proposition (Koordinaten der Mittelung von K -Endomorphismen vom Rang 1)

Es gelten die Voraussetzungen aus IV.(3.1) und die Bezeichnungen aus IV.(3.7).

Es seien weiter $1 \leq i, j, s, t \leq n$. Dann gilt für den Ausdruck in Gleichung IV.3:

$$C(i, j, s, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } s > d \text{ und } t \leq d & (\spadesuit) \\ 0 & \text{für } s > m \text{ und } t \leq m & (\spadesuit) \\ 0 & \text{für } i > d \text{ und } j \leq d & (\heartsuit) \\ 0 & \text{für } i > m \text{ und } j \leq m & (\heartsuit) \\ 0 & \text{für } s, t \leq d \text{ und } s \neq t & (\spadesuit) \\ 0 & \text{für } s, t > m \text{ und } s \neq t & (\spadesuit) \\ 0 & \text{für } i, j \leq d \text{ und } i \neq j & (\heartsuit) \\ 0 & \text{für } i, j > m \text{ und } i \neq j & (\heartsuit) \\ C(i, j, 1, 1) & \text{für } s = t \leq d & (\clubsuit) \\ C(i, j, 1, 1) & \text{für } s = t > m & (\clubsuit) \\ C(1, 1, s, t) & \text{für } i = j \leq d & (\diamondsuit) \\ C(1, 1, s, t) & \text{für } i = j > m & (\diamondsuit) \end{cases}.$$

Beweis: Die Behauptungen folgen mit Proposition IV.(3.4) direkt aus der jeweiligen Interpretation als $\mathcal{H}$ -Endomorphismus. Die mit $(\spadesuit)$ bzw. $(\clubsuit)$ markierten Aussagen folgen aus der Interpretation von $C(i, j, s, t) = b_s^*(I(\varphi_{i,j})(b_t))$ als Koordinaten der Mittelung von $\varphi_{i,j}$ (siehe Gleichung IV.3). Die mit $(\heartsuit)$ bzw. $(\diamondsuit)$ markierten Aussagen folgen aus der Interpretation von $C(i, j, s, t) = b_i^*(I(\varphi_{s,t})(b_j))$ als Koordinaten der Mittelung von $\varphi_{s,t}$. Für $(\clubsuit)$ und $(\diamondsuit)$ verwendet man, dass die Diagonalkoordinaten alle gleich sind. $\square$

Nach Proposition IV.(3.3) ist jeder $\mathcal{H}$ -Endomorphismus von P eindeutig als Summe eines Vielfachen der Identität und einem nilpotenten $\mathcal{H}$ -Endomorphismus zu schreiben. Wir wollen nun unser Augenmerk auf die Frage richten, welche Mittelungen überhaupt eine Identitätskomponente haben. Wir verwenden als nächstes, dass man $\mathcal{H}$ -Endomorphismen (wie zum Beispiel π aus IV.(3.1)) aus einer Mittelung herausziehen kann (siehe Proposition IV.(1.6)).

(3.9) Proposition (Identitätskomponente von Mittelungen)

Es gelten die Voraussetzungen aus IV.(3.1) und die Bezeichnungen aus IV.(3.7).

Ist $t \leq m$ **oder** $s > d$, dann ist die Mittelung $I(\varphi_{s,t})$ nilpotent, bildet also ins Radikal von P ab. Insbesondere gilt in diesem Fall für $i, j \leq d$:

$$C(i, j, s, t) = 0. \quad (\text{IV.4})$$

Für $t > m$ **und** $s \leq d$ **und** $i, j \leq d$ gilt:

$$C(i, j, s, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } s \neq t - m \\ C(1, m+1, 1, 1) & \text{für } i = j \text{ und } s = t - m \end{cases}. \quad (\text{IV.5})$$

Die Zahl $C(1, m+1, 1, 1)$ ist ungleich 0.

Beweis: Wir betrachten die Verkettungen $\pi \circ \varphi_{s,t}$ und $\varphi_{s,t} \circ \pi$ mit dem $\mathcal{H}$ -Endomorphismus π aus IV.(3.1). Es gilt nämlich

$$\pi \circ \varphi_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq m \\ \varphi_{s,t-m} & \text{falls } t > m \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_{s,t} \circ \pi = \begin{cases} 0 & \text{falls } s > d \\ \varphi_{s+m,t} & \text{falls } s \leq d \end{cases},$$

wie man sich sofort mit den Definitionen von π und $\varphi_{s,t}$ in IV.(3.1) und IV.(3.7) überlegt. Da aber π ein $\mathcal{H}$ -Endomorphismus ist und deswegen nach Proposition IV.(1.6) folgt, dass

$$I(\pi \circ \varphi_{s,t}) = \pi \circ I(\varphi_{s,t}) \quad \text{und} \quad I(\varphi_{s,t} \circ \pi) = I(\varphi_{s,t}) \circ \pi$$

ist, gilt:

$$\pi \circ I(\varphi_{s,t}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq m \\ I(\varphi_{s,t-m}) & \text{falls } t > m \end{cases} \quad \text{und} \quad I(\varphi_{s,t}) \circ \pi = \begin{cases} 0 & \text{falls } s > d \\ I(\varphi_{s+m,t}) & \text{falls } s \leq d \end{cases} \cdot (*)$$

Darauf wenden wir nun Proposition IV.(3.3) an. Da $I(\varphi_{s,t})$ ein $\mathcal{H}$ -Endomorphismus ist, gibt es danach ein eindeutiges $c \in K$, so dass $\text{Im}(I(\varphi_{s,t}) - c \cdot \text{id}_P) \subseteq \text{rad } P$ ist. Es hat die Eigenschaft, dass $\pi \circ I(\varphi_{s,t}) = c \cdot \pi = I(\varphi_{s,t}) \circ \pi$ ist. Nun folgt für $t \leq m$ (betrachte $\pi \circ I(\varphi_{s,t})$ in $(*)$ links) **oder** $s > d$ (betrachte $I(\varphi_{s,t}) \circ \pi$ in $(*)$ rechts) jeweils zunächst $c = 0$ und dann mit Proposition IV.(3.8) (obere ($\heartsuit$)-Zeile bzw. obere ($\diamondsuit$)-Zeile) die Behauptung in Gleichung IV.4, da $C(1, 1, s, t) = c$ ist. Für $t > m$ **und** $s \leq d$ **und** $i, j \leq d$ ist nun nach Proposition IV.(3.8) zunächst $C(i, j, s, t) = 0$ für $i \neq j$ (obere ($\heartsuit$)-Zeile) und $C(i, j, s, t) = C(1, 1, s, t)$ für $i = j$ (obere ($\diamondsuit$)-Zeile). Nun können wir unsere Erkenntnisse über π benutzen:

$$\begin{aligned} C(1, 1, s, t) &= b_1^*(I(\varphi_{s,t})(b_1)) = b_1^*((I(\varphi_{s,t}) \circ \pi)(b_{m+1})) \\ &= b_1^*(I(\varphi_{s+m,t})(b_{m+1})) = C(1, m+1, s+m, t). \end{aligned}$$

Da $s+m > m$ ist, folgt wieder mit Proposition IV.(3.8), dass dieser Ausdruck für $s+m \neq t$ verschwindet (untere ($\spadesuit$)-Zeile) und sonst gleich $C(1, m+1, 1, 1)$ ist (untere ($\clubsuit$)-Zeile), was zu beweisen war.

Damit kennen wir nun die „Identitätskomponente“ einer beliebigen Mittelung $I(\varphi_{s,t})$ für $1 \leq s, t \leq n$. Diese verschwindet **nur** für $s \leq d$ und $t = s+m$ **nicht** und ist in diesem Fall gleich $C(1, m+1, 1, 1)$. Da die K -Endomorphismen $(\varphi_{s,t})_{1 \leq s, t \leq n}$ eine Basis von $\text{End}_K(P)$ bilden und nach dem Lemma von Gaschütz-Ikeda (siehe IV.(1.7)) ein K -Endomorphismus von P existiert, dessen Mittelung gleich der Identität ist, folgt, dass $C(1, m+1, 1, 1) \neq 0$ ist. $\square$

(3.10) Korollar (Frobenius-Schur-Relationen, vgl. [GP00, 7.2.2])

Es gelten die Voraussetzungen aus IV.(3.1) und die Bezeichnungen aus IV.(3.7). Wir interpretieren nun die Zahl $C(i, j, s, t)$ erneut anders.

Für $j \leq d$ und $1 \leq i, s, t \leq n$ gilt:

$$C(i, j, s, t) = \sum_{w \in W} b_i^*(b_t B_w) \cdot b_s^*(b_j B_w^\vee) = \delta_{i,j} \cdot \delta_{s+m,t} \cdot C(1, m+1, 1, 1). \quad (\text{IV.6})$$

Bemerkung: Die Abbildungen $h \mapsto b_i^*(b_t h)$ von $\mathcal{H}$ nach K sind Matrixkoordinatenfunktionen einer Darstellung von $\mathcal{H}$ auf dem projektiven Modul P und die Abbildungen $h \mapsto b_s^*(b_j h)$ für $1 \leq s, j \leq d$ sind Matrixkoordinatenfunktionen einer Darstellung von $\mathcal{H}$ auf dem einfachen Modul $V = \text{soc } P$. Gleichung IV.6 zeigt also eine Art Orthogonalitätsrelationen zwischen diesen beiden Funktionenmen-gen.

Beweis: Ist $i > d$, so verschwindet $C(i, j, s, t)$ wegen Proposition IV.(3.8) und $j \leq d$. Sei nun auch $i \leq d$. Mit Proposition IV.(3.9) folgt, dass $C(i, j, s, t) = 0$ ist für $t \leq m$ **oder** $s > d$. Im Fall $t > m$ und $s \leq d$ folgt Gleichung IV.6 direkt aus Proposition IV.(3.9). $\square$

IV.4 Primitive Idempotente

In diesem Abschnitt werden einige spezielle Elemente in symmetrischen Algebren betrachtet und ihre Wirkung auf projektiv unzerlegbaren Moduln. Schließlich werden explizit primitive Idempotente konstruiert.

(4.1) Definition/Proposition (Element z_θ , vgl. [CR81, (9.17)])

Es gelten die Voraussetzungen aus IV.(3.1) und die Bezeichnungen aus IV.(3.7). Der Charakter des einfachen Moduls V sei mit θ bezeichnet. Wir bezeichnen mit z_θ das Element von $\mathcal{H}$, für das die

Linearform $h \mapsto \tau(z_\theta \cdot h)$ gleich dem Charakter θ ist (siehe IV.(1.4)). Dann ist z_θ zentral in $\mathcal{H}$, operiert also auf jedem $\mathcal{H}$ -Modul als ein $\mathcal{H}$ -Endomorphismus und es gilt für den unzerlegbaren Modul P :

$$b_t \cdot z_\theta = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq m \\ C(1, m+1, 1, 1) \cdot b_{t-m} & \text{für } t > m \end{cases}. \quad (\text{IV.7})$$

Das Element z_θ projiziert somit den Kopf auf den Sockel, hat also das Radikal $\text{rad } P$ im Kern und als Bild den Sockel $\text{soc } P$.

Außerdem annulliert z_θ jeden einfachen Modul $\tilde{V}$, der nicht isomorph zu V ist und jeden projektiv unzerlegbaren Modul Q , der nicht isomorph zu P ist.

Bemerkung: Man beachte, dass laut Proposition IV.(3.9) die Zahl $C(1, m+1, 1, 1)$ ungleich 0 ist.

Beweis: Dass z_θ zentral in $\mathcal{H}$ ist, folgt wie am Ende des Beweises von Proposition IV.(1.5). Für ein beliebiges $h \in \mathcal{H}$ gilt nämlich:

$$\tau(z_\theta h \cdot B_w) = \theta(h \cdot B_w) = \theta(B_w \cdot h) = \tau(z_\theta B_w \cdot h) = \tau(h z_\theta \cdot B_w) \quad \text{für alle } w \in W.$$

Also ist $z_\theta h = h z_\theta$ für alle $h \in \mathcal{H}$.

Da $z_\theta = \sum_{w \in W} \theta(B_w) \cdot B_w^\vee$ ist (es gilt $\tau(z_\theta B_w) = \theta(B_w)$ für alle $w \in W$) und der Modul V gleich dem Sockel von P ist, können wir z_θ auch so schreiben:

$$z_\theta = \sum_{w \in W} \theta(B_w) \cdot B_w^\vee = \sum_{w \in W} \sum_{s=1}^d b_s^*(b_s \cdot B_w) \cdot B_w^\vee = \sum_{s=1}^d \left(\sum_{w \in W} b_s^*(b_s \cdot B_w) \cdot B_w^\vee \right). \quad (\text{IV.8})$$

Wir bezeichnen den Ausdruck in der Klammer mit $z_s := \sum_{w \in W} b_s^*(b_s \cdot B_w) \cdot B_w^\vee \in \mathcal{H}$ für $1 \leq s \leq d$ und betrachten, wie z_s auf P operiert. Dazu seien $i, t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i, t \leq n$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b_i^*(b_t \cdot z_s) &= b_i^* \left(b_t \cdot \left(\sum_{w \in W} b_s^*(b_s \cdot B_w) \cdot B_w^\vee \right) \right) \\ &= \sum_{w \in W} b_i^*(b_t \cdot B_w^\vee) \cdot b_s^*(b_s \cdot B_w) \\ &= C(i, s, s, t) \\ &= \delta_{i,s} \cdot \delta_{s+m,t} \cdot C(1, m+1, 1, 1), \end{aligned}$$

wobei letzteres Gleichheitszeichen gilt, da wir Korollar IV.(3.10) anwenden können, weil nach Voraussetzung $s \leq d$ ist. Damit ist aber gezeigt, dass alle Basisvektoren außer b_{s+m} durch z_s auf Null abgebildet werden und dass $b_{s+m} z_s = C(1, m+1, 1, 1) \cdot b_s$ ist. Zusammen mit Gleichung IV.8 folgt damit Gleichung IV.7.

Ist andererseits $\tilde{V}$ ein einfacher $\mathcal{H}$ -Modul, der nicht isomorph zu V ist, und ist $\tilde{v} \in \tilde{V}$ ein beliebiger Vektor, dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{v} \cdot z_s &= \tilde{v} \cdot \left(\sum_{w \in W} b_s^*(b_s \cdot B_w) \cdot B_w^\vee \right) \\ &= \sum_{w \in W} b_s^*(b_s \cdot B_w) \cdot \tilde{v} \cdot B_w^\vee = 0 \end{aligned}$$

laut Proposition IV.(3.6), also annulliert z_s und damit wegen Gleichung IV.8 auch z_θ ganz $\tilde{V}$.

Sei nun Q ein projektiv unzerlegbarer $\mathcal{H}$ -Modul, der nicht isomorph zu P ist, also als Kopf einen einfachen Modul $\tilde{V}$ hat, der nicht isomorph zu V ist. Wir betrachten ein beliebiges Element $x \in Q$. Es ist

$$x \cdot z_s = \sum_{w \in W} b_s^*(b_s \cdot B_w) \cdot x \cdot B_w^\vee.$$

Ist $f^* \in Q^*$ eine beliebige Linearform auf Q , dann ist

$$f^*(x \cdot z_s) = \sum_{w \in W} b_s^*(b_s \cdot B_w) \cdot f^*(x \cdot B_w^\vee). \quad (\text{IV.9})$$

Da $s \leq d$ ist, ist $h \mapsto b_s^*(b_s \cdot h)$ eine Matrixkoordinatenfunktion einer Darstellung von $\mathcal{H}$ auf dem einfachen Modul $V = \text{soc } P$. Deswegen kann man Proposition IV.(3.6) auf den projektiv unzerlegbaren Modul Q mit einfachem Kopf $\tilde{V}$ und den einfachen Modul V in der folgenden Weise anwenden:

$$(P, V, \tilde{V}, b^*, \tilde{v}, f^*)_{\text{IV.(3.6)}} = (Q, \tilde{V}, V, f^*, b_s, b^*)_{\text{hier}}.$$

Also ist $f^*(x \cdot z_s) = 0$ für jedes beliebige $f^* \in Q^*$ (beachte Gleichung IV.9), damit gilt auch $x \cdot z_s = 0$ in Q . Wegen Gleichung IV.8 annulliert dann auch z_θ ganz Q . $\square$

(4.2) Korollar (Operation von z_ρ auf PIMs)

Es gelten die Voraussetzungen aus IV.(3.1) und die Bezeichnungen aus IV.(3.7). Das Element z_ρ aus IV.(1.5) entspricht bezüglich des Isomorphismus aus IV.(1.4) dem regulären Charakter. Es ist also gleich einer Summe aus Vielfachen der Elemente z_θ , wobei θ durch die einfachen Charaktere läuft und z_θ jeweils das vermöge IV.(1.4) entsprechende Element in $\mathcal{H}$ ist. Die Vielfachheit ist dabei jeweils die Vielfachheit des entsprechenden einfachen Moduls im regulären. Also operiert z_ρ auf jedem nicht-einfachen, projektiv unzerlegbaren Modul P als Projektion von Kopf auf Sockel, es sei denn, die Vielfachheit des einfachen im regulären Modul ist durch die Charakteristik des Grundkörpers teilbar. In letzterem Fall operiert z_ρ wie die Null. $\square$

(4.3) Definition/Proposition (Primitive Idempotente)

Es gelten die Voraussetzungen aus IV.(3.1) und die Bezeichnungen aus IV.(3.7). Der Charakter des einfachen Moduls V sei mit θ bezeichnet.

Wir bezeichnen die Zahl $C(1, m+1, 1, 1)$ mit c . Sie ist ungleich 0 und wir setzen für $1 \leq i \leq d$:

$$\tilde{e}_i := c^{-1} \cdot \sum_{w \in W} b_i^*(b_{i+m} \cdot B_w) \cdot B_w^\vee \quad (\text{IV.10})$$

Dann gibt es ein ganzzahliges Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$, so dass $e_i := f(\tilde{e}_i)$ für $1 \leq i \leq d$ primitive Idempotente in $\mathcal{H}$ sind, die modulo dem Radikal von $\mathcal{H}$ paarweise orthogonal sind, und für die die Rechtsideale $e_i \mathcal{H}$ als $\mathcal{H}$ -Moduln isomorph zu P sind. Es gilt also:

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i \mathcal{H} \cong P \quad \text{und} \quad e_i \cdot e_{i'} \in \text{rad}(\mathcal{H}) \quad \text{für} \quad 1 \leq i, i' \leq d \quad \text{und} \quad i \neq i'. \quad (\text{IV.11})$$

Das Polynom f ist im Beweis explizit angegeben.

Beweis: Dass $c = C(1, m+1, 1, 1)$ ungleich 0 ist, wurde bereits in Proposition IV.(3.9) bewiesen. Wir betrachten zunächst die Elemente $\tilde{e}_i$.

Die Operation von $\tilde{e}_i$ auf dem Modul $V = \text{soc } P$ bestimmen wir, indem wir $s, j \in \mathbb{N}$ mit $s, j \leq d$ wählen und betrachten:

$$b_s^*(b_j \cdot \tilde{e}_i) = c^{-1} \cdot b_s^* \left(b_j \cdot \left(\sum_{w \in W} b_i^*(b_{i+m} \cdot B_w) \cdot B_w^\vee \right) \right) = c^{-1} \cdot \sum_{w \in W} b_i^*(b_{i+m} \cdot B_w) \cdot b_s^*(b_j \cdot B_w^\vee)$$

Die letzte Summe ist nach der Definition in Gleichung IV.3 gleich $C(i, j, s, i+m)$. Nach Proposition IV.(3.10) gilt: $C(i, j, s, i+m) = \delta_{i,j} \cdot \delta_{s+m, i+m} \cdot C(1, m+1, 1, 1)$. Deswegen ist $b_s^*(b_j \cdot \tilde{e}_i)$ genau für $s = j = i$ gleich 1 und sonst gleich 0. Damit operiert $\tilde{e}_i$ auf V bezüglich der Basis $(b_s)_{1 \leq s \leq d}$ als eine Matrix mit genau einer Eins auf der Diagonalen in Zeile i und sonst lauter Nullen. Das Produkt $\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_{i'}$ annulliert für $i \neq i'$ ganz V .

Auf einem einfachen Modul $\tilde{V}$, der nicht isomorph zu V ist, annulliert $\tilde{e}_i$ alles: Ist nämlich $\tilde{v} \in \tilde{V}$ beliebig, dann ist

$$\tilde{v} \cdot \tilde{e}_i = c^{-1} \cdot \sum_{w \in W} b_i^*(b_{i+m} \cdot B_w) \cdot \tilde{v} \cdot B_w^\vee = 0,$$

wie man sofort mit Proposition IV.(3.6) sieht. Also liegen $\tilde{e}_i^2 - \tilde{e}_i$ für $1 \leq i \leq d$ und $\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_{i'}$ für $1 \leq i, i' \leq d$ und $i \neq i'$ im Radikal $\text{rad } \mathcal{H}$, denn sie annullieren jeden einfachen Modul.

Nun sind wir aber genau in der Situation des „Hebens von Idempotenten“ (vgl. Theorem II.(4.3)). Die Algebra $\mathcal{H}$ ist nämlich — da sie endlich-dimensional über einem Körper ist — ein artinscher Ring, ihr Radikal ist nilpotent. Dadurch ist sie automatisch vollständig in der $\text{rad } \mathcal{H}$ -adischen Topologie. Wie in Theorem II.(4.3) wählen wir $t \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(\text{rad } \mathcal{H})^t = 0$ ist und setzen

$$f(X) := \sum_{s=0}^t \binom{2t}{s} X^{2t-s} (1-X)^s.$$

Für dieses Polynom gilt (siehe Beweis zu Theorem II.(4.3) oder [CR81, (6.7)]):

- (i) $f \in \mathbb{Z}[X]$
- (ii) $f^2 - f \equiv 0 \pmod{X^t(1-X)^t}$
- (iii) $f \equiv X \pmod{X(1-X)}$

Wegen (iii) operiert $e_i := f(\tilde{e}_i)$ auf jedem einfachen $\mathcal{H}$ -Modul wie $\tilde{e}_i$. Insbesondere ist damit $e_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq d$. Wegen (ii) und $X^t(1-X)^t = (X - X^2)^t$ sind die e_i Idempotente in $\mathcal{H}$, da $\tilde{e}_i - \tilde{e}_i^2 \in \text{rad } \mathcal{H}$ ist.

Wir haben also bewiesen, dass $e_i \mathcal{H}$ ein projektiver $\mathcal{H}$ -Modul ist. Wegen Proposition [CR81, (6.6)] lässt sich der Isomorphietyp solcher Moduln an ihrem Kopf ablesen: Es ist $e_i \mathcal{H} \cong e_i \mathcal{H}$ genau dann, wenn $e_i \mathcal{H} / \text{rad}(e_i \mathcal{H}) \cong V$ ist. Über den Kopf eines projektiven Moduls $e_i \mathcal{H}$ gibt aber die Homomorphismenmenge $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(e_i \mathcal{H}, V) \cong V e_i$ Auskunft: Die K -Dimension ist gleich der Vielfachheit, mit der V im Kopf von $e_i \mathcal{H}$ vorkommt (siehe [Fei82, I.8.2]). Diese ist hier aber gleich 1, weil $V e_i$ eindimensional ist, da e_i wie die Projektion auf den i -ten Basisvektor von V operiert. Alle anderen einfachen Moduln V' kommen überhaupt nicht im Kopf vor, da $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(e_i \mathcal{H}, V') \cong V' e_i = 0$ ist. Damit sind aber die e_i (für $1 \leq i \leq d$) primitive Idempotente zum projektiven Modul P , es gilt also $e_i \mathcal{H} \cong P$ als $\mathcal{H}$ -Moduln. Zusätzlich sind die e_i paarweise orthogonal modulo dem Radikal, es gilt nämlich $e_i \cdot e_{i'} \in \text{rad } \mathcal{H}$ für alle $1 \leq i, i' \leq d$ und $i \neq i'$, da diese Produkte in jeder einfachen Matrixdarstellung von $\mathcal{H}$ auf 0 abgebildet werden. $\square$

(4.4) Bemerkung (Bibliographischer Kommentar)

Die in IV.(3.6) und IV.(3.10) beschriebenen verallgemeinerten Frobenius-Schur-Relationen tauchen schon in einer alten Arbeit von Brauer (siehe [Bra45, Theoreme 4 und 5]) für Frobenius-Algebren auf, wurden aber dort nicht verwendet, um primitive Idempotente zu konstruieren.

Kapitel V

Zerlegungsabbildungen und Brauer-Reziprozität

In diesem Kapitel werden zunächst einige Grundlagen für die Betrachtung modularer Darstellungen von Algebren gelegt, indem Zerlegungsabbildungen definiert werden. Dabei werden im Wesentlichen Darstellungen über einem Körper K „ganzzahlig“ gemacht und dann elementweise modulo einem maximalen Ideal reduziert, um Darstellungen über einem anderen Körper L zu erhalten.

Danach wird gezeigt, dass diese sich auch anders beschreiben lassen, nämlich durch Betrachtung von projektiv unzerlegbaren Moduln bzw. primitiven Idempotenten. Hierbei geht man in der anderen Richtung vor: Die primitiven Idempotenten in der Algebra über L lassen sich zu Idempotenten in der Algebra über einem geeigneten Ring $\mathcal{O}$ heben, dessen Quotientenkörper gleich K ist. Dabei gehen die vorigen Ergebnisse über Semiperfektheit ein. Dieser Ansatz führt zur Definition einer „Klebeabbildung“, die beschreibt, wie die primitiven Idempotenten in der Algebra über K „zusammenkleben“, wenn man die Algebra über $\mathcal{O}$ betrachtet, also weniger Nenner zulässt.

Die Tatsache, dass beide Konzepte im Wesentlichen dasselbe sind, wird unter dem Stichwort „Brauer-Reziprozität“ bewiesen. Am Ende des Kapitels folgt noch ein Abschnitt über die Faktorisierung von Zerlegungsabbildungen. Dort wird eine Situation beschrieben, in der sich eine Zerlegungsabbildung als Verkettung von zwei anderen beschreiben lässt. Dies wird später bei der Formulierung der James-Vermutung verwendet.

V.1 Grundlagen und Definitionen

(1.1) Definition (Grothendieck-Gruppe, vgl. [CR81, §16B])

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring. Wir bezeichnen mit $R_0(\mathcal{H})$ die **Grothendieck-Gruppe** der Kategorie $\text{mod-}\mathcal{H}$ der endlich erzeugten $\mathcal{H}$ -Moduln.

Die abelsche Gruppe $R_0(\mathcal{H})$ ist also von den Isomorphieklassen $[V]$ endlich erzeugter $\mathcal{H}$ -Moduln V erzeugt. Für diese Erzeuger gelten die Relationen $[V] = [V'] + [V'']$ für jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ von $\mathcal{H}$ -Moduln V , V' und V'' . Wir bezeichnen mit $R_0^+(\mathcal{H})$ das Teilmonoid von $R_0(\mathcal{H})$, das aus den Elementen $[V]$ besteht, wobei $[V]$ eine Isomorphieklasse endlich erzeugter $\mathcal{H}$ -Moduln ist.

(1.2) Proposition (Grothendieck-Gruppe eines artinschen Rings, vgl. [CR81, (16.6)])

Es sei $\mathcal{H}$ ein **artinscher Ring**. Für zwei $\mathcal{H}$ -Moduln V und V' ist genau dann $[V] = [V'] \in R_0(\mathcal{H})$, wenn sie dieselben Vielfachheiten von Kompositionsfaktoren haben. Es folgt, dass $R_0(\mathcal{H})$ eine freie abelsche Gruppe ist mit einer Basis, die durch die Isomorphieklassen der einfachen $\mathcal{H}$ -Moduln gegeben ist.

Beweis: Siehe [CR81, (16.6)]. □

Bemerkung: Dies gilt insbesondere für den Fall, dass $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale Algebra über einem Körper ist.

(1.3) Definition/Proposition (Funktorialität von R_0)

Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Ringe und $F : \text{mod-}\mathcal{H} \rightarrow \text{mod-}\mathcal{H}'$ ein exakter Funktor. Dann induziert F vermöge $[V] \mapsto [FV]$ einen Homomorphismus $R_0(F)$ zwischen den abelschen Gruppen $R_0(\mathcal{H})$ und $R_0(\mathcal{H}')$. Ist $\mathcal{H}''$ ein weiterer Ring und $G : \text{mod-}\mathcal{H}' \rightarrow \text{mod-}\mathcal{H}''$ ein exakter Funktor, dann gilt $R_0(G \circ F) = R_0(G) \circ R_0(F)$.

Beweis: Offensichtlich ist $[V] \mapsto [FV]$ eine wohldefinierte Abbildung auf der Menge der Isomorphieklassen endlich erzeugter Moduln. Da F exakt ist, gehen exakte Sequenzen $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ in exakte Sequenzen $0 \rightarrow FV' \rightarrow FV \rightarrow FV'' \rightarrow 0$ über und $R_0(F)$ ist wohldefiniert. Die Verträglichkeit mit Verkettung ist klar. $\square$

(1.4) Beispiel (Konstantenerweiterung induziert Gruppenhomomorphismus)

Es sei F ein Körper, $F' \supset F$ ein Erweiterungskörper und $\mathcal{H}$ eine F -Algebra. Dann ist die Konstantenerweiterung (vgl. I.(3.2) und I.(3.4)) ein exakter Funktor von der Kategorie $\text{mod-}\mathcal{H}$ der endlich erzeugten $\mathcal{H}$ -Moduln in die Kategorie $\text{mod-}F'\mathcal{H}$ der endlich erzeugten $F'\mathcal{H}$ -Moduln. Es ist nämlich F' ein F -Vektorraum und damit als F -Modul frei und deswegen flach. Also ist $F' \otimes_F -$ ein exakter Funktor.

Deswegen induziert die Konstantenerweiterung nach V.(1.3) einen Homomorphismus zwischen den abelschen Gruppen $R_0(\mathcal{H})$ und $R_0(F'\mathcal{H})$, der durch $[V] \mapsto [F' \otimes_F V]$ gegeben ist.

(1.5) Bezeichnungen (Konstantenerweiterung bei Grothendieck-Gruppen)

In der Situation aus V.(1.4) bezeichnen wir den durch den Konstantenerweiterungs-Funktor induzierten Homomorphismus zwischen $R_0(\mathcal{H})$ und $R_0(F'\mathcal{H})$ mit $d_F^{F'}$.

(1.6) Definition (projektive Grothendieck-Gruppe, vgl. [CR81, §16B])

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring. Wir bezeichnen mit $K_0(\mathcal{H})$ die **projektive Grothendieck-Gruppe**, also die Grothendieck-Gruppe der Kategorie $\text{proj-}\mathcal{H}$ der endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{H}$ -Moduln.

Die abelsche Gruppe $K_0(\mathcal{H})$ ist also von den Isomorphieklassen $[P]$ endlich erzeugter, projektiver $\mathcal{H}$ -Moduln P erzeugt. Für diese Erzeuger gelten die Relationen $[P] = [P'] + [P'']$ für jede direkte Summenzerlegung $P \cong P' \oplus P''$ von endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{H}$ -Moduln P , P' und P'' . Wir bezeichnen mit $K_0^+(\mathcal{H})$ das Teilmonoid von $K_0(\mathcal{H})$, das aus den Elementen $[P]$ besteht, wobei P ein endlich erzeugter, projektiver $\mathcal{H}$ -Modul ist.

Bemerkung: In der Kategorie der projektiven Moduln brauchen wir für die Relationen nur direkte Summenzerlegungen, da jede kurze exakte Sequenz aufspaltet.

(1.7) Proposition (Grothendieck-Gruppe eines semiperfekten Rings, vgl. [CR81, (16.7)])

Es sei $\mathcal{H}$ ein **semiperfekter Ring**. Für zwei endlich erzeugte, projektive $\mathcal{H}$ -Moduln P und P' gilt genau dann $[P] = [P'] \in K_0(\mathcal{H})$, wenn sie dieselben Vielfachheiten von projektiv unzerlegbaren Summanden haben. Es folgt, dass $K_0(\mathcal{H})$ eine freie abelsche Gruppe ist mit einer Basis, die durch die Isomorphieklassen der endlich erzeugten, projektiv unzerlegbaren $\mathcal{H}$ -Moduln gegeben ist.

Beweis: Siehe [CR81, (16.7)]. $\square$

Bemerkungen: Wegen Korollar II.(5.7) ist jeder endlich erzeugte, projektive Modul direkte Summe von projektiv unzerlegbaren.

Nach Proposition II.(5.5) ist eine endlich-dimensionale Algebra über einem Körper semiperfekt, also gelten die obigen Aussagen über $K_0(\mathcal{H})$ insbesondere in diesem Fall.

(1.8) Definition/Proposition (Funktorialität von K_0)

Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Ringe und F ein additiver Funktor von der Kategorie $\text{proj-}\mathcal{H}$ der endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{H}$ -Moduln in die Kategorie $\text{proj-}\mathcal{H}'$ der endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{H}'$ -Moduln. Dann induziert F vermöge $[P] \mapsto [FP]$ einen Homomorphismus $K_0(F)$ zwischen den abelschen Gruppen $K_0(\mathcal{H})$ und $K_0(\mathcal{H}')$. Ist $\mathcal{H}''$ ein weiterer Ring und G ein weiterer additiver Funktor von der Kategorie der endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{H}'$ -Moduln in die Kategorie der endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{H}''$ -Moduln, dann gilt $K_0(G \circ F) = K_0(G) \circ K_0(F)$.

Beweis: Offensichtlich ist $[P] \mapsto [FP]$ eine wohldefinierte Abbildung auf der Menge der Isomorphieklassen endlich erzeugter, projektiver Moduln. Da F additiv ist, gehen direkte Summen $P \cong P' \oplus P''$ in direkte Summen $FP \cong FP' \oplus FP''$ über und $K_0(F)$ ist wohldefiniert. Die Verträglichkeit mit Verkettung ist klar. $\square$

(1.9) Beispiel (Ringhomomorphismus induziert Gruppenhomomorphismus)

Ist $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ ein Ringhomomorphismus, dann können wir $\mathcal{H}'$ vermöge φ als $\mathcal{H}$ - $\mathcal{H}'$ -Bimodul auffassen und jedem projektiven $\mathcal{H}$ -Modul P den projektiven $\mathcal{H}'$ -Modul $P \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H}'$ zuordnen. Da der Tensorproduktfunktor $-\otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H}'$ ein additiver Funktor ist, induziert das einen Gruppenhomomorphismus $K_0(-\otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H}') : K_0(\mathcal{H}) \rightarrow K_0(\mathcal{H}')$, für den also $K_0(-\otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H}')([P]) = [P \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H}']$ gilt. Dadurch kann man K_0 als einen Funktor von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der abelschen Gruppen auffassen.

(1.10) Beispiel (Konstantenerweiterung induziert Gruppenhomomorphismus)

Es sei $\mathcal{O}$ ein Ring und $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Algebra. Weiter sei $\mathcal{O}'$ ein Erweiterungsring von $\mathcal{O}$. Dann ist die Konstantenerweiterung ein additiver Funktor von der Kategorie $\text{proj-}\mathcal{H}$ der endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{H}$ -Moduln in die Kategorie $\text{proj-}\mathcal{O}'\mathcal{H}$ der endlich erzeugten, projektiven $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ -Moduln. Ist nämlich P ein endlich erzeugter, projektiver $\mathcal{H}$ -Modul, dann ist $\mathcal{O}'P = \mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} P$ nach Lemma I.(3.5) ein projektiver $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ -Modul. Als Tensorprodukt-Funktor ist $\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} -$ automatisch additiv, induziert also nach Proposition V.(1.3) einen Homomorphismus $K_0(\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} -) : K_0(\mathcal{H}) \rightarrow K_0(\mathcal{O}'\mathcal{H})$ abelscher Gruppen.

(1.11) Bezeichnungen (Konstantenerweiterung bei projektiven Grothendieckgruppen)

Mit der Inklusionsabbildung $i : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{O}'\mathcal{H}$ erhält man mit Hilfe von V.(1.9) dieselbe Abbildung von $K_0(\mathcal{H})$ nach $K_0(\mathcal{O}'\mathcal{H})$ wie in V.(1.10) mit dem Konstantenerweiterungs-Funktor. Wir bezeichnen diese Abbildung mit $e_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}'}$.

(1.12) Definition (Paarung zwischen $K_0(\mathcal{H})$ und $R_0(\mathcal{H})$, vgl. [GR97, 2.1])

Es sei F ein Körper und $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale F -Algebra. Dann definiert

$$\langle [P] | [V] \rangle := \dim_F \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, V)$$

eine bilineare Abbildung $\langle - | - \rangle : K_0(\mathcal{H}) \times R_0(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Beweis: Die Wohldefiniertheit folgt, weil $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(-, V)$ additiv und $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, -)$ exakt ist, da P projektiv ist. $\square$

(1.13) Proposition (Duale Basen von Grothendieck-Gruppen)

Es sei F ein Körper und $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale F -Algebra. Weiter sei F Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$. Dann ist die Basis von $K_0(\mathcal{H})$, die durch die projektiv unzerlegbaren Moduln gegeben ist, bezüglich $\langle - | - \rangle$ dual zur Basis von $R_0(\mathcal{H})$, die durch die einfachen Moduln gegeben ist.

Beweis: Da $\mathcal{H}$ nach Proposition II.(5.5) semiperfekt ist, sind die projektiv unzerlegbaren Moduln laut Lemma II.(5.8) (und der daran anschließenden Bemerkung) genau die projektiven Hüllen der einfachen Moduln. Ist P die projektive Hülle des einfachen Moduls V , dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, V')$ für jeden einfachen Modul V' als F -Vektorraum isomorph zu $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(V, V')$. Wegen dem Schur'schen Lemma und Theorem I.(3.10) ist die Dimension dieses F -Vektorraums gleich 0, wenn V' nicht isomorph zu V ist, und gleich 1, wenn V isomorph zu V' ist, da F Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$ ist. $\square$

Bemerkung: Ist P die projektive Hülle des einfachen Moduls V , so gibt $\langle [P] | [M] \rangle$ die Vielfachheit von V in einer Kompositionsreihe des Moduls M und $\langle [Q], [V] \rangle$ die Vielfachheit von V im Kopf des projektiven Moduls Q an. Die Vielfachheiten der einfachen Moduln im Kopf eines projektiven beschreiben dessen Isomorphietyp vollständig.

(1.14) Definition/Proposition (Charakteristisches Polynom, vgl. [GP00, 7.3.1])

Es sei R ein kommutativer Ring, $\theta : R \rightarrow F$ ein Ringhomomorphismus in einen Körper F , $\mathcal{H}$ eine R -freie R -Algebra von endlichem Rang und X eine Unbestimmte über F . Es sei mit $\text{Maps}(\mathcal{H}, F[X])$ die Menge der Abbildungen von $\mathcal{H}$ nach $F[X]$ bezeichnet. Sie ist eine Halbgruppe bezüglich punktweiser Multiplikation. Wir fassen F -Vektorräume vermöge θ als R -Moduln auf und bezeichnen die Konstantenreduktion bzw. Konstantenerweiterung mit $F\mathcal{H} := F \otimes_R \mathcal{H}$. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_F : R_0^+(F\mathcal{H}) &\longrightarrow \text{Maps}(\mathcal{H}, F[X]), \\ [M] &\longmapsto (h \mapsto \chi_{(1 \otimes h)}^{(M)}) \end{aligned}$$

wobei $\chi_{(1 \otimes h)}^{(M)}$ das charakteristische Polynom desjenigen F -Endomorphismus von M ist, der durch die Operation von $1_F \otimes h \in F\mathcal{H}$ gegeben ist. Dies ist ein Homomorphismus von Halbgruppen.

Bemerkung: Häufig wird θ eine Inklusion oder eine kanonische Projektion sein oder sogar die Identität. Wenn sie sich unzweifelhaft aus dem Zusammenhang ergeben, werden R und θ im Folgenden meist nicht mehr erwähnt.

Beweis: Die Abbildung ist wohldefiniert, da wegen Proposition V.(1.2) aus $[M] = [M'] \in R_0^+(F\mathcal{H})$ folgt, dass M und M' dieselben Kompositionsfaktoren haben, und weil für jede kurze, exakte Sequenz $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ die Moduln M' und M'' zusammen dieselben Kompositionsfaktoren wie M haben (Vielfachheiten berücksichtigt!). Das charakteristische Polynom $\chi_{(1 \otimes h)}$ hängt aber nur von den Kompositionsfaktoren von M ab. Das charakteristische Polynom auf einer direkten Summe von Moduln ist das Produkt der charakteristischen Polynome auf den Summanden. $\square$

(1.15) Lemma (Brauer-Nesbitt, vgl. [GP00, 7.3.2])

Es sei F ein Körper, $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale F -Algebra und F sei Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$. Dann ist die Abbildung $\mathfrak{p}_F$ aus V.(1.14) mit $R = F$ und $\theta = \text{id}_F$ injektiv.

Beweis: Da F Zerfällungskörper ist, folgt mit [CR81, (3.41)], dass die Menge der irreduziblen Charaktere von $\mathcal{H}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathcal{H}^* := \text{Hom}_F(\mathcal{H}, F)$ ist. Damit sind alle Voraussetzungen in [GP00, 7.3.2] erfüllt. $\square$

(1.16) Lemma (Kompatibilität mit Körpererweiterung, vgl. [GP00, 7.3.4])

Es sei F ein Körper, $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale F -Algebra und F' ein Erweiterungskörper von F . Dann induziert die Konstantenerweiterung wie in V.(1.4) vermöge $[M] \mapsto [F' \otimes_F M]$ einen Homomorphismus $d_F^{F'} : R_0(\mathcal{H}) \rightarrow R_0(F'\mathcal{H})$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} R_0^+(\mathcal{H}) & \xhookrightarrow{\mathfrak{p}_F} & \text{Maps}(\mathcal{H}, F[X]) \\ d_F^{F'} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ R_0^+(F'\mathcal{H}) & \xhookrightarrow{\mathfrak{p}_{F'}} & \text{Maps}(\mathcal{H}, F'[X]) \end{array}$$

Hierbei sind $\mathfrak{p}_F$ und $\mathfrak{p}_{F'}$ jeweils die Abbildungen aus V.(1.14) und der rechte Pfeil ist durch die Einbettung $F[X] \hookrightarrow F'[X]$ gegeben. Ist F Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$, dann ist $d_F^{F'}$ ein Isomorphismus, der die Isomorphieklassen der einfachen Moduln erhält.

Beweis: Siehe [GP00, 7.3.4]. $\square$

(1.17) Lemma (Kompatibilität mit Körpererweiterung II)

Es sei F ein Körper, $\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale F -Algebra und F' ein Erweiterungskörper von F . Dann induziert die Konstantenerweiterung wie in V.(1.10) vermöge $[P] \mapsto [F' \otimes_F P]$ einen Homomorphismus $e_F^{F'} : K_0(\mathcal{H}) \rightarrow K_0(F'\mathcal{H})$. Dieser und $d_F^{F'}$ aus V.(1.5) bzw. V.(1.16) sind verträglich mit der Paarung aus V.(1.12), es gilt nämlich für alle $P \in \text{proj-}\mathcal{H}$ und alle $M \in \text{mod-}\mathcal{H}$:

$$\langle [P] | [M] \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle e_F^{F'}([P]) | d_F^{F'}([M]) \right\rangle_{F'\mathcal{H}} = \langle [F'P] | [F'M] \rangle_{F'\mathcal{H}}. \quad (\text{V.1})$$

Ist F Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$, dann ist $e_F^{F'}$ ein Isomorphismus, der die Isomorphieklassen der projektiv unzerlegbaren Moduln erhält.

Beweis: Der Konstantenerweiterungs-Funktor $F' \otimes_F -$ induziert wie in V.(1.4) und V.(1.10) Homomorphismen $d_F^{F'} : R_0(\mathcal{H}) \rightarrow R_0(F'\mathcal{H})$ und $e_F^{F'} : K_0(\mathcal{H}) \rightarrow K_0(F'\mathcal{H})$. Wir benutzen nun das „Change of Rings“-Lemma aus I.(3.6): Da F' als F -Modul frei und alle vorkommenden Moduln endlich erzeugt sind, ist $F' \otimes_F \text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, M) \cong \text{Hom}_{F'\mathcal{H}}(F'P, F'M)$ als F' -Vektorräume. Die F' -Dimension der linken Seite ist aber gleich der F -Dimension von $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(P, M)$, also gilt

$$\langle [P] | [M] \rangle_{\mathcal{H}} = \langle [F'P] | [F'M] \rangle_{F'\mathcal{H}} \quad \text{für alle } P \in \text{proj-}\mathcal{H} \text{ und alle } M \in \text{mod-}\mathcal{H}.$$

Ist F Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$, dann ist $d_F^{F'}$ laut Lemma V.(1.16) ein Isomorphismus, der die Isomorphieklassen der einfachen Moduln erhält. Ist P projektiv unzerlegbar, dann ist $F'P$ wegen Gleichung V.1 und der Bemerkung nach V.(1.13) ein projektiver $F'\mathcal{H}$ -Modul mit einfachem Kopf, also unzerlegbar. $\square$

(1.18) Definition ($\mathcal{O}$ -Form)

Es sei K ein Körper, $\mathcal{O} \subseteq K$ ein Teilring, $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -freie $\mathcal{O}$ -Algebra von endlichem Rang und M ein endlich erzeugter $K\mathcal{H}$ -Modul. Dann heißt ein $\mathcal{O}$ -freier $\mathcal{H}$ -Modul $\tilde{M}$, für den $K \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{M} \cong M$ gilt, eine **$\mathcal{O}$ -Form von M** .

(1.19) Proposition (Bei Bewertungsringen ist „torsionsfrei“ gleich „frei“, vgl. [Gol80, (5.2)])

Es sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring und M ein endlich erzeugter, torsionsfreier $\mathcal{O}$ -Modul. Dann ist M frei.

Beweisidee: Das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ sei mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet, der Restklassenkörper mit k und die kanonische Projektion mit einem Querstrich: $\bar{} : \mathcal{O} \rightarrow k$. Es sei $(m_i)_{1 \leq i \leq n}$ ein minimales Erzeugendensystem für M . Dies bedeutet nach [Kun85, IV.2.4], dass $(\bar{m}_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von $\bar{M} = M/(\mathfrak{m}M)$ ist. Da $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring ist, könnte man in einer nicht-trivialen Relation $\sum_{i=1}^n o_i m_i = 0$ mit $o_i \in \mathcal{O}$ durch den Koeffizienten mit der niedrigsten Bewertung teilen und erhielte so eine ebensolche Relation, in der ein Koeffizient gleich 1 ist, also auch nach Übergang zu k eine nicht-triviale Relation zwischen den $(\bar{m}_i)_{1 \leq i \leq n}$. Dies wäre aber ein Widerspruch dazu, dass $(\bar{m}_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis ist. $\square$

(1.20) Korollar (Existenz von $\mathcal{O}$ -Formen über Bewertungsringen)

Es sei K ein Körper, $\mathcal{O} \subseteq K$ ein Bewertungsring, $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -freie $\mathcal{O}$ -Algebra von endlichem Rang und M ein endlich erzeugter $K\mathcal{H}$ -Modul. Dann gibt es zu M eine $\mathcal{O}$ -Form $\tilde{M}$.

Beweis: Wir wählen eine K -Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von M und eine $\mathcal{O}$ -Basis $(h_1, \dots, h_m)$ von $\mathcal{H}$. Das $\mathcal{O}$ -Erzeugnis der $(b_i h_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ ist dann ein $\mathcal{H}$ -Untermodul von M , der als torsionsfreier $\mathcal{O}$ -Modul nach V.(1.19) $\mathcal{O}$ -frei ist. $\square$

(1.21) Proposition (Existenz von Bewertungsringen, vgl. [Mat86, Theorem 10.2])

Es sei K ein Körper, $A \subseteq K$ ein Ring und $\mathfrak{q}$ ein Primideal von A . Dann gibt es einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ in K mit $A \subseteq \mathcal{O}$ und $A \cap \text{rad } \mathcal{O} = \mathfrak{q}$.

Beweis: Siehe [Mat86, Theorem 10.2]. $\square$

V.2 Zerlegungsabbildungen

Für den Rest des Kapitels benutzen wir die folgenden Bezeichnungen:

(2.1) Voraussetzungen (Spezialisierung)

Es sei A ein Integritätsbereich und $\mathcal{H}$ eine A -freie A -Algebra von endlichem Rang. Der Quotenkörper von A sei mit K und die Konstantenerweiterung $K \otimes_A \mathcal{H}$ mit $K\mathcal{H}$ bezeichnet (vgl. I.(3.2)). Entsprechend schreiben wir $\mathcal{O}\mathcal{H}$ für $\mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H}$, wenn $\mathcal{O}$ ein Ring mit $A \subseteq \mathcal{O}$ ist.

Zusätzlich sei A ganz-abgeschlossen in K und $\theta : A \rightarrow L$ ein Ringhomomorphismus in einen Körper L , so dass L der Quotientenkörper von $\theta(A)$ ist. Vermöge θ können wir L als einen A -Modul auffassen und von $L\mathcal{H} = L \otimes_A \mathcal{H}$ sprechen (vgl. I.(3.2)). Es sei L Zerfällungskörper für $L\mathcal{H}$. Da L ein Körper ist, ist $\mathfrak{q} := \ker \theta$ ein Primideal in A .

(2.2) Definition (Zerlegungsabbildung d_θ , vgl. [GP00, 7.4.2 und 7.4.3])

Es gelten die Voraussetzungen aus V.(2.1). Die **Zerlegungsabbildung** d_θ ist dann durch die folgende universelle Eigenschaft definiert: $d_\theta : R_0(K\mathcal{H}) \rightarrow R_0(L\mathcal{H})$ ist **der** Homomorphismus abelscher Gruppen, für den das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} R_0^+(K\mathcal{H}) & \xrightarrow{p_K} & \text{Maps}(\mathcal{H}, A[X]) \\ d_\theta \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \theta_* \\ R_0^+(L\mathcal{H}) & \xrightarrow{p_L} & \text{Maps}(\mathcal{H}, L[X]) \end{array} \quad (\text{V.2})$$

Dabei steht p_K für die Abbildung aus V.(1.14). Dass die Polynome im Bildbereich von p_K Koeffizienten aus A haben, wird in V.(2.5) bewiesen. Die Abbildung p_L ist die entsprechende Abbildung über dem Körper L und θ_* steht für die Abbildung, die durch Anwendung von θ auf die Koeffizienten der Polynome induziert wird. Außerdem wird d_θ mit seiner Einschränkung auf $R_0^+(K\mathcal{H}) \subseteq R_0(K\mathcal{H})$ identifiziert.

Bemerkung: In Proposition V.(2.5) wird Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegungsabbildung bewiesen. Dort findet sich auch eine genaue Konstruktion und eine Begründung dafür, dass obige Eigenschaft „universell“ ist.

(2.3) Voraussetzungen (Hilfsring)

Es gelten die Voraussetzungen aus V.(2.1). Es sei $\mathcal{O}$ ein lokaler Ring, für den gilt (vgl. V.(1.21)):

- (i) $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq K$.
- (ii) $\text{rad } \mathcal{O} \cap A = \mathfrak{q}$.

Der Restklassenkörper $\mathcal{O}/\text{rad}(\mathcal{O})$ sei mit k bezeichnet; er ist ein Erweiterungskörper von L , da die Abbildung $A \hookrightarrow \mathcal{O} \twoheadrightarrow k$ einen injektiven Homomorphismus $L \hookrightarrow k$ induziert (L ist der Quotientenkörper von $\theta(A)$).

(2.4) Voraussetzungen (Existenz von $\mathcal{O}$ -Formen)

Es gelten die Voraussetzungen aus V.(2.1) und V.(2.3). Weiter habe $\mathcal{O}$ die folgende Eigenschaft:

- ($\clubsuit$) Zu jedem einfachen $K\mathcal{H}$ -Modul V gibt es eine $\mathcal{O}$ -Form, also ein $\mathcal{O}\mathcal{H}$ -Gitter $\tilde{V}$ mit $V \cong K \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{V}$ als $K\mathcal{H}$ -Moduln.

Bemerkung: Korollar V.(1.20) zeigt, dass ($\clubsuit$) erfüllt ist, wenn $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring ist, da dann sogar jeder endlich erzeugte $K\mathcal{H}$ -Modul M eine $\mathcal{O}$ -Form besitzt.

(2.5) Proposition (Existenz, Eindeutigkeit und Konstruktion der Zerlegungsabbildung)
(vgl. [GP00, 7.4.2 und 7.4.3])

Es gelten die Voraussetzungen aus V.(2.1). Dann existiert die Zerlegungsabbildung d_θ aus V.(2.2) und ist eindeutig durch die dort angegebene Eigenschaft charakterisiert.

Genauer: Es sei $\mathcal{O}$ ein **beliebiger** Ring, der die Voraussetzungen aus V.(2.3) erfüllt und der die Eigenschaft ($\clubsuit$) aus V.(2.4) hat. Dann lässt sich das Bild einer Isomorphieklasse $[V]$ einfacher $K\mathcal{H}$ -Moduln wie folgt beschreiben: Es sei $\tilde{V}$ eine $\mathcal{O}$ -Form von V . Da L Zerfällungskörper für $L\mathcal{H}$ ist, ist $d_L^k : [U] \mapsto [k \otimes_L U]$ nach Proposition V.(1.16) ein Isomorphismus zwischen $R_0(L\mathcal{H})$ und $R_0(k\mathcal{H})$. Es ist

$$d_\theta([V]) = (d_L^k)^{-1}([k \otimes_L \tilde{V}]) \in R_0^+(L\mathcal{H}).$$

Beweis: Zunächst sei bemerkt, dass es immer einen Ring $\mathcal{O}$ gibt, der die Voraussetzungen aus V.(2.3) und (H) aus V.(2.4) erfüllt. Wir brauchen nämlich nur einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ mit $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq K$ und $\text{rad } \mathcal{O} \cap A = \mathfrak{q}$ zu wählen. Dieser existiert nach Proposition V.(1.21). Die für (H) notwendigen $\mathcal{O}$ -Formen existieren dann nach Korollar V.(1.20).

Wir zeigen nun, dass die Abbildung $p_K : R_0^+(K\mathcal{H}) \rightarrow \text{Maps}(\mathcal{H}, K[X])$ aus V.(1.14) in Wirklichkeit nur Werte in $\text{Maps}(\mathcal{H}, A[X])$ annimmt: Sei nämlich M ein beliebiger endlich erzeugter $K\mathcal{H}$ -Modul. Dann existiert nach V.(1.20) für jeden beliebigen Bewertungsring $\mathcal{O}$ mit $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq K$ eine $\mathcal{O}$ -Form, also ein $\mathcal{O}\mathcal{H}$ -Gitter $\tilde{M}$ mit $K \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{M} \cong M$. Daher lässt sich die zu M gehörende Matrixdarstellung von $\mathcal{H}$ über $\mathcal{O}$ realisieren und die charakteristischen Polynome χ_h haben für beliebiges $h \in \mathcal{H}$ Koeffizienten in $\mathcal{O}$. Da A aber laut V.(2.1) ganz-abgeschlossen in K ist und der Schnitt aller Bewertungsringe $\mathcal{O}$ zwischen A und K gleich dem ganzen Abschluss von A in K — also gleich A ist (siehe [Mat86, 10.4]), haben alle charakteristischen Polynome χ_h Koeffizienten in A .

Zu jeder additiven Abbildung φ zwischen den abelschen Halbgruppen $R_0^+(K\mathcal{H})$ und $R_0^+(L\mathcal{H})$ gibt es genau einen Homomorphismus zwischen den abelschen Gruppen $R_0(K\mathcal{H})$ und $R_0(L\mathcal{H})$, der auf φ einschränkt. Da aber p_L nach Lemma V.(1.15) injektiv ist, kann es höchstens ein d_θ geben, dessen Einschränkung auf $R_0^+(K\mathcal{H})$ das Diagramm V.2 kommutativ macht. Damit ist die Eindeutigkeit der Zerlegungsabbildung bewiesen. Dies zeigt, dass die Eigenschaft von d_θ , das Diagramm V.2 kommutativ zu machen, „universell“ bzw. „charakterisierend“ ist.

Zum Beweis der Existenz sei $\mathcal{O}$ ein beliebiger Ring, der die Voraussetzungen aus V.(2.3) erfüllt und die Eigenschaft (H) aus V.(2.4) hat. Wir definieren nun zunächst eine Abbildung

$$d_\theta^\mathcal{O} : R_0^+(K\mathcal{H}) \rightarrow R_0^+(L\mathcal{H})$$

so, wie in der Formulierung der Proposition angegeben, also durch Angabe der Bilder der Isomorphieklassen einfacher Moduln und lineare Fortsetzung. Wir zeigen, dass dieser Homomorphismus von Halbgruppen das Diagramm V.2 kommutativ macht: Es sei nämlich M ein endlich erzeugter $K\mathcal{H}$ -Modul, $h \in \mathcal{H}$ und χ_h das charakteristische Polynom der Operation von $1_K \otimes h$ auf M . Dann ist $(\theta_* \circ p_K)([M])(h)$ gleich dem Polynom, das aus χ_h durch Anwenden von θ auf die Koeffizienten von χ_h entsteht. Andererseits ist χ_h gleich dem Produkt der charakteristischen Polynome der Operation von $1_K \otimes h$ auf den Kompositionsfaktoren (Vielfachheiten berücksichtigt). Das Bild $d_\theta^\mathcal{O}([M])$ von $[M]$ ist nach Definition die Summe der Bilder der Isomorphieklassen der Kompositionsfaktoren von M . Für die Isomorphieklassen der einfachen Moduln V existieren $\mathcal{O}$ -Formen $\tilde{V}$, die mit k tensoriert werden. Deswegen ist $(p_L \circ d_\theta^\mathcal{O})([M])(h)$ gleich dem Produkt der Polynome, die aus den charakteristischen Polynomen der Kompositionsfaktoren durch Anwenden von θ auf die Koeffizienten entstehen. Man beachte, dass die Abbildung d_L^k nach Proposition V.(1.16) ein Isomorphismus ist, der die Isomorphieklassen der einfachen Moduln erhält und verträglich mit der Bildung charakteristischer Polynome ist.

Damit ist gezeigt, dass jedes solche $d_\theta^\mathcal{O}$ das Diagramm V.2 kommutativ macht. Deswegen haben wir $d_\theta = d_\theta^\mathcal{O}$ unabhängig von der Wahl des Ringes $\mathcal{O}$ und der Wahl der $\mathcal{O}$ -Formen $\tilde{V}$ konstruiert und die Existenz ist bewiesen. $\square$

V.3 Klebeabbildungen

In diesem Abschnitt werden wir unter denselben Voraussetzungen wie bei der Zerlegungsabbildung (siehe V.(2.1)) eine andere Abbildung zwischen Grothendieck-Gruppen definieren. Hier betrachten wir projektiv unzerlegbare Moduln anstelle von einfachen und benutzen die projektiven Grothendieck-Gruppen. Die Abbildung geht „in die andere Richtung“.

Später wird sich herausstellen, dass dies genau die duale Abbildung der Zerlegungsabbildung ist.

(3.1) Definition (Klebeabbildung)

Es gelten die Voraussetzungen aus V.(2.1) und V.(2.3). Zusätzlich sei $\mathcal{O}\mathcal{H}$ semiperfekt. Dann definieren wir eine Abbildung $e_\theta^\mathcal{O} : K_0(L\mathcal{H}) \rightarrow K_0(K\mathcal{H})$ wie folgt: Ein projektiv unzerlegbarer $L\mathcal{H}$ -Modul

P ist von der Form $\bar{e}L\mathcal{H}$ für ein primitives Idempotent $\bar{e} \in L\mathcal{H}$. Dieses Idempotent ist auch ein Idempotent in $k\mathcal{H}$ (beachte, dass $L \subseteq k$ ist) und weil $\mathcal{O}\mathcal{H}$ semiperfekt ist, kann man $\bar{e}$ zu einem Idempotent $e \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ heben (man beachte Proposition II.(5.10)), so dass also $1_k \otimes e = \bar{e}$ ist. Wir setzen dann

$$e_\theta^\mathcal{O}([P]) := [eK\mathcal{H}] \in K_0^+(K\mathcal{H}).$$

Wir nennen $e_\theta^\mathcal{O}$ **Klebeabbildung**.

Bemerkung: Der Name „Klebeabbildung“ kommt daher, dass sie beschreibt, wie die primitiven Idempotenten in $K\mathcal{H}$ zusammenkleben, wenn man die Algebra $\mathcal{O}\mathcal{H}$ über dem Ring $\mathcal{O}$ betrachtet. Dies kommt durch das Fehlen von Nennern. Die Zerlegung eines Idempotents e in eine Summe von paarweise orthogonalen, primitiven Idempotenten ist dasselbe wie die Zerlegung des projektiven Moduls $eK\mathcal{H}$ in eine direkte Summe von projektiv unzerlegbaren. Da $K\mathcal{H}$ als endlich-dimensionale Algebra über einem Körper semiperfekt ist, ist diese Zerlegung in Bezug auf den Isomorphietyp bis auf die Reihenfolge eindeutig (siehe Theorem II.(5.9)).

(3.2) Proposition (Wohldefiniertheit der Klebeabbildung)

Die Klebeabbildung $e_\theta^\mathcal{O}$ in V.(3.1) ist wohldefiniert.

Beweis: Nach Lemma II.(4.1).(v) (angewandt auf $\mathcal{O}\mathcal{H}$) ist $k\mathcal{H} \cong \mathcal{O}\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{O}\mathcal{H}$, wenn $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ ist, und $\mathfrak{m}\mathcal{O}\mathcal{H} \subseteq \text{rad } \mathcal{O}\mathcal{H}$, so dass wir die Restklassenvergrößerung

$$\psi : \mathcal{O}\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{O}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{O}\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{O}\mathcal{H}$$

haben. Zwei verschiedene Hebungen e und e' von $\bar{e}$ sind also immer modulo $\text{rad } \mathcal{O}\mathcal{H}$ gleich, so dass die projektiven Moduln $e\mathcal{O}\mathcal{H}$ und $e'\mathcal{O}\mathcal{H}$ mit Proposition II.(4.2) und Lemma II.(5.3) als $\mathcal{O}\mathcal{H}$ -Moduln isomorph sind. Insbesondere ist also $[eK\mathcal{H}] = [e'K\mathcal{H}] \in K_0(K\mathcal{H})$ und $e_\theta^\mathcal{O}([P])$ hängt nicht von der Wahl von e ab.

Die gleiche Argumentation greift auch in dem Fall, dass man mit zwei verschiedenen primitiven Idempotenten $\bar{e}$ und $\bar{e}'$ in $L\mathcal{H}$ anfängt: Weil $\bar{e}L\mathcal{H}$ und $\bar{e}'L\mathcal{H}$ als $L\mathcal{H}$ -Moduln isomorph sind, gilt auch $\bar{e}k\mathcal{H} \cong \bar{e}'k\mathcal{H}$ als $k\mathcal{H}$ -Moduln, also ist $\psi(\bar{e}) \cdot (\mathcal{O}\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{O}\mathcal{H}) \cong \psi(\bar{e}') \cdot (\mathcal{O}\mathcal{H}/\text{rad } \mathcal{O}\mathcal{H})$ (wieder mit Proposition II.(4.2) und Lemma II.(5.3) angewandt auf $\mathcal{O}\mathcal{H}$). Dann kann man aber wieder wie oben schließen und sieht, dass $e_\theta^\mathcal{O}([P])$ auch nicht von der Wahl von $\bar{e}$ abhängt. $\square$

(3.3) Lemma (Variante von „Change of Rings“, vgl. [Fei82, Lemma 17.6])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer, lokaler Ring mit Quotientenkörper K und Restklassenkörper k . Weiter sei $\mathcal{O}\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung, $P \in \text{proj-}\mathcal{O}\mathcal{H}$ und M ein $\mathcal{O}\mathcal{H}$ -Gitter. Zusätzlich sei $\mathcal{O}\mathcal{H}$ semiperfekt. Dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{H}}(P, M)$ ein endlich erzeugter, $\mathcal{O}$ -freier $\mathcal{O}$ -Modul und

$$\text{Hom}_{k \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}\mathcal{H}}(k \otimes_{\mathcal{O}} P, k \otimes_{\mathcal{O}} M) \cong k \otimes_{\mathcal{O}} \text{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{H}}(P, M).$$

Außerdem gilt für den Rang r von $\text{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{H}}(P, M)$:

$$\dim_k \text{Hom}_{k \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}\mathcal{H}}(k \otimes_{\mathcal{O}} P, k \otimes_{\mathcal{O}} M) = r = \dim_K \text{Hom}_{K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}\mathcal{H}}(K \otimes_{\mathcal{O}} P, K \otimes_{\mathcal{O}} M).$$

Beweis: Wegen Korollar II.(5.7) ist P isomorph zu einer endlichen direkten Summe von projektiv unzerlegbaren Moduln der Form $e_i\mathcal{O}\mathcal{H}$ für Idempotenten $e_i \in \mathcal{O}\mathcal{H}$. Da Hom additiv ist, kann man also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $P = e\mathcal{O}\mathcal{H}$ ist für ein primitives Idempotent $e \in \mathcal{O}\mathcal{H}$. Dann ist aber $\text{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{H}}(e\mathcal{O}\mathcal{H}, M)$ als $\mathcal{O}$ -Modul isomorph zu Me . Da M als $\mathcal{O}$ -Modul frei ist und die Zerlegung in eine direkte Summe $M = Me \oplus M(1 - e)$ hat, ist Me ein $\mathcal{O}$ -projektiver und damit ($\mathcal{O}$ ist lokal, siehe [Mat86, Theorem 2.5]) ein $\mathcal{O}$ -freier Modul, der als direkter Summand von M endlich erzeugt ist. Also ist auch gezeigt, dass $\text{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{H}}(e\mathcal{O}\mathcal{H}, M)$ als $\mathcal{O}$ -Modul frei ist.

Mit Lemma I.(3.8) haben wir sowohl für k als auch für K das „Change of Rings“-Lemma zur Verfügung und schließen sofort

$$\text{Hom}_{k \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}\mathcal{H}}(k \otimes_{\mathcal{O}} e\mathcal{O}\mathcal{H}, k \otimes_{\mathcal{O}} M) \cong k \otimes_{\mathcal{O}} \text{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{H}}(e\mathcal{O}\mathcal{H}, M) \quad \text{als } k\text{-Vektorräume}$$

und

$$\mathrm{Hom}_{K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}}(K \otimes_{\mathcal{O}} e\mathcal{O}\mathcal{H}, K \otimes_{\mathcal{O}} M) \cong K \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{H}}(e\mathcal{O}\mathcal{H}, M) \quad \text{als } K\text{-Vektorräume.}$$

Da $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{H}}(e\mathcal{O}\mathcal{H}, M)$ als $\mathcal{O}$ -Modul frei ist, folgen die Behauptungen über den Rang r und die Dimensionen. $\square$

(3.4) Proposition (Unabhängigkeit der Klebeabbildung von $\mathcal{O}$)

Die Klebeabbildung $e_{\theta}^{\mathcal{O}}$ aus Definition V.(3.1) hängt nicht von der Wahl des Hilfsrings $\mathcal{O}$ ab, solange $\mathcal{O}$ die Voraussetzungen aus V.(2.3) und $(\heartsuit)$ aus V.(2.4) erfüllt, $\mathcal{O}\mathcal{H}$ semiperfekt ist und K Zerfällungskörper für $K\mathcal{H}$ ist.

Genauer: Es gelten die Voraussetzungen aus V.(2.1). Zusätzlich sei K Zerfällungskörper für $K\mathcal{H}$. Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ zwei Ringe, die jeweils die Voraussetzungen aus V.(2.3) und $(\heartsuit)$ aus V.(2.4) erfüllen und für die $\mathcal{O}_1\mathcal{H}$ und $\mathcal{O}_2\mathcal{H}$ semiperfekt sind, dann gilt für alle projektiv unzerlegbaren $L\mathcal{H}$ -Moduln P :

$$e_{\theta}^{\mathcal{O}_1}([P]) = e_{\theta}^{\mathcal{O}_2}([P]) \in K_0^+(K\mathcal{H}).$$

Beweis: Es sei k_1 der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_1$ und k_2 derjenige von $\mathcal{O}_2$. Weiter seien $\bar{e} \in L\mathcal{H}$ ein Idempotent, für das $P \cong \bar{e}L\mathcal{H}$ ist, und $e_1 \in \mathcal{O}_1\mathcal{H}$ und $e_2 \in \mathcal{O}_2\mathcal{H}$ Idempotenten, für die $1_{k_1} \otimes_{\mathcal{O}_1} e_1 = \bar{e} \in k_1\mathcal{H}$ und $1_{k_2} \otimes_{\mathcal{O}_2} e_2 = \bar{e} \in k_2\mathcal{H}$ gilt. Wir vergleichen nun $e_1K\mathcal{H}$ und $e_2K\mathcal{H}$, indem wir jeweils Vielfachheiten von einfachen Moduln im Kopf zählen, also die Paarung aus V.(1.12) verwenden:

Ist V ein beliebiger einfacher $K\mathcal{H}$ -Modul, dann ist $\langle [e_iK\mathcal{H}] | [V] \rangle_{K\mathcal{H}}$ die Vielfachheit von V im Kopf von $e_iK\mathcal{H}$ für $i = 1, 2$ (vgl. Proposition V.(1.13) mit Bemerkung). Nun existieren nach Voraussetzung aber sowohl eine $\mathcal{O}_1$ -Form V_1 von V als auch eine $\mathcal{O}_2$ -Form V_2 von V und wir können Lemma V.(3.3) in beiden Fällen anwenden. Daraus folgt, dass

$$\langle [e_iK\mathcal{H}] | [V] \rangle_{K\mathcal{H}} = \left\langle [\bar{e}k_i\mathcal{H}] | [k_i \otimes_{\mathcal{O}_i} V_i] \right\rangle_{k_i\mathcal{H}}$$

ist für $i = 1, 2$.

Da aber L Zerfällungskörper für $L\mathcal{H}$ ist, induziert die Konstantenerweiterung von L nach k_i jeweils einen Isomorphismus von $R_0(L\mathcal{H})$ nach $R_0(k_i\mathcal{H})$ und von $K_0(L\mathcal{H})$ nach $K_0(k_i\mathcal{H})$ und wir erhalten wegen der Verträglichkeit mit $\langle - | - \rangle$ (vgl. Lemma V.(1.16) und Lemma V.(1.17)):

$$\langle [e_iK\mathcal{H}] | [V] \rangle_{K\mathcal{H}} = \left\langle [\bar{e}L\mathcal{H}] | (d_L^{k_i})^{-1}([k_i \otimes_{\mathcal{O}_i} V_i]) \right\rangle_{L\mathcal{H}} = \langle [\bar{e}L\mathcal{H}] | d_{\theta}([V]) \rangle_{L\mathcal{H}}$$

für $i = 1, 2$. Nun steht aber auf der rechten Seite das Bild von $[V] \in R_0(K\mathcal{H})$ unter der Zerlegungsabbildung d_{θ} , die — wie in Proposition V.(2.5) bewiesen — unabhängig vom Ring $\mathcal{O}$ ist. Also ist die Vielfachheit eines beliebigen einfachen $K\mathcal{H}$ -Moduls V im Kopf von $e_1K\mathcal{H}$ gleich derjenigen im Kopf von $e_2K\mathcal{H}$. Damit sind die Köpfe von $e_1K\mathcal{H}$ und $e_2K\mathcal{H}$ isomorph und deswegen mit Proposition II.(4.2) auch $e_1K\mathcal{H}$ und $e_2K\mathcal{H}$ selbst. Die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Bemerkung: Der Beweis zu dieser Behauptung liefert in Wirklichkeit noch mehr. Er zeigt nämlich, dass die Klebeabbildung die duale Abbildung zur Zerlegungsabbildung ist bezüglich der Paarungen $\langle - | - \rangle$ für $K\mathcal{H}$ und $L\mathcal{H}$. Davon handelt der nächste Abschnitt.

V.4 Brauer-Reziprozität

(4.1) Theorem (Brauer-Reziprozität, vgl. [GR97, 2.12])

Es gelten die Voraussetzungen aus V.(2.1) und V.(2.3), außerdem gelte $(\heartsuit)$ aus V.(2.4) und $\mathcal{O}\mathcal{H}$ sei semiperfekt. Zusätzlich sei K Zerfällungskörper für die Algebra $K\mathcal{H}$. Dann ist die Klebeabbildung $e_{\theta} : K_0(L\mathcal{H}) \rightarrow K_0(K\mathcal{H})$ die duale Abbildung der Zerlegungsabbildung $d_{\theta} : R_0(K\mathcal{H}) \rightarrow R_0(L\mathcal{H})$ bezüglich der Paarung $\langle - | - \rangle$ aus V.(1.12). Es gilt also

$$\langle [P] | d_{\theta}([M]) \rangle_{L\mathcal{H}} = \langle e_{\theta}([P]) | [M] \rangle_{K\mathcal{H}} \quad \text{für alle } P \in \mathrm{proj}\text{-}L\mathcal{H} \text{ und alle } M \in \mathrm{mod}\text{-}K\mathcal{H}. \quad (\text{V.3})$$

Bemerkung: Dieses Theorem kann folgendermaßen interpretiert werden:

Schreibt man die $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung $d_\theta : R_0(K\mathcal{H}) \rightarrow R_0(L\mathcal{H})$ als Matrix bezüglich der Basen von $R_0(K\mathcal{H})$ bzw. $R_0(L\mathcal{H})$, die aus den Isomorphieklassen der einfachen Moduln bestehen (vgl. Propositionen V.(1.2) und V.(1.7)), erhält man die so genannte **Zerlegungsmatrix**. Üblicherweise indizieren die Isomorphieklassen der einfachen $K\mathcal{H}$ -Moduln die Zeilen und die Isomorphieklassen der einfachen $L\mathcal{H}$ -Moduln die Spalten dieser Matrix. Die Konstruktion der Zerlegungsabbildung zeigt nun, dass in **jeder Zeile** der Zerlegungsmatrix die Vielfachheiten der einfachen $L\mathcal{H}$ -Moduln in der Konstantenreduktion einer $\mathcal{O}$ -Form eines einfachen $K\mathcal{H}$ -Moduln stehen.

Die Paarung $\langle - | - \rangle$ stellt nun sowohl für $K\mathcal{H}$ als auch für $L\mathcal{H}$ jeweils eine Bijektion zwischen den einfachen und den projektiv unzerlegbaren Moduln her. Also sagt Theorem V.(4.1), dass in **jeder Spalte** der Zerlegungsmatrix die Vielfachheiten der projektiv unzerlegbaren $K\mathcal{H}$ -Moduln in einer direkten Summenzerlegung einer Hebung eines projektiv unzerlegbaren $L\mathcal{H}$ -Moduln stehen.

Beweis: Weil d_θ und e_θ Homomorphismen abelscher Gruppen sind und $\langle - | - \rangle$ bilinear ist, reicht es, Gleichung V.3 auf Basisvektoren nachzurechnen. Wir benutzen die Basis von $R_0(K\mathcal{H})$ der Isomorphieklassen einfacher $K\mathcal{H}$ -Moduln (vgl. Proposition V.(1.2)) und die Basis von $R_0(L\mathcal{H})$ der Isomorphieklassen projektiv unzerlegbarer $L\mathcal{H}$ -Moduln.

Es sei dazu $\bar{e}L\mathcal{H}$ ein projektiv unzerlegbarer $L\mathcal{H}$ -Modul mit einem primitiven Idempotent $\bar{e} \in L\mathcal{H}$ und $e \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ eine Hebung, also ein Idempotent mit $1_{K\mathcal{H}} \otimes e = \bar{e} \in k\mathcal{H} \supseteq L\mathcal{H}$. Weiter sei V ein einfacher $K\mathcal{H}$ -Modul mit einer $\mathcal{O}$ -Form $\tilde{V}$. Dann können wir Lemma V.(3.3) anwenden und erhalten, dass $\text{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{H}}(e\mathcal{O}\mathcal{H}, \tilde{V})$ ein $\mathcal{O}$ -freier $\mathcal{O}$ -Modul vom Rang r ist und dass

$$\langle [\bar{e}k\mathcal{H}] | [k\tilde{V}] \rangle_{k\mathcal{H}} = r = \langle [eK\mathcal{H}] | [K\tilde{V}] \rangle_{K\mathcal{H}}$$

gilt. Da aber $d_\theta([V]) = (d_L^k)^{-1}([k\tilde{V}])$ ist, folgt $\langle [\bar{e}L\mathcal{H}] | d_\theta([V]) \rangle_{L\mathcal{H}} = \langle e_\theta([\bar{e}L\mathcal{H}]) | [V] \rangle_{K\mathcal{H}}$. $\square$

V.5 Faktorisierung von Zerlegungsabbildungen

(5.1) Voraussetzungen (Faktorisierung von Zerlegungsabbildungen)

Es seien A ein Integritätsbereich und $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei Primideale von A mit $0 \neq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. Die Lokalisierungen von A bei $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ seien mit $A_{\mathfrak{p}}$ und $A_{\mathfrak{q}}$ bezeichnet und die entsprechenden Restklassenringe mit $k_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/\text{rad}(A_{\mathfrak{p}})$ und $k_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}}/\text{rad}(A_{\mathfrak{q}})$. Es sei K der Quotientenkörper von A .

Dann ist $k_{\mathfrak{q}}$ der Quotientenkörper des Ringes $A/\mathfrak{q}$, da Lokalisierung mit Quotientenbildung vertauscht (siehe [Kun85, III.4.16]). Es sei $A/\mathfrak{q}$ ganz-abgeschlossen in $k_{\mathfrak{q}}$ und A ganz-abgeschlossen in K . Wir betrachten die drei kanonischen Ringhomomorphismen $\theta_{\mathfrak{p}} : A \hookrightarrow A_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow k_{\mathfrak{p}}$ und $\theta_{\mathfrak{q}} : A \hookrightarrow A_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow k_{\mathfrak{q}}$ und $\theta_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} : A/\mathfrak{q} \hookrightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}$.

Das Bild von $\theta_{\mathfrak{q}}$ liegt im Definitionsbereich von $\theta_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$, so dass wir uns erlauben, von der „Verkettung“ $\theta_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} \circ \theta_{\mathfrak{q}}$ zu sprechen.

Es sei $\mathcal{H}$ eine A -freie A -Algebra von endlichem Rang. Weiter sei K Zerfällungskörper für die Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$ und es seien $k_{\mathfrak{q}}$ und $k_{\mathfrak{p}}$ Zerfällungskörper für die Konstantenreduktionen $k_{\mathfrak{q}}\mathcal{H}$ bzw. $k_{\mathfrak{p}}\mathcal{H}$.

(5.2) Proposition (Faktorisierung von Zerlegungsabbildungen, vgl. [Gec98, Abschnitt 2])

Unter den Voraussetzungen in V.(5.1) sind drei Zerlegungsabbildungen definiert:

$$\begin{array}{ccc} R_0(K\mathcal{H}) & \xrightarrow{d_{\mathfrak{p}}} & R_0(k_{\mathfrak{p}}\mathcal{H}) \\ & \searrow d_{\mathfrak{q}} \quad \circ \quad \nearrow d_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} & \\ & R_0(k_{\mathfrak{q}}\mathcal{H}) & \end{array}$$

Dieses Diagramm ist kommutativ, es gilt also $d_{\mathfrak{p}} = d_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} \circ d_{\mathfrak{q}}$.

Beweis: Die gemachten Voraussetzungen sind genau diejenigen, die für die Definition der drei Zerlegungsabbildungen notwendig sind (vgl. V.(2.1)), dabei ist $d_q = d_{\theta_q}$ und $d_p = d_{\theta_p}$ und $d_p^q = d_{\theta_p^q}$ nach Definition V.(2.2). Das bedeutet insbesondere, dass d_q **die Abbildung** ist, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R_0^+(K\mathcal{H}) & \hookrightarrow & \text{Maps}(\mathcal{H}, A[X]) \\ d_q \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (\theta_q)_* \\ R_0^+(k_q\mathcal{H}) & \hookrightarrow & \text{Maps}(\mathcal{H}, k_q[X]) \end{array} \quad (\text{V.4})$$

kommutativ macht, wobei die waagrechten Pfeile jeweils wie in V.(2.2) Bildung des charakteristischen Polynoms sind und $(\theta_q)_*$ die Abbildung zwischen den Abbildungen in die Polynomringe ist, die θ_q auf die Koeffizienten anwendet.

Entsprechend ist d_p^q **die Abbildung**, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R_0^+(k_q\mathcal{H}) & \hookrightarrow & \text{Maps}(\mathcal{H}, (A/\mathfrak{q})[X]) \\ d_p^q \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (\theta_q^p)_* \\ R_0^+(k_p\mathcal{H}) & \hookrightarrow & \text{Maps}(\mathcal{H}, k_p[X]) \end{array}$$

kommutativ macht. Wie in Abschnitt V.(2.5) bewiesen wird, haben die charakteristischen Polynome, die in der unteren Zeile von Diagramm V.4 vorkommen, in Wirklichkeit nur Koeffizienten in $A/\mathfrak{q}$, da $A/\mathfrak{q}$ nach Voraussetzung ganz-abgeschlossen in k_q ist. Also können wir die beiden Diagramme untereinander setzen und erhalten ein kommutatives Diagramm mit der Verkettung $d_p^q \circ d_q$:

$$\begin{array}{ccc} R_0^+(K\mathcal{H}) & \hookrightarrow & \text{Maps}(\mathcal{H}, A[X]) \\ d_p^q \circ d_q \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (\theta_p)_* \\ R_0^+(k_p\mathcal{H}) & \hookrightarrow & \text{Maps}(\mathcal{H}, k_p[X]) \end{array}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegungsabbildung ist also $d_p = d_p^q \circ d_q$. □

Als Nächstes folgt ein Kriterium dafür, dass in der obigen Situation der zweite Schritt der Zerlegungsabbildung trivial ist, also ein Isomorphismus, der die Klassen der einfachen Moduln erhält.

Wir brauchen dazu zunächst das folgende Lemma:

(5.3) Lemma (Charaktere als Spurformen auf halbeinfachen Algebren)

Es sei F ein Körper und $F\mathcal{H}$ eine endlich-dimensionale, halbeinfache F -Algebra, so dass F Zerfällungskörper für $F\mathcal{H}$ ist. Weiter sei $\psi : F\mathcal{H} \rightarrow F$ eine Linearform, die eine Summe von irreduziblen Charakteren von $F\mathcal{H}$ ist, so dass jeder irreduzible Charakter χ mit einer Vielfachheit n_χ vorkommt, die mindestens 1 und nicht durch die Charakteristik des Körpers F teilbar ist.

Dann ist ψ eine nicht-ausgeartete Spurform auf $F\mathcal{H}$ und macht $F\mathcal{H}$ zu einer symmetrischen Algebra.

Bemerkungen:

- Vergleiche [CR81, (9.7)]. Der Beweis hier ist analog.
- Ist die Charakteristik von F ungleich 0, dann ist mit „irreduziblem Charakter“ hier die Linearform gemeint, die von der Spur auf einer irreduziblen Matrixdarstellung herkommt.

Beweis: Da ein Charakter einer Algebra von der Spur einer Matrixdarstellung her kommt, ist sofort klar, dass ψ eine Spurform ist. Es bleibt also zu zeigen, dass ψ nicht ausgeartet ist.

Da F Zerfällungskörper und die Algebra $F\mathcal{H}$ halbeinfach ist, ist sie nach dem Satz von Wedderburn (siehe [CR81, (3.28) bzw. (3.34)]) isomorph zu einer direkten Summe voller Matrixringe über F , wobei jeder zu einem Isomorphietyp einfacher Moduln korrespondiert. Es gibt also einen Isomorphismus φ von F -Algebren

$$\varphi : F\mathcal{H} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\chi \in \text{Irr}(F\mathcal{H})} M_{d_\chi}(F),$$

wobei $\text{Irr}(F\mathcal{H})$ die Menge der irreduziblen Charaktere von $F\mathcal{H}$ ist und d_χ die F -Dimension des einfachen $F\mathcal{H}$ -Moduls mit Charakter χ . Ist $\chi \in \text{Irr}(F\mathcal{H})$, dann ist $\chi(h)$ für $h \in F\mathcal{H}$ gleich der Spur der Matrix in der χ -Komponente von $\varphi(h)$.

Also gibt es zu jedem $0 \neq h \in F\mathcal{H}$ ein $h' \in F\mathcal{H}$, so dass $\varphi(hh')$ in genau einer Wedderburn-Komponente (es sei χ der zugehörige Charakter) ungleich Null ist und dort genau einen Wert ungleich Null auf der Diagonalen hat (man kann für $\varphi(h')$ in einer geeigneten Komponente eine Matrix mit genau einer Eins an der richtigen Stelle wählen). Dann ist aber $\chi(hh') \neq 0$ und alle anderen Charaktere verschwinden auf hh' . Aufgrund der Voraussetzung, dass die Vielfachheit n_χ des Charakters χ in ψ mindestens 1 und nicht durch die Charakteristik von F teilbar ist, folgt, dass auch $\psi(hh') \neq 0$ ist. Damit ist gezeigt, dass ψ auf $F\mathcal{H}$ nicht ausgeartet ist. $\square$

Die folgenden Bezeichnungen werden zur Formulierung des Kriteriums gebraucht:

(5.4) Bezeichnungen (Bezeichnungen für Kriterium)

Es gelten die Voraussetzungen aus V.(5.1). Zusätzlich sei die Zerlegungsabbildung d_q surjektiv.

Wir bezeichnen den Ring A/q mit R . Mit Charakter meinen wir jeweils die Abbildung, die einem Element einer Algebra die Spur der Darstellungsmatrix in einer entsprechenden Matrixdarstellung zuordnet. Da R nach Voraussetzung ganz-abgeschlossen in k_q ist, nehmen Charaktere der Algebra $k_q\mathcal{H}$ auf $R\mathcal{H}$ Werte in R an (die Spur einer Darstellungsmatrix ist ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms, vergleiche den Anfang des Beweises von Proposition V.(2.5)), wir können also die Charaktere von $k_q\mathcal{H}$ als R -lineare Abbildungen von $R\mathcal{H} \rightarrow R$ auffassen, erlauben uns aber stillschweigend die Konstantenerweiterung zu k_q . Entsprechend nehmen die irreduziblen Charaktere von $K\mathcal{H}$ auf Elementen von $\mathcal{H}$ Werte in A an, da A nach Voraussetzung ganz-abgeschlossen in K ist. Wir können also die irreduziblen Charaktere von $K\mathcal{H}$ als A -lineare Abbildungen $\mathcal{H} \rightarrow A$ auffassen.

Es sei $\psi : R\mathcal{H} \rightarrow R$ die Summe der irreduziblen Charaktere von $R\mathcal{H}$, also eine Spurform mit $\psi(hh') = \psi(h'h)$ für alle $h, h' \in R\mathcal{H}$. Weil d_q surjektiv ist, gibt es eine $\mathbb{Z}$ -Linearkombination $\tilde{\psi} : \mathcal{H} \rightarrow A$ der irreduziblen Charaktere von $K\mathcal{H}$, so dass $\text{id}_R \otimes_A \tilde{\psi} = \psi$ ist. Die Koeffizienten von $\tilde{\psi}$ in dieser $\mathbb{Z}$ -Linearkombination lassen sich aus der Zerlegungsabbildung d_q ablesen, sind jedoch nicht eindeutig, wenn d_q nicht injektiv ist.

Da ψ eine Summe von Charakteren von $k_q\mathcal{H}$ ist, verschwindet es auf dem Radikal von $k_q\mathcal{H}$ und induziert so eine k_q -Linearform $\bar{\psi} : k_q\mathcal{H} / \text{rad } k_q\mathcal{H} \rightarrow k_q$.

(5.5) Theorem (Kriterium dafür, dass der zweite Schritt trivial ist)

Es gelten die Voraussetzungen aus V.(5.1) und die Bezeichnungen aus V.(5.4), insbesondere sei also die Zerlegungsabbildung $d_q : R_0(K\mathcal{H}) \rightarrow R_0(k_q\mathcal{H})$ surjektiv. Es sei M die Gram-Matrix der Spurform $\tilde{\psi} : \mathcal{H} \rightarrow A$ bezüglich einer Basis $(B_w)_{w \in W}$ von $\mathcal{H}$, also $M = (\tilde{\psi}(B_w \cdot B_{w'}))_{w, w' \in W}$.

Dann ist die Zerlegungsabbildung $d_p^q : R_0(k_q\mathcal{H}) \rightarrow R_0(k_p\mathcal{H})$ genau dann trivial, also ein Isomorphismus, der die Klassen der einfachen Moduln erhält, wenn der Rang der Matrix $1_{k_q} \otimes_A M$ über k_q gleich dem Rang der Matrix $1_{k_p} \otimes_A M$ über k_p ist.

Beweis: Mit Lemma V.(5.3) folgt, dass $\bar{\psi}$ eine nicht ausgeartete Spurform auf $k_q\mathcal{H} / \text{rad } k_q\mathcal{H}$ ist, da diese Algebra halbeinfach ist. Also ist die Determinante der Gram-Matrix bezüglich einer beliebigen k_q -Basis von $k_q\mathcal{H} / \text{rad } k_q\mathcal{H}$ ungleich Null. Ergänzt man eine Basis von $\text{rad } k_q\mathcal{H}$ zu einer Basis von $k_q\mathcal{H}$ und betrachtet die Gram-Matrix von ψ bezüglich dieser Basis, dann folgt aus den Erkenntnissen über $\bar{\psi}$, dass ihr Rang gleich der k_q -Dimension von $k_q\mathcal{H} / \text{rad } k_q\mathcal{H}$ ist. Dasselbe gilt dann für die Gram-Matrix von ψ bezüglich jeder anderen Basis von $k_q\mathcal{H}$, also auch für $1_{k_q} \otimes_A M$, da $\text{id}_R \otimes_A \tilde{\psi} = \psi$ ist.

Dieselbe Argumentation wollen wir uns nun auch für $k_p\mathcal{H}$ und $k_p\mathcal{H} / \text{rad } k_p\mathcal{H}$ zunutze machen.

Es sei zunächst die Zerlegungsabbildung d_p^q trivial. Dann ist $\text{id}_{k_p} \otimes_R \psi = \text{id}_{k_p} \otimes_A \tilde{\psi}$ gleich der Summe der irreduziblen Charaktere von $k_p\mathcal{H}$, da jede Reduktion eines (über einem geeigneten Ring „ganzzahlig“ gemachten) einfachen Moduls von $k_q\mathcal{H}$ auch als $k_p\mathcal{H}$ -Modul einfach ist. Damit greift dieselbe Argumentation wie oben, so dass der Rang der Matrix $1_{k_p} \otimes_A M$ über k_p gleich der k_p -Dimension von

$k_p\mathcal{H}/\text{rad } k_p\mathcal{H}$ ist. Da beide Dimensionen gleich der Summe der Quadrate der Dimensionen der einfachen Moduln sind, sind sie gleich.

Es seien nun umgekehrt der Rang der Matrix $1_{k_q} \otimes_A M$ über k_q gleich dem Rang der Matrix $1_{k_p} \otimes_A M$ über k_p . Dann ist $\varphi := \text{id}_{k_p} \otimes_R \psi = \text{id}_{k_p} \otimes_A \tilde{\psi}$ immer noch gleich einer Summe von irreduziblen Charakteren von $k_p\mathcal{H}$, in der alle vorkommen, da jeder einfache Modul von $k_p\mathcal{H}$ als Konstituent in irgendeiner Reduktion eines einfachen Moduls von $k_q\mathcal{H}$ vorkommt. Jedenfalls ist φ eine Spurform auf $k_p\mathcal{H}$, die auf dem Radikal $\text{rad } k_p\mathcal{H}$ verschwindet, also eine Spurform $\bar{\varphi}$ auf der halbeinfachen Algebra $k_p\mathcal{H}/\text{rad } k_p\mathcal{H}$ induziert. Wenn diese nicht ausgeartet ist, ist wieder die Dimension der Algebra $k_p\mathcal{H}/\text{rad } k_p\mathcal{H}$ gleich dem Rang der Matrix $1_{k_p} \otimes_A M$ über k_p . Wenn $\bar{\varphi}$ ausgeartet ist, dann ist der Rang sogar noch kleiner.

Wenn aber mindestens eine Klasse einfacher Moduln $[V] \in R_0(k_q\mathcal{H})$ unter d_p^q auf eine Klasse nicht-einfacher Moduln $d_p^q([V]) \in R_0(k_p\mathcal{H})$ abgebildet wird, ist die Summe der Quadrate der Dimensionen der einfachen Moduln von $k_p\mathcal{H}$ echt kleiner als die Summe der Quadrate der Dimensionen der einfachen Moduln von $k_q\mathcal{H}$. Also ist auch die k_q -Dimension von $k_q\mathcal{H}/\text{rad } k_q\mathcal{H}$ echt größer als die k_p -Dimension von $k_p\mathcal{H}/\text{rad } k_p\mathcal{H}$ und damit die Behauptung bewiesen. $\square$

Die eine Schlussrichtung dieses Ergebnisses funktioniert auch unter leicht abgewandelten Bedingungen:

(5.6) Korollar (Kriterium dafür, dass der zweite Schritt trivial ist, II)

Es gelten die Voraussetzungen aus V.(5.1) und die Bezeichnungen aus V.(5.4) mit den folgenden Abwandlungen: Die Zerlegungsabbildung d_q muss nicht surjektiv sein, dafür sei aber die Charakteristik von k_q gleich Null. An Stelle der Spurform ψ benutzen wir hier den regulären Charakter ρ von $R\mathcal{H}$ und statt $\tilde{\psi}$ sei $\tilde{\rho}$ der reguläre Charakter von $\mathcal{H}$, dann gilt $\text{id}_R \otimes_A \tilde{\rho} = \rho$. Es sei M' die Gram-Matrix von $\tilde{\rho}$ bezüglich einer Basis $(B_w)_{w \in W}$ von $\mathcal{H}$, also $M' := (\tilde{\rho}(B_w \cdot B_{w'}))_{w, w' \in W}$. Wenn dann der Rang der Matrix $1_{k_q} \otimes_A M'$ über k_q gleich dem Rang der Matrix $1_{k_p} \otimes_A M'$ über k_p ist, so ist die Zerlegungsabbildung d_p^q trivial, also ein Isomorphismus, der die Klassen der einfachen Moduln erhält.

Beweis: Der Beweis geht wörtlich wie die eine Richtung in Theorem V.(5.5), jeweils mit ρ an Stelle von ψ bzw. $\tilde{\rho}$ statt $\tilde{\psi}$. Zur Anwendung von Lemma V.(5.3) ist nicht mehr notwendig, dass jeder irreduzible Charakter von $k_q\mathcal{H}$ genau einmal vorkommt, da die Charakteristik von k_q gleich Null ist, also keine Vielfachheit teilt. Die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht mehr richtig, da die Charakteristik von k_p ein Teiler einer Vielfachheit eines irreduziblen Charakters von $k_p\mathcal{H}$ in $\text{id}_{k_p} \otimes_A \rho$ sein könnte. $\square$

Kapitel VI

Iwahori-Hecke-Algebren

In diesem Kapitel sind zunächst grundlegende Definitionen und Bezeichnungen aufgeführt, die später verwendet werden. Für eine ausführliche Erklärung der Theorie und die Beweise sei auf [GP00] verwiesen.

Die Abschnitte VI.4 bis VI.6 enthalten neue Ergebnisse über die berühmte Kazhdan-Lusztig-Basis. Insbesondere wird für Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A explizit eine Wedderburn-Zerlegung aus der Kazhdan-Lusztig-Basis und ihrer dualen konstruiert. Diese Konstruktion führt dann in Abschnitt VI.5 zu einer neuen Interpretation des Lusztig-Homomorphismus in die asymptotische Algebra $\mathcal{J}$, da explizit Urbilder der Standardbasis von $\mathcal{J}$ unter dem Lusztig-Homomorphismus angegeben werden können.

In Abschnitt VI.6 wird gezeigt, dass der induzierte Modul eines Zellmoduls einer parabolischen Unter-algebra wieder ein Zellmodul ist, der explizit kombinatorisch beschrieben werden kann.

Schließlich ist in Abschnitt VI.7 die Beobachtung beschrieben, dass sich unter den Zellmoduln überraschend viele Moduln finden lassen, die bei Spezialisierung projektive Moduln liefern. Hierfür konnte bisher kein Argument gefunden werden, das diese Beobachtung hinreichend erklärt.

VI.1 Grundlagen und Definitionen

Es wird angenommen, dass der Leser mit den Begriffen **Coxetersystem** und **Coxetergruppe** vertraut ist. Sie werden hier so verwendet, wie in [GP00, Chapter 1] beschrieben ist.

(1.1) Definition/Proposition (Längenfunktion, vgl. [GP00, 1.1.4 bis 1.1.8])

Es sei (W, S) ein Coxetersystem und $w \in W$. Ist $w = s_1 \cdot \dots \cdot s_k$ eine kürzest-mögliche Darstellung von w als Produkt von Coxetererzeugern $s_i \in S$, dann nennen wir dies einen **reduzierten Ausdruck für w** . Wir bezeichnen mit $l : W \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ die **Längenfunktion**. Sie ist dadurch definiert, dass $l(w)$ die Länge eines (beliebigen) reduzierten Ausdrucks für w ist.

Ist $w \in W$ und $s \in S$, dann ist $l(w) - 1 \leq l(ws) \leq l(w) + 1$. Ist $J \subseteq S$ und $w \in W$, dann gibt es ein $w' \in \langle J \rangle$ und ein $x \in W$ mit $w = w'x$, so dass $l(w) = l(w') + l(x)$ ist und $l(sx) > l(x)$ für alle $s \in J$ gilt.

Daraus folgt: Ist $l(sw) < l(w)$, dann gibt es einen reduzierten Ausdruck $s_1 \cdot \dots \cdot s_{l(w)-1}$ für sw , so dass $s \cdot s_1 \cdot \dots \cdot s_{l(w)-1}$ ein reduzierter Ausdruck für w ist.

Alle Aussagen gelten analog, wenn ws und sw vertauscht werden.

Insbesondere folgt aus $l(ws) < l(w)$, dass es einen reduzierten Ausdruck für w gibt, der mit s endet.

Beweis: Es gilt $l(ws) \leq l(w) + 1$, da man aus einem reduzierten Ausdruck für w durch Anhängen von s einen Ausdruck für ws erhält. Genauso folgt $l(w) = l(wss) \leq l(ws) + 1$, da $s^2 = 1$ gilt. Damit ist die Abschätzung der Länge von ws gezeigt. Die darauf folgende Aussage ist in [GP00, 1.1.8] durch Induktion nach der Länge von w bewiesen.

Benutzt man diese Aussage für $J = \{s\}$, so folgt aus $l(sw) < l(w)$, dass $w = w'x = sx$ ist mit $w' \in \langle J \rangle$ und $l(w) = l(sx) > l(x)$. Also hat x die Länge $l(w) - 1$. $\square$

(1.2) Definition/Proposition (Bruhat-Ordnung, vgl. [GP00, nach 1.2.5])

Es sei (W, S) ein Coxetersystem. Wir nennen $v \in W$ **Bruhat-kleiner-oder-gleich** $w \in W$ und schreiben $v \leq w$, wenn es einen reduzierten Ausdruck $w = s_1 \cdot \dots \cdot s_{l(w)}$ für w , ein $0 \leq k \leq l(w)$ und Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq l(w)$ gibt, so dass $v = s_{i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_k}$ ist. Wir nennen jedes solches v einen **Teilausdruck** von w . Diese Sprechweise ist gerechtfertigt, da in diesem Fall v aus **jedem** reduzierten Ausdruck für w als Teilausdruck gewonnen werden kann.

Durch diese Definition ist eine partielle Ordnung auf W definiert. Ist $s \in S$ und $w \in W$, dann gilt $w \leq ws$, falls $l(ws) = l(w) + 1$, und $ws \leq w$, falls $l(ws) = l(w) - 1$ ist.

Beweis: Dass die Menge der Teilausdrücke von w nicht von dem gewählten reduzierten Ausdruck für w abhängt, ist mit dem Satz von Matsumoto ([GP00, Theorem 1.2.2]) in [GP00, Lemma 1.2.4] bewiesen. Mit [GP00, Theorem 1.2.5] und [GP00, Exercise 1.7] folgt dann, dass die Bruhat-Ordnung eine partielle Ordnung auf W ist.

Ist $l(ws) = l(w) + 1$, dann wird aus einem beliebigen reduzierten Ausdruck für w durch Anhängen von s einer für ws , also ist w ein Teilausdruck von ws und damit $w \leq ws$.

Ist $l(ws) = l(w) - 1$, dann existiert nach VI.(1.1) ein reduzierter Ausdruck für w , der mit s endet. Also ist ws ein Teilausdruck von w und damit $ws \leq w$. $\square$

(1.3) Definition (Bezeichnung für alternierende Produkte)

Ist A ein beliebiger Ring, $a, b \in A$ und $n \in \mathbb{N}$, dann bezeichnen wir mit $\text{Prod}(a, b; n)$ das alternierende Produkt $\underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot \dots}_{n \text{ Faktoren}}$ mit n Faktoren.

(1.4) Definition/Proposition (Iwahori-Hecke-Algebra, vgl. [GP00, 4.4 bzw. 8.1])

Es sei A ein kommutativer Ring und (W, S) ein Coxetersystem von endlichem Typ mit Coxetergruppe W und Coxetererzeugern S . Es sei $(a_s)_{s \in S}$ eine Sammlung von Elementen aus A , so dass $a_s = a_t$ gilt, wenn $s, t \in S$ in W konjugiert sind.

Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_A(W, S, (a_s)_{s \in S})$ die assoziative A -Algebra mit Eins, die durch die Erzeuger $\{T_s \mid s \in S\}$ und die Relationen

$$\begin{aligned} T_s^2 &= a_s \cdot 1_{\mathcal{H}} + (a_s - 1) \cdot T_s & \text{für } s \in S & \text{ und} \\ \text{Prod}(T_s, T_t; m_{st}) &= \text{Prod}(T_t, T_s; m_{st}) & \text{für } s \neq t & \text{ und } s, t \in S \text{ und } m_{st} < \infty \end{aligned}$$

definiert ist, wobei $m_{st} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ für $s, t \in S$ die Ordnung von $st \in W$ ist.

Sind alle a_s für $s \in S$ gleich einem Wert a , dann schreiben wir dafür auch kurz $\mathcal{H}_A(W, S, a)$.

Für $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S, (a_s)_{s \in S})$ gilt:

- (i) Für jedes $w \in W$ gibt es ein wohldefiniertes Element $T_w \in \mathcal{H}$, so dass $T_w = T_{s_1} \cdot T_{s_2} \cdot \dots \cdot T_{s_n}$ ist für jeden beliebigen reduzierten Ausdruck $w = s_1 \cdot \dots \cdot s_n$ mit $s_i \in S$ für $1 \leq i \leq n$. Insbesondere ist $T_1 = 1_{\mathcal{H}}$.
- (ii) Für $s \in S$ und $w \in W$ gilt:

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{wenn } l(sw) > l(w) \\ a_s T_{sw} + (a_s - 1) T_w & \text{wenn } l(sw) < l(w), \end{cases}$$

wobei l die Längenfunktion von W aus VI.(1.1) ist.

- (iii) Die Algebra $\mathcal{H}$ ist ein A -freier A -Modul und $(T_w)_{w \in W}$ ist eine A -Basis von $\mathcal{H}$. Wir nennen diese Basis die **T-Basis**.

Wir übertragen die Typbezeichnungen der Coxetersysteme von endlichem Typ auf die zugehörigen Iwahori-Hecke-Algebren. Es ist also eine Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_n eine Algebra $\mathcal{H}_A(W, S, a)$ wie oben, wobei (W, S) ein Coxetersystem vom Typ A_n ist. Hier kommt immer nur ein Parameter vor, da alle $s \in S$ zueinander konjugiert sind.

Beweis: Siehe [GP00, Abschnitt 4.4]. $\square$

(1.5) Definition/Proposition (Iwahori-Hecke-Algebren sind symmetrisch, vgl. [GP00, 8.1.1])

Es sei $\mathcal{H}_A(W, S, (a_s)_{s \in S})$ eine Iwahori-Hecke-Algebra wie in VI.(1.4). Die Linearform $\tau : \mathcal{H} \rightarrow A$ sei durch $\tau(T_w) := \delta_{1,w}$ für alle $w \in W$ definiert.

Dann werden durch $a_w := a_{s_1} \cdot \dots \cdot a_{s_n}$ für einen beliebigen reduzierten Ausdruck $w = s_1 \cdot \dots \cdot s_n$ Konstanten $a_w \in A$ für $w \in W$ festgelegt, mit denen gilt:

$$\tau(T_w T_{w'}) = \begin{cases} a_w & \text{für } w^{-1} = w', \\ 0 & \text{für } w^{-1} \neq w'. \end{cases}$$

Wenn alle a_s (für $s \in S$) Einheiten in A sind, dann ist τ **symmetrisierend** und $\mathcal{H}$ dementsprechend eine **symmetrische Algebra** (vgl. IV.(1.3)).

Die zu $(T_w)_{w \in W}$ bezüglich τ duale Basis ist $(T_w^\vee)_{w \in W}$ mit $T_w^\vee := a_w^{-1} \cdot T_{w^{-1}}$ für alle $w \in W$.

Beweis: Siehe [GP00, 8.1.1]. Die Wohldefiniertheit der a_w folgt aus dem Satz von Matsumoto. $\square$

Bemerkung: Im Weiteren werden wir meistens annehmen, dass alle a_s (für $s \in S$) Einheiten in A sind.

(1.6) Proposition (Index- und Signumsdarstellung, vgl. [GP00, 8.1.3])

Es sei $\mathcal{H}_A(W, S, (a_s)_{s \in S})$ eine Iwahori-Hecke-Algebra wie in VI.(1.4) und A ein Integritätsbereich. Dann ist die A -lineare Abbildung $\text{ind} : \mathcal{H} \rightarrow A$, $T_w \mapsto a_w$ (die a_w wie in VI.(1.5)) eine Darstellung von $\mathcal{H}$. Wir nennen sie die **Indexdarstellung**. Weiter ist durch $\varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow A$, $T_s \mapsto -1$ eine Darstellung von $\mathcal{H}$ definiert, wir nennen sie die **Signumsdarstellung**.

Beweis: Siehe [GP00, 8.1.3]. $\square$

(1.7) Definition (Generische Iwahori-Hecke-Algebren, vgl. [GP00, 8.1.4])

Es seien (W, S) ein Coxetersystem von endlichem Typ und v eine Unbestimmte über $\mathbb{Z}$. Weiter sei $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ der Ring der Laurent-Polynome über $\mathbb{Z}$ in der Unbestimmten v . Dann nennen wir die Algebra $\mathcal{H}_A(W, S, v)$ die **generische (Ein-Parameter-)Iwahori-Hecke-Algebra**.

(1.8) Proposition (Spezialisierung, vgl. [GP00, 8.1.2])

Es seien A und A' kommutative Ringe, $\mathcal{H} := \mathcal{H}_A(W, S, (a_s)_{s \in S})$ eine Iwahori-Hecke-Algebra über A wie in VI.(1.4) und $\theta : A \rightarrow A'$ ein Ringhomomorphismus. Dann induziert θ einen Ringhomomorphismus von $\mathcal{H}_A(W, S, (a_s)_{s \in S})$ nach $\mathcal{H}' := \mathcal{H}_{A'}(W, S, (\theta(a_s))_{s \in S})$. Die Algebra $\mathcal{H}'$ ist kanonisch isomorph zu $A' \otimes_A \mathcal{H}$, wobei wir A' hier durch θ als einen A' - A -Bimodul auffassen (vergleiche Bemerkung I.(3.2) und Proposition I.(3.1)).

In diesem Fall nennen wir $\mathcal{H}'$ eine **Spezialisierung** von $\mathcal{H}$.

Beweis: Siehe [GP00, 8.1.2]. $\square$

VI.2 Kazhdan-Lusztig-Basen

In diesem Abschnitt stellen wir die Ergebnisse über die Kazhdan-Lusztig-Basis einer generischen Iwahori-Hecke-Algebra zusammen, die im weiteren Verlauf der Arbeit gebraucht werden. Die Notation orientiert sich an [GP00, Chapter 11] und hält sich damit an den in der Literatur üblichen Standard. Für Beweise wird auf die Literatur verwiesen. Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf den Ein-Parameter-Fall.

Zur Konstruktion der Kazhdan-Lusztig-Basis werden die Quadratwurzeln des Parameters der Iwahori-Hecke-Algebra benötigt. Deswegen arbeiten wir von nun an über dem Ring der Laurent-Polynome in der Wurzel der Unbestimmten:

(2.1) Bezeichnungen (Grundring mit Wurzeln, vgl. [GP00, Bemerkungen vor 9.4.7])

Es sei $\sqrt{v} = v^{1/2}$ eine Unbestimmte. Wir bezeichnen das Quadrat von $\sqrt{v}$ mit v und nennen $\sqrt{v}$ „die positive Quadratwurzel“ von v und $-\sqrt{v}$ „die negative Quadratwurzel“. Es sei $A := \mathbb{Z}[v^{1/2}, v^{-1/2}]$ der Ring der Laurent-Polynome in der Unbestimmten $v^{1/2}$. Es sei $A^+ := v^{1/2} \cdot \mathbb{Z}[v^{1/2}]$ die Teilmenge der Polynome in $v^{1/2}$ mit konstantem Koeffizienten 0 und $A^- := v^{-1/2} \cdot \mathbb{Z}[v^{-1/2}]$ die Teilmenge der Polynome in $v^{-1/2}$ mit konstantem Koeffizienten 0. Weiter sei $K = \mathbb{Q}(v^{1/2})$ der Quotientenkörper von A .

(2.2) Bezeichnungen (Die $\tilde{T}$ -Basis, siehe [GP00, 11.1.9])

Es seien $\sqrt{v}$, A und K wie in VI.(2.1). Weiter sei (W, S) ein Coxetersystem von endlichem Typ und $\mathcal{H} := \mathcal{H}_A(W, S, v)$ die zugehörige Iwahori-Hecke-Algebra über dem Ring A mit Parameter v (siehe VI.(1.4)). Wir nennen $\mathcal{H}$ wie in VI.(1.7) **generische Ein-Parameter-Iwahori-Hecke-Algebra**. Der einzige Unterschied ist, dass der Grundring zusätzlich die Quadratwurzeln des Parameters enthält. Wir bezeichnen mit $\tilde{T}_w$ für $w \in W$ die folgenden Vielfachen der Elemente der T-Basis: $\tilde{T}_w := v^{-l(w)/2} T_w$. Da $v^{1/2}$ in A invertierbar ist, ist $(\tilde{T}_w)_{w \in W}$ eine Basis von $\mathcal{H}$. Mit $\leq$ sei die **Bruhat-Ordnung** in W bezeichnet (siehe VI.(1.2)).

(2.3) Definition/Proposition (Eine Involution auf $\mathcal{H}$, siehe [GP00, vor 11.1.10])

Es gelten die Bezeichnungen in VI.(2.1) und VI.(2.2). Wir erweitern die Involution $a \mapsto \bar{a}$ auf A , die $v^{1/2}$ mit $v^{-1/2}$ vertauscht, durch die folgende Abbildungsvorschrift zu einer Involution $h \mapsto \bar{h}$ auf $\mathcal{H}$:

$$\overline{\sum_{w \in W} a_w \tilde{T}_w} := \sum_{w \in W} \bar{a}_w \tilde{T}_{w^{-1}}^{-1}.$$

Diese Involution ist ein Ringhomomorphismus (allerdings kein Homomorphismus von A -Algebren, da nicht A -linear).

Beweis: Siehe Bemerkung vor [GP00, 11.1.10] bzw. [GP00, Exercises 8.1 und 8.2]. □

(2.4) Theorem (Existenz und Eindeutigkeit der Kazhdan-Lusztig-Basis, siehe [GP00, 11.1.10])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus VI.(2.1) bis VI.(2.3). Dann gibt es für jedes $w \in W$ ein eindeutiges Element $C'_w \in \mathcal{H}$, so dass

$$\overline{C'_w} = C'_w \quad \text{und} \quad C'_w \in \tilde{T}_w + \sum_{y \in W} A^- \cdot \tilde{T}_y \quad (\text{VI.1})$$

gelten. Schreiben wir $C'_w = \sum_{y \in W} P_{y,w}^* \tilde{T}_y$ mit $P_{y,w}^* \in A$, dann ist $P_{w,w}^* = 1$ für alle $w \in W$ und $P_{y,w}^* = 0$, für alle $y, w \in W$, für die **nicht** $y \leq w$ gilt. Die Elemente $(C'_w)_{w \in W}$ bilden eine A -Basis von $\mathcal{H}$. Sie heißt **Kazhdan-Lusztig-Basis** (oder kurz **KL-Basis**) von $\mathcal{H}$.

Es sei $\mu(y, w)$ der Koeffizient von $P_{y,w}^*$ bei $v^{-1/2}$.

Beweis: Siehe [GP00, 11.1.10]. □

(2.5) Bemerkungen (Bezüge zur Literatur)

- Diese Basis wurde von David Kazhdan und George Lusztig in [KL79] eingeführt. Schon dort finden sich praktisch alle wesentlichen Eigenschaften und Konstruktionen, die wir hier zitieren.
- Die $(C'_w)_{w \in W}$ sind eine Variante der „eentlichen“ Kazhdan-Lusztig-Basis $(C_w)_{w \in W}$, die aus den C'_w durch Anwenden einer weiteren Involution von $\mathcal{H}$ hervorgehen (siehe [GP00, 11.1.10, Step 3] bzw. Abschnitt VI.(5.1)). In dieser Arbeit werden hauptsächlich die C'_w benutzt.
- Entsprechend sind die $P_{y,w}^*$ eine Variante der berühmten Kazhdan-Lusztig-Polynome, die für $y, w \in W$ mit $y \leq w$ durch $P_{y,w} := v^{(l(w)-l(y))/2} \cdot P_{y,w}^*$ gegeben sind. Die $P_{y,w}$ sind Polynome in v (**Achtung:** nicht nur Polynome in $v^{1/2}$) vom Grad kleiner oder gleich $\frac{1}{2}(l(w) - l(y) - 1)$ mit konstantem Term 1. Sie sind ebenfalls in [KL79] zuerst eingeführt worden. Siehe dazu auch [GP00, 11.1.11].
- Die Bezeichnungen hier halten sich exakt an den Standard in der Literatur, der durch [KL79] und [Lus84] gegeben ist. Die — aus Sicht der vorliegenden Arbeit — unnötigen Striche an den C'_w ergeben sich daraus.

(2.6) Lemma ($\{C'_s \mid s \in S\}$ erzeugt $\mathcal{H}$ als A-Algebra)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Die Algebra $\mathcal{H}$ wird als A-Algebra von der Menge $\{C'_s \mid s \in S\}$ erzeugt.

Beweis: Es ist $C'_1 = \tilde{T}_1 = T_1 = 1_{\mathcal{H}}$ und $C'_s = \tilde{T}_s + v^{-1/2}\tilde{T}_1$ (siehe im Beweis zu [GP00, 11.1.10] oder durch direktes Benutzen der Definition in Theorem VI.(2.4)). Da die $\tilde{T}_s$ die Algebra $\mathcal{H}$ erzeugen (siehe VI.(1.4)) und unsere Definition von A-Algebra immer eine Identität erfordert, erzeugen auch die C'_s ganz $\mathcal{H}$. $\square$

(2.7) Theorem (Multiplikationsformeln für die C'_w , siehe [Lus84, (5.1.15)])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Dann gelten für $s \in S$ und $w \in W$:

$$C'_s \cdot C'_w = \begin{cases} (v^{1/2} + v^{-1/2}) \cdot C'_w & \text{für } sw < w \\ C'_{sw} + \sum_{\substack{y < w \\ l(y) \neq l(w) \\ sy < y}} \mu(y, w) \cdot C'_y & \text{für } sw > w \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

und

$$C'_w \cdot C'_s = \begin{cases} (v^{1/2} + v^{-1/2}) \cdot C'_w & \text{für } ws < w \\ C'_{ws} + \sum_{\substack{y < w \\ l(y) \neq l(w) \\ ys < y}} \mu(y, w) \cdot C'_y & \text{für } ws > w \end{cases} \quad (\text{VI.3})$$

Hierbei ist $\mu(y, w) \in \mathbb{Z}$ gleich dem Koeffizienten von $P_{y,w}^*$ bei $v^{-1/2}$.

Beweis: Siehe [Lus84, (5.1.15)]. $\square$

(2.8) Theorem (Positivität der Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Die Coxetergruppe W sei kristallographisch im Sinne von [Lus85, (3.1.1)] (das heißt, dass alle m_{st} in der Menge $\{2, 3, 4, 6, \infty\}$ liegen für $s, t \in S$).

Dann gilt: Die Koeffizienten der Polynome $P_{y,w}^*$ sind nicht-negativ. Insbesondere sind die $\mu(y, w)$ aus Theorem VI.(2.7) nicht-negativ. Für alle $x, y \in W$ ist $C'_x \cdot C'_y$ eine A-Linearkombination der $(C'_w)_{w \in W}$, in der alle als Koeffizienten vorkommenden Laurent-Polynome nicht-negative Koeffizienten haben.

Beweis: Siehe [KL80] bzw. [Spr83]. Siehe auch die bibliographischen Hinweise am Ende von [GP00, Chapter 11]. $\square$

Bemerkung: Diese Positivitäts-Resultate sind extrem tieflegend. Ihre Beweise erfordern komplizierte geometrische Konstruktionen. Gleichzeitig haben sie starke Implikationen für die Struktur von $\mathcal{H}$ und wichtige Konsequenzen in der Darstellungstheorie endlicher Chevalley-Gruppen (siehe [Lus84, Chapters 5 and 12] und [Cur88]).

Eine der verblüffenden Eigenschaften der Kazhdan-Lusztig-Basis ist, dass sie in gewisser Hinsicht eine Filtrierung des regulären Moduls realisiert. Um dies zu erklären, benötigen wir einige Definitionen:

(2.9) Definition (Linkszellen, Rechtszellen, „ $\leq_L$ “ und „ $\leq_R$ “)
(siehe [Lus84, nach 5.1.12] oder [KL79, Def. 1.2])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Es sei „ $\leq_L$ “ (bzw. „ $\leq_R$ “) die **Relation** auf W , für die $y \leq_L w$ (bzw. $y \leq_R w$) mit $y, w \in W$ **genau dann** gilt, wenn $y = w$ ist **oder** es ein $s \in S$ gibt, so dass $C'_s \cdot C'_w$ (bzw. $C'_w \cdot C'_s$), ausgedrückt in der C' -Basis, als C'_y -Koordinate einen Wert ungleich 0 hat (beachte Gleichung VI.2 (bzw. VI.3)). Weiter sei „ $\leq_L$ “ (bzw. „ $\leq_R$ “) der transitive Abschluss der Relation „ $\leq_L$ “ (bzw. „ $\leq_R$ “). Es gilt also $y \leq_L w$ (bzw. $y \leq_R w$) genau dann, wenn eine Kette $y_1, \dots, y_k \in W$ existiert mit $y \leq_L y_1 \leq_L y_2 \leq_L \dots \leq_L y_k \leq_L w$ (bzw. $y \leq_R y_1 \leq_R y_2 \leq_R \dots \leq_R y_k \leq_R w$) für ein $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist „ $\leq_L$ “ (bzw. „ $\leq_R$ “) eine transitive Relation auf W . Die zugehörige Äquivalenzrelation sei mit „ $\sim_L$ “ (bzw. „ $\sim_R$ “) bezeichnet, es ist also $y \sim_L w$ (bzw. $y \sim_R w$) genau dann, wenn $y \leq_L w$ und $w \leq_L y$ (bzw. $y \leq_R w$ und $w \leq_R y$) ist. Die Äquivalenzklassen bezüglich „ $\sim_L$ “ (bzw. „ $\sim_R$ “) heißen **Linkszellen** (bzw. **Rechtszellen**).

Die Relation „ $\leq_L$ “ (bzw. „ $\leq_R$ “) induziert somit auf der Menge der Linkszellen (bzw. der Rechtszellen) eine partielle Ordnung, die wir auch mit „ $\leq_L$ “ (bzw. „ $\leq_R$ “) bezeichnen.

(2.10) Bemerkung (Äquivalenz zur Definition in [Lus84])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4).

In [Lus84, nach (5.1.12)] ist „ $\leq_L$ “ über die C -Basis statt über die C' -Basis definiert. Die Definitionen stimmen aber genau überein, da für die C -Basis in [Lus84, (5.1.12)] Formeln gelten, die sich von denen in VI.2 und VI.3 nur um Vorzeichen unterscheiden.

In [KL79, Def. 1.2] ist „ $\leq_L$ “ auf den ersten Blick anders definiert. Auch dort wird die C -Basis anstatt der C' -Basis verwendet und es ist von „ W -Graphen“ die Rede. Die Definitionen stimmen aber genau überein, die Unterschiede sind nur auf andere Bezeichnungen zurückzuführen.

Sowohl in [KL79, Def. 1.2] als auch in [Lus84, nach (5.1.12)] ist $y \leq_R w$ als $y^{-1} \leq_L w^{-1}$ definiert. Dies ist äquivalent mit unserer Definition, wie das folgende Argument zeigt:

Laut [GP00, Exercise 4.8] ist die Abbildung

$$\iota : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad \sum_{w \in W} a_w T_w \longmapsto \sum_{w \in W} a_w T_{w^{-1}}$$

ein A -Algebren-Antiautomorphismus (wie man leicht nachrechnet, indem man die Relationen von $\mathcal{H}$ in der oppositären Algebra $\mathcal{H}^{\text{op}}$ nachrechnet). Dieser bildet für $w \in W$ das Element $\tilde{T}_w$ auf $\tilde{T}_{w^{-1}}$ ab, da $l(w) = l(w^{-1})$ ist. Andererseits bildet ι Elemente, die unter der Involution aus VI.(2.3) invariant sind, wieder auf solche ab (kurze Rechnung, man benutze $\iota(\tilde{T}_{w^{-1}}^{-1}) = \tilde{T}_w^{-1}$). Deswegen folgt mit der Eindeutigkeit der Elemente $(C'_w)_{w \in W}$ aus Theorem VI.(2.4), dass $\iota(C'_w) = C'_{w^{-1}}$ ist für alle $w \in W$ und dass $P_{y^{-1}, w^{-1}}^* = P_{y, w}^*$ ist für alle $y, w \in W$, dass also insbesondere $\mu(y^{-1}, w^{-1}) = \mu(y, w)$ ist. Da auch die Bruhat-Ordnung nach Definition mit Invertieren verträglich ist, transportiert ι Gleichung VI.2 in Gleichung VI.3 und umgekehrt. Deswegen ist unsere Definition von „ $\leq_L$ “ äquivalent zu der in [KL79] bzw. [Lus84].

Das folgende Lemma deutet die Relevanz obiger Definitionen an:

(2.11) Lemma (Andere Charakterisierung von „ $\leq_L$ “ und „ $\leq_R$ “)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Dann ist für $y, w \in W$ genau dann $y \leq_L w$ (bzw. $y \leq_R w$), wenn ein $h \in \mathcal{H}$ existiert, so dass in

$$h \cdot C'_w = \sum_{x \in W} a_x C'_x \quad \left(\text{bzw.} \quad C'_w \cdot h = \sum_{x \in W} a_x C'_x \right)$$

mit $a_x \in A$ für alle $x \in W$ der Koeffizient a_y ungleich Null ist.

Beweis: Wir zeigen die Aussage nur für „ $\leq_L$ “, da „ $\leq_R$ “ analog geht. Es sei zunächst $y \leq_L w$. Das bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Kette $y_1, \dots, y_k \in W$ mit $y \leq_L y_1 \leq_L y_2 \leq_L \dots \leq_L y_k \leq_L w$ gibt. Es sei jeweils $s_i \in S$ für $0 \leq i \leq k$ das Element aus S , das nach der Definition von „ $\leq_L$ “ existiert. Dann ist

$$C'_{s_0} \cdot C'_{s_1} \cdot \dots \cdot C'_{s_k} \cdot C'_w = \sum_{x \in W} a_x C'_x$$

mit $a_x \in A$ und $a_y \neq 0$, da sich beim sukzessiven Anwenden der C'_{s_i} auf Grund von Gleichung VI.2 und der Positivität der $\mu(y, w)$ aus Theorem VI.(2.8) nie Koeffizienten wegheben können.

Sei nun umgekehrt $h \cdot C'_w = \sum_{x \in W} a_x C'_x$ mit $a_x \in A$ für $x \in W$ und $a_y \neq 0$. Da laut Lemma VI.(2.6) die Algebra $\mathcal{H}$ gleich dem Erzeugnis der Menge $\{C'_s \mid s \in S\}$ ist, können wir h als Linearkombination von Produkten der C'_s schreiben. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $h = C'_{s_0} \cdot C'_{s_1} \cdot \dots \cdot C'_{s_k}$ ist für ein $k \in \mathbb{N}$ und $s_0, \dots, s_k \in S$. Durch wiederholtes Anwenden von Gleichung VI.2 folgt nun $y \leq_L w$. $\square$

Durch letzteres Lemma können wir jetzt mit Hilfe der Kazhdan-Lusztig-Basis Ideale in $\mathcal{H}$ definieren:

(2.12) Definition/Proposition (Zellmoduln)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Weiter sei $\Lambda \subseteq W$ eine Vereinigung von Rechtszellen mit der Eigenschaft, dass mit jeder Zelle $\Gamma \subseteq W$, die in Λ enthalten ist, auch jede $\leq_R$ -kleinere Rechtszelle in Λ enthalten ist. Wir nennen eine solche Menge **nach unten abgeschlossen** und bezeichnen mit

$$I_\Lambda := \sum_{x \in \Lambda} A C'_x \subseteq \mathcal{H}$$

das A -Erzeugnis der den Elementen in Λ entsprechenden Vektoren der Kazhdan-Lusztig-Basis. Dann ist I_Λ ein Rechtsideal in $\mathcal{H}$, also ein Rechts- $\mathcal{H}$ -Modul.

Ist $\Sigma \subsetneq \Lambda$ eine weitere nach unten abgeschlossene Vereinigung von Rechtszellen, dann ist I_Σ ein A -reines Untergitter von I_Λ und damit I_Λ / I_Σ ein A -torsionsfreier Rechts- $\mathcal{H}$ -Modul. Wir bezeichnen diesen Modul mit $\text{RC}^{(\Lambda \setminus \Sigma)}$ und nennen solche Moduln **Zellmoduln**.

Damit ist für alle Mengen der Form $\Lambda \setminus \Sigma$ wie oben ein Zellmodul definiert. Dies sind genau die Teilmengen von W , die Vereinigung von Rechtszellen sind mit der Eigenschaft, dass mit zwei Zellen $\Gamma' \leq_R \Gamma$ auch alle Zellen Γ'' mit $\Gamma' \leq_R \Gamma'' \leq_R \Gamma$ enthalten sind. Wir nennen solche Mengen **$\leq_R$ -konvex**. Insbesondere kann man, wenn Γ eine Rechtszelle ist, für Λ die Vereinigung aller Rechtszellen Γ' mit $\Gamma' \leq_R \Gamma$ nehmen und für Σ die Vereinigung aller Rechtszellen Γ' mit $\Gamma' \leq_R \Gamma$. Man erhält dann den Zellmodul $\text{RC}^{(\Gamma)}$ aus einer Zelle, wir sprechen von einem **Einzellmodul**.

Alle hier definierten Begriffe seien analog auch für „ $\leq_L$ “, Linkszellen und $\text{LC}^{(\Lambda \setminus \Sigma)}$ definiert.

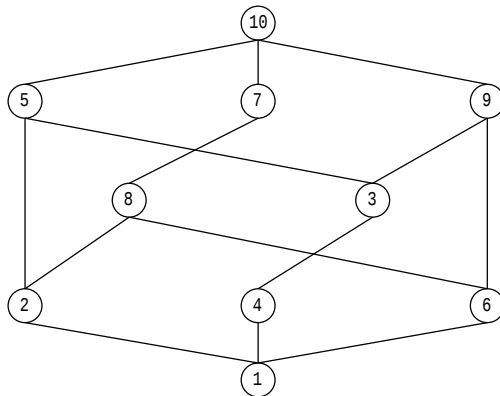
Beweis: Dass die I_Λ Rechtsideale sind, folgt sofort aus Lemma VI.(2.11).

Jede Menge der Form $\Lambda \setminus \Sigma$ ist $\leq_R$ -konvex, da für $\Gamma, \Gamma' \subseteq \Lambda \setminus \Sigma$ mit $\Gamma' \leq_R \Gamma$ und $\Gamma' \leq_R \Gamma'' \leq_R \Gamma$ einerseits $\Gamma'' \subseteq \Lambda$ ist (da Λ nach unten abgeschlossen ist) und andererseits $\Gamma'' \not\subseteq \Sigma$ (da Σ nach unten abgeschlossen ist und sonst auch $\Gamma' \subseteq \Sigma$ wäre).

Ist umgekehrt $\Delta \subseteq W$ eine Vereinigung von Rechtszellen und $\leq_R$ -konvex, dann kann man für Λ die Vereinigung aller Rechtszellen nehmen, die $\leq_R$ als irgendeine Rechtszelle in Δ sind und für Σ die Vereinigung aller Rechtszellen in Δ , die nicht in Δ sind. $\square$

(2.13) Beispiel (Poset der Rechtszellen für die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_3)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Der Typ des Coxetersystems (und damit der von $\mathcal{H}$) sei A_3 . In Abbildung VI.1 ist das Hasse-Diagramm des Posets (Partially Ordered Set) der Rechtszellen mit „ $\leq_R$ “ dargestellt. Die Vertices entsprechen den Rechtszellen, die von 1 bis 10 durchnummeriert sind. Weiter unten liegende Vertices sind kleiner als weiter oben liegende bezüglich „ $\leq_R$ “, wenn sie durch eine Linie verbunden sind.

**Abbildung VI.1:** Rechtszellen-Poset für Typ A_3

In Tabelle VI.1 steht für jede Zelle die Liste der Gruppenelemente, ausgedrückt in den Standard-Coxetererzeugern s_1, s_2 und s_3 , die in der Standard-Permutationsdarstellung für $W = S_4$ auf 4 Punkten jeweils den Nachbartranspositionen $(1, 2)$, $(2, 3)$ und $(3, 4)$ entsprechen:

Rechtszelle	Enthaltene Gruppenelemente
1	$s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1$
2	$s_1 s_2 s_1, s_1 s_2 s_1 s_3, s_1 s_2 s_1 s_3 s_2$
3	$s_1 s_3, s_1 s_3 s_2$
4	$s_1 s_2 s_3 s_2, s_1 s_3 s_2 s_1, s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$
5	$s_1, s_1 s_2, s_1 s_2 s_3$
6	$s_2 s_3 s_2, s_2 s_3 s_2 s_1, s_2 s_1 s_3 s_2 s_1$
7	$s_2, s_2 s_1, s_2 s_3$
8	$s_2 s_1 s_3, s_2 s_1 s_3 s_2$
9	$s_3, s_3 s_2, s_3 s_2 s_1$
10	id

Tabelle VI.1: Verteilung der Gruppenelemente von $W = S_4$ auf die Rechtszellen

Die Zelleinteilung und -Anordnung wurde mit dem CHEVIE-Paket (siehe [GHL⁺96]) unter dem Computer-Algebra-System GAP3 (siehe [S⁺95]) berechnet und das Poset wurde mit dem XGAP4-Paket (siehe [CN99]) unter GAP4 (siehe [GAP02]) gezeichnet.

Wir benötigen noch die duale Basis der Kazhdan-Lusztig-Basis bezüglich der symmetrisierenden Spurform τ :

(2.14) Definition/Proposition (Duale Basis der Kazhdan-Lusztig-Basis, vgl. [Lus84, (5.1.8)])

Es gelten die Voraussetzungen aus VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Kazhdan-Lusztig-Basis aus VI.(2.4). Es sei $(D'_w)_{w \in W}$ die Basis von $\mathcal{H}$, für die

$$\tau(C'_w \cdot D'_{y^{-1}}) = \delta_{w,y} \quad \text{für alle } w, y \in W$$

ist, wobei $\tau : \mathcal{H} \rightarrow A$ die symmetrisierende Spurform aus VI.(1.5) ist. Es gilt

$$D'_w = v^{-l(w_0)/2} \cdot C_{ww_0} T_{w_0}$$

für alle $w \in W$, wobei $w_0 \in W$ das längste Element in W ist.

Beweis: Da $v \in A$ invertierbar ist, ist $\mathcal{H}$ mit τ laut VI.(1.5) eine symmetrische Algebra, damit existiert nach Proposition IV.(1.2) die duale Basis von $(C'_w)_{w \in W}$ bezüglich τ und ist eindeutig. Die letzte Formel steht in [Lus84, (5.1.8) und (5.1.10)]. Man beachte, dass in dieser Formel die ursprüngliche Kazhdan-Lusztig-Basis $(C_w)_{w \in W}$ und die T-Basis (ohne Striche) benutzt wird. $\square$

Als Nächstes zitieren wir einige Resultate über die Kazhdan-Lusztig-Basis und ihre duale, die zum Teil extrem tieflegend und schwierig zu beweisen sind, die sich aber als genauso extrem nützlich erweisen werden:

(2.15) Proposition (Andere Charakterisierung von „ $\leq_L$ “ und „ $\leq_R$ “, vgl. [Lus84, (5.1.14)])

Es gelten die Voraussetzungen aus VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Kazhdan-Lusztig-Basis aus VI.(2.4) mit ihrer dualen Basis $(D'_w)_{w \in W}$ aus VI.(2.14). Dann gelten für alle $y, x \in W$:

$$\begin{aligned} y \leq_L x & \quad \text{genau dann, wenn} \quad C'_x D'_{y^{-1}} \neq 0 & \quad \text{und} \\ y \leq_R x & \quad \text{genau dann, wenn} \quad D'_{y^{-1}} C'_x \neq 0 \quad . \end{aligned}$$

Beweis: Wir imitieren exakt den Beweis in [Lus84, (5.1.14)] für $(C'_w)_{w \in W}$ und $(D'_w)_{w \in W}$ an Stelle von $(C_w)_{w \in W}$ und $(D_w)_{w \in W}$:

Es sei zunächst $y \leq_R x$.

Das bedeutet, dass es ein $p \in \mathbb{N}$ und eine Kette $y_1, \dots, y_p \in W$ mit $y \leq_R y_1 \leq_R \dots \leq_R y_p \leq_R x$ gibt. Es sei jeweils $s_i \in S$ für $0 \leq i \leq p$ das Element von S , das nach der Definition von $\leq_R$ existiert. Da die μ -Werte nicht-negativ sind (siehe VI.(2.8)) und sich deswegen keine Terme wegheben können, folgt durch wiederholtes Anwenden von Gleichung VI.3, dass

$$C'_x \cdot C'_{s_0} \cdot \dots \cdot C'_{s_p} = \sum_{\substack{z \leq_R x \\ z \in W}} a_z C'_z$$

mit $a_z \in A$ für $z \in W$ und $a_y \neq 0$ ist (alle a_z in obiger Summe sind tatsächlich Polynome in $v^{1/2} + v^{-1/2}$ mit nicht-negativen, ganzen Koeffizienten). Also ist

$$0 \neq a_y = \tau(D'_{y^{-1}} \cdot C'_x \cdot C'_{s_0} \cdot \dots \cdot C'_{s_p})$$

und damit $D'_{y^{-1}} C'_x \neq 0$.

Ist umgekehrt $D'_{y^{-1}} C'_x \neq 0$, dann existiert ein $h \in \mathcal{H}$ mit $\tau(D'_{y^{-1}} C'_x \cdot h) \neq 0$, da die Bilinearform $(h, h') \mapsto \tau(hh')$ nicht ausgeartet ist. Da aber $\tau(D'_{y^{-1}} C'_x \cdot h)$ gleich dem Koeffizient bei C'_y ist, wenn man $C'_x \cdot h$ als Linearkombination der $(C'_w)_{w \in W}$ schreibt, folgt mit Lemma VI.(2.11), dass $y \leq_R x$ ist. Der Beweis für die andere Aussage über „ $\leq_L$ “ geht analog. $\square$

(2.16) Definition („ $\leq_{\text{LR}}$ “ und zweiseitige Zellen, vgl. [Lus84, nach (5.1.12)])

Es gelten die Voraussetzungen aus VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Kazhdan-Lusztig-Basis aus VI.(2.4). Für $x, y \in W$ sei $x \leq_{\text{LR}} y$ genau dann, wenn es eine Folge $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y \in W$ gibt, so dass für $0 \leq i \leq n-1$ jeweils $x_i \leq_L x_{i+1}$ oder $x_i \leq_R x_{i+1}$ gilt. Die zu dieser transitiven Relation gehörende Äquivalenzrelation sei mit „ $\sim_{\text{LR}}$ “ bezeichnet, es gilt also $x \sim_{\text{LR}} y$ genau dann, wenn $x \leq_{\text{LR}} y$ und $y \leq_{\text{LR}} x$ gilt. Die Äquivalenzklassen heißen **zweiseitige Zellen**.

Jede zweiseitige Zelle ist also Vereinigung von Linkszellen und Vereinigung von Rechtszellen, so dass sowohl aus $y \sim_L x$ als auch aus $y \sim_R x$ jeweils $y \sim_{\text{LR}} x$ folgt.

Bemerkung: Im Allgemeinen ist „ $\sim_{\text{LR}}$ “ nicht die feinste Äquivalenzrelation auf W , für die jede Äquivalenzklasse Vereinigung sowohl von Linkszellen als auch von Rechtszellen ist. Für Typ A ist dies jedoch richtig, siehe VI.(3.7).

(2.17) Theorem (Links-, Rechts- und zweiseitige Zellen, siehe [Lus84, (5.1.13)])

Es gelten die Voraussetzungen aus VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Kazhdan-Lusztig-Basis aus VI.(2.4). Gelten $y \leq_L x$ und $y \sim_{\text{LR}} x$, dann ist $y \sim_L x$. Gelten $y \leq_R x$ und $y \sim_{\text{LR}} x$, dann ist $y \sim_R x$.

Beweis: Siehe [Lus84, (5.1.13)] bzw. [Lus81].

Dieses Ergebnis ist extrem tieflegend, es ist kein elementarer Beweis bekannt.

Am angegebenen Ort steht nur die erste der beiden Aussagen. Die zweite folgt aber sofort, da laut Bemerkung VI.(2.10) die Aussage $y \leq_R x$ äquivalent mit $y^{-1} \leq_L x^{-1}$ ist und deswegen aus $y \sim_{\text{LR}} x$ auch $y^{-1} \sim_{\text{LR}} x^{-1}$ folgt. Dann kann man aber die erste Aussage benutzen und erhält, dass $y^{-1} \sim_L x^{-1}$ und damit $y \sim_R x$ ist. $\square$

Bemerkung: Auch für Typ A folgt dieses Ergebnis nicht aus Theorem VI.(3.7), da die Robinson-Schensted-Abbildung zwar die Links- und Rechts-Zelleinteilung kodiert, aber keine Beziehung zur partiellen Ordnung „ $\leq_L$ “ (bzw. „ $\leq_R$ “) auf den Linkszellen (bzw. Rechtszellen) bekannt ist.

VI.3 Ergebnisse über Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A

Über die Darstellungstheorie der Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A ist viel bekannt. Richard Dipper und Gordon James haben nämlich in [DJ86] eine direkte Verallgemeinerung der klassischen Ergebnisse über die symmetrischen Gruppen beschrieben. Wir zitieren einige Ergebnisse, die an mehreren Stellen verwendet werden:

(3.1) Theorem (Zerfällungskörper für Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A, vgl. [DJ86, 7.6])

Es sei $\mathcal{H} := \mathcal{H}_F(W, S, a)$ eine Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} über einem Körper F mit $a \neq 0$, es sei also $W = S_n$ die symmetrische Gruppe S_n auf n Ziffern und $0 \neq a \in F$. Dann ist F Zerfällungskörper für $\mathcal{H}$.

Beweis: Siehe [DJ86, Theorem 7.6]. In dieser Arbeit werden explizit „Specht-Moduln“ für Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A konstruiert und es wird gezeigt, dass gewisse Quotienten von diesen absolut einfache Moduln sind.

Für die generische Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{v})}(W, S, v)$ vom Typ A_n über dem Funktionenkörper in einer Unbestimmten $\sqrt{v}$ (siehe VI.(1.7)) kann ein kompletter Satz absolut einfacher Moduln auch aus den Kazhdan-Lusztig-Zellmoduln gewonnen werden (siehe Theorem VI.(3.9)), wobei hier aber die Quadratwurzeln des Parameters im Grundring gebraucht werden. $\square$

Die folgenden Definitionen sind Standard:

(3.2) Definition (Partition, Teile, e -reguläre Partition, lexikographische Ordnung)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine **Partition von n** ist eine Folge $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = n$ (das bedeutet, dass nur endlich viele Folgenglieder ungleich 0 sind).

Die λ_i mit $\lambda_i > 0$ heißen **Teile** von λ . Ist $1 < e \in \mathbb{N}$, dann heißt die Partition λ **e-regulär**, wenn in λ kein Teil e mal oder öfter vorkommt. Man kann Partitionen **lexikographisch** ordnen, es ist λ genau dann lexikographisch kleiner als μ , wenn $\lambda_i < \mu_i$ für das kleinste $i \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_i \neq \mu_i$ gilt.

Ist λ eine Partition von n mit l Teilen, dann ist ein **λ -Standardtableau** eine treppenartige, linksbündige Anordnung der Zahlen $\{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ in l Zeilen der Längen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$, so dass die Werte in jeder Zeile von links nach rechts und in jeder Spalte von oben nach unten ansteigen, zum Beispiel für $\lambda = (6, 4, 3, 2, 1)$:

1	3	5	7	11	15
2	6	8	14		
4	9	13			
10	12				
16					

Formal kann man ein λ -Standardtableau als bijektive Abbildung

$$f : \{(i, j) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, \lambda_i\} \mid j \leq \lambda_i\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

definieren mit $f(i, j) < f(i+1, j)$ für alle $1 \leq i < l$ und $1 \leq j \leq \lambda_{i+1}$ und mit $f(i, j) < f(i, j+1)$ für alle $1 \leq i \leq l$ und $1 \leq j < \lambda_i$ mit der offensichtlichen Visualisierung wie oben.

Die Partition λ eines λ -Standardtableaux t heißt **Gestalt** von t .

Das folgende Theorem gibt über die Fälle Auskunft, in denen der Parameter keine Einheitswurzel ist:

(3.3) Theorem (Halbeinfachheit von Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A, vgl. [DJ86, 7.6])

Es sei $\mathcal{H} := \mathcal{H}_F(W, S, a)$ eine Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} über einem Körper F und für $0 \neq a \in F$ gelte, dass es kein $e \in \mathbb{N}$ gibt mit $1 + a + a^2 + \dots + a^{e-1} = \sum_{i=0}^{e-1} a^i = 0$. Dann ist $\mathcal{H}$ halbeinfach. Die Isomorphietypen einfacher Moduln lassen sich durch die Menge der Partitionen von n parametrisieren. Dabei entspricht dem Indexcharakter die Partition (n) und dem Signumscharakter die Partition $(1^n) = (1, 1, \dots, 1)$.

Beweis: Siehe [DJ86, Theorem 7.6]. Dies ist eine direkte Verallgemeinerung der klassischen Resultate über die symmetrische Gruppe. $\square$

Das folgende Theorem gibt über die Fälle Auskunft, in denen der Parameter eine Einheitswurzel ist:

(3.4) Theorem (Parametrisierung einfacher Moduln beim Typ A, vgl. [DJ86, 7.6 und 7.7])

Es sei $\mathcal{H}_F := \mathcal{H}_F(W, S, a)$ eine Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} über einem Körper F und $0 \neq a \in F$. Weiter sei

$$\left\{ d \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=0}^{d-1} a^i = 0 \right\} \neq \emptyset,$$

und es sei e die kleinste natürliche Zahl in dieser Menge. Dann lassen sich die Isomorphieklassen einfacher $\mathcal{H}_F$ -Moduln durch die e -regulären Partitionen parametrisieren. Für die Spezialisierung θ der generischen Ein-Parameter-Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]}(W, S, v)$ zu $\mathcal{H}$, die v auf a abbildet, und die zugehörige Zerlegungsabbildung

$$d_\theta : R_0(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v)}(W, S, v)) \rightarrow R_0(\mathcal{H}_F(W, S, a))$$

(vergleiche V.(2.2)) gilt: Schreibt man das Bild $d_\theta([S^\mu]) \in R_0(\mathcal{H}_F)$ der Klasse $[S^\mu] \in R_0(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v)})$ eines einfachen $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v)}$ -Moduls S^μ zum Parameter μ als ganzzahlige Linearkombination der Klassen einfacher $\mathcal{H}_F$ -Moduln und ist darin der Koeffizient vor einer Klasse $[D^\lambda]$ eines einfachen Moduls D^λ zum e -regulären Parameter λ ungleich Null, dann ist μ lexikographisch kleiner oder gleich λ . Ist $\mu = \lambda$, dann ist die Vielfachheit genau 1. Insbesondere ist also d_θ surjektiv.

Bemerkung: Man kann die Zerlegungsabbildung unter Benutzung der Standardbasen der Klassen der einfachen Moduln als Zerlegungsmatrix ausdrücken, deren Zeilen durch alle Partitionen von n und deren Spalten durch die e -regulären Partitionen indiziert sind. Ordnet man die Zeilen, die durch die e -regulären Partitionen in lexikographischer Ordnung indiziert sind, an den Anfang und die Spalten in lexikographischer Ordnung der e -regulären Partitionen an, dann hat die Zerlegungsmatrix die folgende Form einer (rechteckigen) unteren Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \\ * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Beweis: Siehe [DJ86, Theoreme 7.6 und 7.7]. □

(3.5) Definition/Proposition (Robinson-Schensted-Abbildung, vgl. [Knu98, 5.1.4])

Der folgende Algorithmus definiert eine Abbildung P , die von der symmetrischen Gruppe S_n in die Menge der Standardtableaux, deren Gestalt eine Partition von n ist, geht:

Es sei $\pi \in S_n$, aufgefasst als Bijektion der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich. Beginne mit dem leeren Standardtableau und füge sukzessive die Zahlen $\pi(1), \dots, \pi(n)$ nach der folgenden Vorschrift ein:

1. $a \longleftarrow$ einzufügende Zahl
2. $z \longleftarrow 1$ (d.h. beginne in Zeile 1)
3. wenn a größer als alle Zahlen in Zeile z ist: füge a ans Ende von Zeile z an, Ende.
4. sonst tausche die kleinste Zahl in Zeile z , die größer als a ist, mit a aus
5. $z \longleftarrow z + 1$
6. weiter bei 3.

Das Standardtableau nach dem Einfügen von $\pi(n)$ ist $P(\pi)$. Die **Robinson-Schensted-Abbildung** ist dann als Abbildung von S_n in die Paare von Standardtableaux definiert durch

$$\pi \mapsto (P(\pi), P(\pi^{-1})).$$

Es gilt: Für alle $\pi \in S_n$ ist die Gestalt von $P(\pi)$ gleich der von $P(\pi^{-1})$ und die Robinson-Schensted-Abbildung ist eine Bijektion zwischen S_n und der Menge der Paare von Standardtableaux, deren beide Komponenten als Gestalt dieselbe Partition von n haben.

Beweis: Siehe [Knu98, 5.1.4]. □

(3.6) Beispiel (Beispiel für Robinson-Schensted-Abbildung)

Für die Permutation $\pi := (1, 4)(3, 6, 5, 2)$ (Zykelschreibweise) auf 6 Punkten ist die Liste der Bilder gleich $(4, 3, 6, 1, 2, 5)$, so dass man beim Berechnen von $P(\pi)$ sukzessive die folgenden Standardtableaux erhält:

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 6 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} = P(\pi).$$

Das Inverse von π ist $\pi^{-1} = (1, 4)(3, 2, 5, 6)$, die Liste der Bilder ist gleich $(4, 5, 2, 1, 6, 3)$, so dass man beim Berechnen von $P(\pi^{-1})$ sukzessive die folgenden Standardtableaux erhält:

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 6 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \end{array} = P(\pi^{-1}).$$

Das Bild von π unter der Robinson-Schensted-Abbildung ist also das Paar

$$(P(\pi), P(\pi^{-1})) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 4 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \end{array} \right).$$

(3.7) Theorem (Robinson-Schensted und Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A, vgl. [KL79, §5])

Es gelten die Voraussetzungen aus VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Kazhdan-Lusztig-Basis aus VI.(2.4). Zusätzlich sei (W, S) (und damit $\mathcal{H}$) vom Typ A_{n-1} , so dass also $W \cong S_n$ ist (hier ist der Isomorphismus gemeint, der für $1 \leq i \leq n-1$ den Coxetererzeuger s_i auf die Nachbartransposition $(i, i+1)$ abbildet).

Dann gelten für die Robinson-Schensted-Abbildung aus VI.(3.5) und alle $y, x \in W$:

1. Es gilt $y \sim_L x$ genau dann, wenn $P(y) = P(x)$ ist.
2. Es gilt $y \sim_R x$ genau dann, wenn $P(y^{-1}) = P(x^{-1})$ ist.
3. Es gilt $y \sim_{LR} x$ genau dann, wenn die Gestalt von $P(y)$ gleich der von $P(x)$ ist.

Beweis: In [KL79, §5] wird hierfür auf einen Preprint von David Vogan verwiesen, in dem von sogenannten „verallgemeinerten τ -Invarianten“ die Rede ist. In [Shi86, Theorem 1.7.2] wird zum Beweis auf [BV82] verwiesen (in [Shi86] steht das Symbol „ $\leq_r$ “ für unser „ $\leq_{LR}$ “).

Es folgt, dass beim Typ A die zweiseitigen Zellen die kleinsten Teilmengen von W sind, die gleichzeitig Vereinigung von Linkszellen und von Rechtszellen sind. Diese von „ $\sim_L$ “ und „ $\sim_R$ “ erzeugte Äquivalenzrelation wird in [Shi86] mit „ $\sim_{LR}$ “ bezeichnet, ihre Klassen heißen dort LR-Zellen. $\square$

(3.8) Korollar (Schnitt einer Linkszelle mit einer Rechtszelle)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Zusätzlich sei das Coxetersystem (W, S) (und damit $\mathcal{H}$) vom Typ A. Gilt dann $y \sim_L x$ und $y \sim_R x$, dann ist $y = x$. Also ist der Schnitt einer beliebigen Linkszelle mit einer Rechtszelle immer entweder einelementig oder leer, je nachdem, ob die Zellen in derselben zweiseitigen Zelle liegen oder nicht.

Beweis: Wenn $P(y) = P(x)$ und $P(y^{-1}) = P(x^{-1})$ ist, dann ist $(P(x), P(x^{-1})) = (P(y), P(y^{-1}))$ und damit $x = y$. $\square$

Beim Typ A ist die Kazhdan-Lusztig-Basis besonders nützlich, was man an folgendem Theorem sehen kann:

(3.9) Theorem (Einfache Moduln als Einzellmoduln, siehe [KL79, Theorem 1.4])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Zusätzlich sei das Coxetersystem (W, S) (und damit $\mathcal{H}$) vom Typ A. Dann ist für alle Linkszellen Λ der Einzellmodul $LC^{(\Lambda)}$ eine A-Form eines einfachen $K\mathcal{H}$ -Linksmoduls und für alle Rechtszellen Γ der Einzellmodul $RC^{(\Gamma)}$ eine A-Form eines einfachen $K\mathcal{H}$ -Moduls. Sind Λ_1 und Λ_2 zwei Linkszellen, dann ist $LC^{(\Lambda_1)}$ genau dann als Links- $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zu $LC^{(\Lambda_2)}$, wenn Λ_1 und Λ_2 in derselben zweiseitigen Zelle liegen.

Die Robinson-Schensted-Abbildung (siehe VI.(3.7)) liefert für alle w in derselben zweiseitigen Zelle Paare von Standardtableaux mit derselben Gestalt. Diese Partition ist dieselbe, die auch bei der Parametrisierung der einfachen $\mathcal{H}$ -Moduln in VI.(3.3) den einfachen Moduln $LC^{(\Lambda)}$ bzw. $RC^{(\Gamma)}$ entspricht, wenn Λ eine Linkszelle und Γ eine Rechtszelle in der entsprechenden zweiseitigen Zelle ist.

Beweis: Siehe [KL79, Theorem 1.4] bzw. [KL79, §5]. Dort sind die Aussagen für Linkszellen bewiesen. Wie aber schon in Bemerkung VI.(2.10) gezeigt wurde, gilt $y \leqslant_R x$ genau dann, wenn $y^{-1} \leqslant_L x^{-1}$ ist, so dass die Einteilung in Rechtszellen dieselben Dimensionen und Vielfachheiten von Zellmoduln liefert wie die Einteilung in Linkszellen. Also ist $\text{RC}^{(\Gamma)}$ eine A-Form eines einfachen $K\mathcal{H}$ -Moduls, wenn Γ eine Rechtszelle ist, denn im regulären Modul der halbeinfachen Algebra $K\mathcal{H}$ (siehe Theorem VI.(3.3)) ist die Vielfachheit eines einfachen Moduls jeweils so groß wie seine Dimension.

Die letzte Bemerkung über die Robinson-Schensted-Abbildung ist in [Mül95, 4.9.5] bewiesen. Dort ist zwar die Rede von Darstellungen der Weylgruppe W , die Übertragung auf Darstellungen der generischen Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A erfolgt aber einfach durch Spezialisierung des Parameters v auf 1 (bzw. $v^{1/2}$ auf -1). $\square$

Bemerkung: In [KL79, §5] wird nicht nur die obige Aussage bewiesen, sondern noch mehr angedeutet: Bei geeigneter Anordnung der Standardbasisvektoren der Einzellmoduln erhält man nämlich für verschiedene Linkszellen in derselben zweiseitigen Zelle sogar exakt dieselben Darstellungsmatrizen! Siehe dazu die Ausführungen in VI.(3.22).

(3.10) Korollar (Irreduzible Charaktere)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4) mit ihrer dualen Basis $(D'_w)_{w \in W}$ aus VI.(2.14). Zusätzlich sei das Coxetersystem (W, S) (und damit $\mathcal{H}$) vom Typ A.

Ist $\Lambda \subseteq W$ eine Linkszelle, dann gilt für den irreduziblen Charakter χ_Λ des zugehörigen Einzellmoduls

$$\chi_\Lambda(h) = \sum_{z \in \Lambda} \tau(D'_{z^{-1}} \cdot h \cdot C'_z) = \tau\left(\left(\sum_{z \in \Lambda} C'_z D'_{z^{-1}}\right) \cdot h\right) \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H},$$

woraus folgt, dass $\sum_{z \in \Lambda} C'_z D'_{z^{-1}}$ im Zentrum von $\mathcal{H}$ liegt.

Ist $\Gamma \subseteq W$ eine Rechtszelle, dann gilt für den irreduziblen Charakter χ_Γ des zugehörigen Einzellmoduls

$$\chi_\Gamma(h) = \sum_{z \in \Gamma} \tau(C'_z \cdot h \cdot D'_{z^{-1}}) = \tau\left(\left(\sum_{z \in \Gamma} D'_{z^{-1}} C'_z\right) \cdot h\right) \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H},$$

woraus folgt, dass auch $\sum_{z \in \Gamma} D'_{z^{-1}} C'_z$ im Zentrum von $\mathcal{H}$ liegt.

Beweis: Siehe die Definition von Zellmoduln in VI.(2.12), Theorem VI.(3.9) und die Rechnung im Beweis der letzten Aussage in IV.(1.5), da für jeden Charakter χ von $\mathcal{H}$ und zwei beliebige Elemente $h, h' \in \mathcal{H}$ gilt, dass $\chi(hh') = \chi(h'h)$ ist, und τ nicht ausgeartet ist. $\square$

Bemerkung: Im Beweis von Theorem VI.(4.1) wird nebenbei bewiesen, dass der Charakter χ_Λ des Links-Zellmoduls zur Linkszelle Λ gleich dem Charakter χ_Γ des Rechts-Zellmoduls zur Rechtszelle Γ ist, wenn Λ und Γ in derselben zweiseitigen Zelle liegen.

Für verschiedene Linkszellen in derselben zweiseitigen Zelle lässt sich noch mehr sagen, als bereits in Theorem VI.(3.9) formuliert wurde, nämlich dass die entsprechenden Links-Zellmoduln in gewisser Weise sogar dieselben Darstellungsmatrizen liefern. Dazu bedarf es einiger Vorbereitungen:

(3.11) Definition/Proposition (Parabolische Untergruppen, siehe [GP00, 1.2.9])

Es sei (W, S) ein Coxetersystem von endlichem Typ und $J \subseteq S$. Es sei $W_J := \langle J \rangle \subseteq W$ die von J erzeugte Untergruppe in W . Dann heißt W_J **parabolische Untergruppe** und ist selbst eine Coxetergruppe zum Coxetersystem (W_J, J) .

Die Längenfunktionen von W und W_J stimmen auf W_J überein.

Beweis: Siehe [GP00, 1.2.9]. $\square$

(3.12) Definition/Proposition (Ausgezeichnete Nebenklassenvertreter, siehe [GP00, 2.1.1])

Es sei (W, S) ein Coxetersystem von endlichem Typ und $J \subseteq S$. Weiter sei

$$X_J := \{x \in W \mid l(sx) > l(x) \text{ für alle } s \in J\}.$$

Dann ist X_J ein Vertretersystem für die Rechtsnebenklassen der parabolischen Untergruppe W_J in W . Für jedes $x \in W$ sind äquivalent:

- $x \in X_J$.
- $l(vx) = l(v) + l(x)$ für alle $v \in W_J$.
- x ist das eindeutige Element kürzester Länge in $W_J \cdot x$.

Die Elemente in X_J heißen **ausgezeichnete Rechtsnebenklassenvertreter**.

Völlig analog definiert man die **ausgezeichneten Linksnebenklassenvertreter**, sie sind genau die Inversen der Elemente in X_J .

Beweis: Siehe [GP00, 2.1.1]. Vergleiche auch VI.(1.1). □

(3.13) Lemma (S_3 -Sechsecke, vgl. [Shi86, §1.6])

Es sei (W, S) ein Coxetersystem von endlichem Typ und $\{s, t\} \subseteq S$ eine zweielementige Teilmenge von S , so dass st Ordnung 3 hat, also $\langle s, t \rangle \leq W$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 auf 3 Punkten ist. Es sei $w \in W$ mit $ws < w$ und $wt > w$ (Bruhat-Ordnung, siehe VI.(1.2)).

Dann gilt für die Bruhat-Ordnung innerhalb der Linksnebenklasse $w \langle s, t \rangle$, dass genau eine der beiden folgenden Situationen vorliegt:

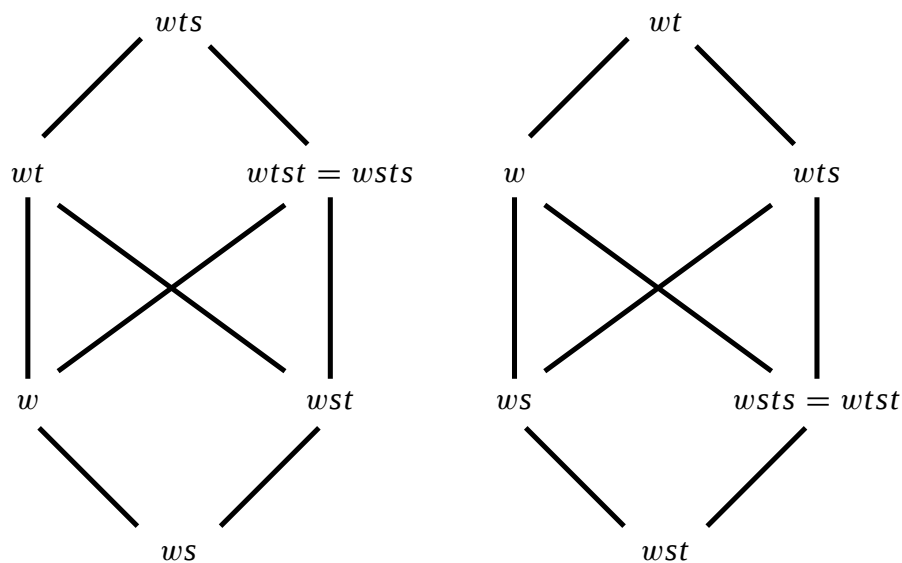


Abbildung VI.2: Mögliche Posets der Bruhat-Ordnung auf einer S_3 -Nebenklasse

In diesen Bildern ist das Hasse-Diagramm der Bruhat-Ordnung dargestellt, weiter oben liegende Gruppenelemente sind also jeweils Bruhat-größer als weiter unten liegende, wenn sie durch Striche verbunden sind.

Beweis: Da $ws < w$ ist, gibt es ein reduziertes Wort w' , so dass $w = w's$ ein reduziertes Wort für w ist. Wir unterscheiden die beiden Fälle $w't > w'$ und $w't < w'$. Im ersten Fall ist w' wie in VI.(3.12) der eindeutige kürzeste Linksnebenklassenvertreter in $w \langle s, t \rangle$. Daraus folgt sofort, dass $w = w's$, $w't$, $wt = w'st$, $w'ts$ und $w'sts = w'tst$ reduzierte Worte für die Elemente in $w \langle s, t \rangle$ sind und das linke Bild vorliegt.

Im anderen Fall $w't < w'$ gibt es ein reduziertes Wort w'' , so dass $w''t = w'$ und damit $w''ts = w's = w$ reduzierte Worte für w' bzw. w sind. Da aber nun $w''tst = wt > w = w''ts$ ist, ist die Länge von $w''tst$ um 3 größer als die von w'' , woraus folgt, dass dieses Mal w'' der eindeutige kürzeste Linksnebenklassenvertreter in $w \langle s, t \rangle$ ist und das rechte Bild vorliegt. $\square$

(3.14) Definition (Links- und Rechts-Abstiegsmengen)

Es sei (W, S) ein Coxetersystem von endlichem Typ. Dann sei für $w \in W$

$$\mathcal{L}(w) := \{s \in S \mid sw < w\} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}(w) := \{s \in S \mid ws < w\}$$

die **Links-** bzw. **Rechts-Abstiegsmenge**, wobei „ $<$ “ die Bruhat-Ordnung (siehe VI.(1.2)) bezeichnet.

(3.15) Theorem (Abstiegsmengen und Zellen, siehe [KL79, 2.4] bzw. [Shi86, 1.5.2])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) sowie VI.(2.9).

Dann gilt für $x, y \in W$:

- (i) Gilt $x \leq_L y$, dann ist $\mathcal{R}(x) \supseteq \mathcal{R}(y)$. Gilt also $x \sim_L y$, dann ist $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$.
- (ii) Gilt $x \leq_R y$, dann ist $\mathcal{L}(x) \supseteq \mathcal{L}(y)$. Gilt also $x \sim_R y$, dann ist $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y)$.

Beweis: Siehe [KL79, Proposition 2.4] bzw. [Shi86, Theorem 1.5.2]. $\square$

(3.16) Definition/Proposition (Sternoperationen, siehe [KL79, 4.1] bzw. [Shi86, §1.6])

Es seien (W, S) ein Coxetersystem von endlichem Typ und $\{s, t\} \subseteq S$ eine zweielementige Teilmenge, so dass st Ordnung 3 hat. Wir definieren dann

$$\mathcal{D}_R(s, t) := \{w \in W \mid \mathcal{R}(w) \cap \{s, t\} \text{ ist einelementig}\}$$

bzw.

$$\mathcal{D}_L(s, t) := \{w \in W \mid \mathcal{L}(w) \cap \{s, t\} \text{ ist einelementig}\}.$$

Ist $w \in \mathcal{D}_R(s, t)$, dann ist wegen Lemma VI.(3.13) genau eines der Elemente ws und wt ebenfalls in $\mathcal{D}_R(s, t)$. Wir bezeichnen dieses mit w^* , so dass also die Abbildung $w \mapsto w^*$ eine Involution auf $\mathcal{D}_R(s, t)$ definiert, die **Rechts-Sternoperation bezüglich $\{s, t\}$** . Analog sei durch $w \mapsto {}^*w$ eine Involution auf $\mathcal{D}_L(s, t)$ definiert, die **Links-Sternoperation bezüglich $\{s, t\}$** .

Beweis: Benutze Lemma VI.(3.13) und die entsprechende, linkshändige Version. $\square$

Bemerkung: Ist $\{s, t\} \subseteq S$ eine zweielementige Teilmenge, so dass st Ordnung 3 hat, dann hängt die Frage, ob $w \in W$ im Definitionsbereich $\mathcal{D}_R(s, t)$ der Rechts-Sternoperation bezüglich $\{s, t\}$ liegt, nur von der **Rechts-Abstiegsmenge** $\mathcal{R}(w)$ ab. Da nach VI.(3.15) die Rechts-Abstiegsmengen aller Elemente einer **Linkszelle** Λ gleich sind, liegen immer entweder alle oder keines der Elemente von Λ in $\mathcal{D}_R(s, t)$. Die analoge Bemerkung gilt für $\mathcal{D}_L(s, t)$ und Rechtszellen.

Die Sternoperationen sind eng mit der Einteilung in Links- bzw. Rechtszellen verbunden:

(3.17) Theorem (Sternoperationen und Zellen I, vgl. [Shi86, Theorem 1.6.3])

Es seien (W, S) ein Coxetersystem von endlichem Typ und $\{s, t\} \subseteq S$ eine zweielementige Teilmenge, so dass st Ordnung 3 hat. Dann gilt $w \sim_L {}^*w$ für alle $w \in \mathcal{D}_L(s, t)$ und $w \sim_R w^*$ für alle $w \in \mathcal{D}_R(s, t)$. Ist weiter $x, y \in W$ mit $x \sim_R y$, dann gibt es eine Folge von Rechts-Sternoperationen, die x auf y abbildet.

Genauer: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Paaren $\{s_i, t_i\} \subseteq S$ ($1 \leq i \leq k$), so dass $s_i t_i$ jeweils Ordnung 3 hat, mit den folgenden Eigenschaften: Mit $x_0 := x$ und $x_i := x_{i-1}^*$ für $1 \leq i \leq k$ ist jeweils $x_{i-1} \in \mathcal{D}_R(s_i, t_i)$ und $x_k = y$ (natürlich ist jeweils bei x_{i-1}^* die Sternoperation bezüglich $\{s_i, t_i\}$ gemeint).

Analog gibt es für $x, y \in W$ mit $x \sim_L y$ eine Folge von Links-Sternoperationen, die x auf y abbildet.

Beweis: Siehe [Shi86, Theorem 1.6.3]. Dort steht dieselbe Aussage in einer Formulierung mit Äquivalenzklassen. $\square$

Die Sternoperationen sind zusätzlich besonders nützlich, da sie die Zelleinteilung auf der jeweils anderen Seite respektieren:

(3.18) Theorem (Sternoperationen und Zellen II, siehe [KL79, 4.3] bzw. [Shi86, 1.6.2])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) sowie VI.(2.9). Weiter sei $\{s, t\} \subseteq S$ eine zweielementige Teilmenge, so dass st Ordnung 3 hat. Dann gilt:

- (i) Es seien $x, y \in \mathcal{D}_L(s, t)$. Dann gilt $x \sim y$ genau dann, wenn ${}^*x \sim {}^*y$ ist.
- (ii) Es seien $x, y \in \mathcal{D}_R(s, t)$. Dann gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $x^* \sim y^*$ ist.

Beweis: Siehe [KL79, Corollary 4.3] bzw. [Shi86, Theorem 1.6.2]. $\square$

Bemerkung: Dieses Ergebnis zeigt, dass eine Rechts-Sternoperation eine beliebige Linkszelle Λ_1 im Definitionsbereich der Sternoperation bijektiv auf eine andere Linkszelle Λ_2 abbildet, die im selben Definitionsbereich liegt. Zusätzlich liegt Λ_2 in derselben zweiseitigen Zelle wie Λ_1 (wegen (i) in VI.(3.18)). Umgekehrt folgt aus dem vorigen Resultat VI.(3.17), dass es für zwei Linkszellen Λ_1 und Λ_2 , die je ein Element $x_1 \in \Lambda_1$ und $x_2 \in \Lambda_2$ mit $x_1 \sim x_2$ enthalten, eine Folge von Rechts-Sternoperationen gibt, deren Verkettung Λ_1 bijektiv auf Λ_2 abbildet. Analoge Bemerkungen gelten für Rechtszellen und Links-Sternoperationen.

Unglücklicherweise benötigen wir noch eine Bezeichnung, die eigentlich schlecht zu den anderen Bezeichnungen in dieser Arbeit passt, um den reibungslosen Anschluss an die Literatur zu gewährleisten:

(3.19) Definition (Vgl. [KL79, Definition 1.2] bzw. [Shi86, Definition 1.4.3])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4).

Wir schreiben $y < w$, wenn $y < w$ (Bruhat-Ordnung, siehe VI.(1.2)) gilt und $\mu(y, w) \neq 0$ ist.

Bemerkung: Diese Definition stimmt mit der in [KL79, Definition 1.2] bzw. der in [Shi86, Definition 1.4.3] überein, da wir $\mu(y, w)$ für alle $y, w \in W$ definiert haben (siehe Theorem VI.(2.4)) und es gleich 0 ist, wenn $l(y) \not\equiv l(w) \pmod{2}$ oder $P_{y,w}$ nicht den höchstmöglichen Grad $(l(w) - l(y) - 1)/2$ hat.

Wir können nun die folgenden beiden Ergebnisse formulieren:

(3.20) Lemma (Siehe [Shi86, Lemma 1.4.5 (ii)] bzw. Lemma 1.4.6)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) sowie VI.(2.9). Weiter seien $s \in S$ und $x, x' \in W$. Dann gilt:

- (i) Es sei $x < x'$ mit $l(x) + 1 = l(x')$. Dann ist $x < x'$ und $\mu(x, x') = 1$.
- (ii) Es seien $x < x'$ und $sx' < x'$ und $sx > x$. Es gilt $x < x'$ genau dann, wenn $x' = sx$ ist. In diesem Fall folgt $\mu(x, x') = 1$.
- (iii) Es seien $x < x'$ und $x's < x'$ und $xs > x$. Es gilt $x < x'$ genau dann, wenn $x' = xs$ ist. In diesem Fall folgt $\mu(x, x') = 1$.

Beweis: Siehe [Shi86, Lemma 1.4.5 (ii)] bzw. Lemma 1.4.6 (i) und (ii)]. $\square$

(3.21) Theorem (Stern-Operationen und μ , siehe [KL79, 4.2] bzw. [Shi86, 1.6.1])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) sowie VI.(2.9). Weiter sei $\{s, t\} \subseteq S$ eine zweielementige Teilmenge, so dass st Ordnung 3 hat. Dann gelten:

- (i) Es seien $y, w \in \mathcal{D}_L(s, t)$ und $yw^{-1} \notin \langle s, t \rangle$. Dann ist $y < w$ genau dann, wenn $*y < *w$ ist und es ist $\mu(y, w) = \mu(*y, *w)$.
- (ii) Es seien $y, w \in \mathcal{D}_L(s, t)$ und $yw^{-1} \in \langle s, t \rangle$. Dann ist $y < w$ genau dann, wenn $*w < *y$ ist und es ist $\mu(y, w) = \mu(*w, *y) = 1$.
- (iii) Es seien $y, w \in \mathcal{D}_R(s, t)$ und $w^{-1}y \notin \langle s, t \rangle$. Dann ist $y < w$ genau dann, wenn $y^* < w^*$ ist und es ist $\mu(y, w) = \mu(y^*, w^*)$.
- (iv) Es seien $y, w \in \mathcal{D}_R(s, t)$ und $w^{-1}y \in \langle s, t \rangle$. Dann ist $y < w$ genau dann, wenn $w^* < y^*$ ist und es ist $\mu(y, w) = \mu(w^*, y^*) = 1$.

Beweis: Siehe [KL79, Theorem 4.2] bzw. [Shi86, Theorem 1.6.1]. □

Die Vorbereitungen für das eigentliche Ergebnis dieses Abschnitts sind nun abgeschlossen:

(3.22) Theorem (Identische Links-Einzeldarstellungen, vgl. [KL79, §5] bzw. [Shi86, 1.7.3])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4) mit ihrer dualen Basis $(D'_w)_{w \in W}$ aus VI.(2.14). Zusätzlich sei das Coxetersystem (W, S) (und damit $\mathcal{H}$) vom Typ A. Es seien Λ_1 und Λ_2 zwei verschiedene Linkszellen in derselben zweiseitigen Zelle und $w, y \in \Lambda_1$. Dann gibt es eindeutige $w', y' \in \Lambda_2$, so dass $w' \underset{R}{\sim} w$ und $y' \underset{R}{\sim} y$ gelten und für diese gilt

$$\tau(D'_{y'^{-1}} \cdot C'_u \cdot C'_{w'}) = \tau(D'_{y^{-1}} \cdot C'_u \cdot C'_w)$$

für alle $u \in S$. Daraus folgt, dass auch für alle $h \in \mathcal{H}$

$$\tau(D'_{y'^{-1}} \cdot h \cdot C'_{w'}) = \tau(D'_{y^{-1}} \cdot h \cdot C'_w)$$

gilt. Die Zahl $\tau(D'_{y^{-1}} \cdot h \cdot C'_w)$ ist der Koeffizient bei C'_y , wenn man $h \cdot C'_w$ als Linearkombination der C'_x schreibt. Deswegen werden hier Matrixkoeffizienten von einfachen Links-Zelldarstellungen verglichen.

Beweis: Für diesen Beweis benutzen wir, dass mit Hilfe der Rechts-Sternoperationen eine Beziehung zwischen den Linkszellen in einer zweiseitigen Zelle hergestellt werden kann. Da hier Typ A vorausgesetzt ist, folgt aus der Tatsache, dass Λ_1 und Λ_2 in derselben zweiseitigen Zelle liegen, dass es $x_1 \in \Lambda_1$ und $x_2 \in \Lambda_2$ gibt mit $x_1 \underset{R}{\sim} x_2$ (siehe VI.(3.7)). Also zeigt Theorem VI.(3.17), dass es eine Folge von Rechts-Sternoperationen gibt, deren Verkettung x_1 auf x_2 abbildet. Wie in den Bemerkungen nach VI.(3.16) und VI.(3.18) beschrieben, gibt es also für zwei Linkszellen in derselben zweiseitigen Zelle eine Folge von Rechts-Sternoperationen, deren Verkettung eine Bijektion zwischen den beiden Linkszellen liefert. Wir können uns hier also auf einen Schritt konzentrieren und ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass zwei Erzeuger $s, t \in S$ existieren, so dass st Ordnung 3 hat, dass $\{s, t\} \cap \mathcal{R}(w) = \{s\}$ für alle $w \in \Lambda_1$ ist (beachte Proposition VI.(3.15)), und dass die Rechts-Sternoperation zu den Erzeugern $\{s, t\}$ eine Bijektion zwischen den Linkszellen Λ_1 und Λ_2 herstellt. Diese Bijektion bildet $w \in \Lambda_1$ nach VI.(3.17) auf das Element $w^* \in \Lambda_2$ ab, für das $w \underset{R}{\sim} w^*$ gilt, so dass wir nur noch die Gleichung aus dem Theorem nachrechnen müssen.

Wir bezeichnen die von s und t erzeugte Untergruppe $\langle s, t \rangle$ von W mit S_3 (sie ist tatsächlich eine Coxetergruppe vom Typ A_2). Es sei $u \in S$ beliebig. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

Ist $uw < w$, dann ist $C'_u \cdot C'_w = (v^{1/2} + v^{-1/2}) \cdot C'_w$ (siehe Gleichung VI.2). Da aber $\mathcal{L}(w^*) = \mathcal{L}(w)$ ist, folgt die Behauptung in diesem Fall sofort.

Ist $uw > w$ und $y = w$, dann liegt der zweite Fall von Gleichung VI.2 vor. Es ist $y^* = w^*$, und es gilt

$$\tau(D'_{w^{-1}} \cdot C'_u \cdot C'_w) = 0 = \tau(D'_{w^{*-1}} \cdot C'_u \cdot C'_{w^*}).$$

Es sei im Folgenden $uw > w$ und $y \neq w$, wir betrachten also auch hier den zweiten Fall in Gleichung VI.2.

Für $l(y) \equiv l(w) \pmod{2}$ ist $\tau(D'_{y^{-1}} \cdot C'_u \cdot C'_w) = 0$ und da Sternoperationen immer die Parität der Länge verändern, folgt $l(y^*) \equiv l(w^*) \pmod{2}$, so dass auch $\tau(D'_{y^{*-1}} \cdot C'_u \cdot C'_{w^*}) = 0$ gilt.

Es sei also im Folgenden zusätzlich $l(y) \not\equiv l(w) \pmod{2}$.

Ist $y \in (wS_3 \setminus \{w\})$, dann bleibt aufgrund unserer Annahmen nur $y = wsts$, da wegen $y \sim_\Gamma w$ die Rechts-Abstiegs Mengen $\mathcal{R}(w)$ und $\mathcal{R}(y)$ gleich sind, s nicht in $\mathcal{R}(ws)$ enthalten ist, aber t in $\mathcal{R}(wt)$. Laut Lemma VI.(3.13) sind wir dann in einer der beiden dort durch Bilder (siehe Abbildung VI.2) angegebenen Situationen.

Im linken Bild ist $y > w$, $l(y) = l(w) + 1$, $w^* = wt$, $y^* = wst$, $y^* < w^*$ und $l(y^*) = l(w^*) - 1$. Wegen Lemma VI.(3.20).(i) (angewandt auf $(x, x') := (y^*, w^*) = (wst, wt)$) ist $\tau(D'_{y^{*-1}} \cdot C'_u \cdot C'_{w^*}) = 1$, also insbesondere $y^* < w^*$. Nach Theorem VI.(3.21).(iv) ist dann $w < y$ und deswegen mit Lemma VI.(3.20).(ii) (angewandt auf $(x, x', s) := (w, y, u)$, beachte $uw > w$ und $uy < y$) $y = uw$. Dann ist aber auch $\tau(D'_{y^{-1}} \cdot C'_u \cdot C'_w) = 1$.

Im rechten Bild ist $y < w$, $l(y) = l(w) - 1$, $w^* = ws$, $y^* = wts$, $y^* > w^*$ und $l(y^*) = l(w^*) + 1$. Wegen Lemma VI.(3.20).(i) (angewandt auf $(x, x') := (y, w)$) ist $\tau(D'_{y^{-1}} \cdot C'_u \cdot C'_w) = 1$, also insbesondere $y < w$. Nach Theorem VI.(3.21).(iv) ist dann $w^* < y^*$ und deswegen mit Lemma VI.(3.20).(ii) (angewandt auf $(x, x', s) := (w^*, y^*, u)$, beachte $uw^* > w^*$ und $uy^* < y^*$, da $w \sim_{\mathcal{R}} w^*$ und $y \sim_{\mathcal{R}} y^*$ und damit $\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w^*)$ und $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(y^*)$ gelten) $y^* = uw^*$. Dann ist aber auch $\tau(D'_{y^{*-1}} \cdot C'_u \cdot C'_{w^*}) = 1$. Damit ist die Behauptung für $y \in wS_3$ gezeigt.

Es sei im Folgenden $y \notin wS_3$, also $w^{-1}y \notin \langle s, t \rangle$.

Wir müssen nun nur noch die drei Fälle $y = uw$, $y < w$ und $y \not\prec w$ unterscheiden.

Ist $y = uw$ (und nach wie vor $uw > w$), dann ist $\tau(D'_{y^{-1}} \cdot C'_u \cdot C'_w) = 1$ und wegen Lemma VI.(3.20).(i) (angewandt auf $(x, x') := (w, y)$) folgt, dass $w < y$ gilt. Ist $w^* = wt$ (Fall des linken Bildes in Abbildung VI.2), dann folgt mit Theorem VI.(3.21).(iii), dass $w^* < y^*$ ist, also insbesondere $w^* < y^*$ und $l(w^*) < l(y^*)$ und damit auch $y^* = yt = uw^* > w^*$ und die Behauptung. Ist $w^* = ws$ (Fall des rechten Bildes in Abbildung VI.2), dann ist

$$l(yst) = l(uwst) \leq l(ws) = l(ys) - 1,$$

so dass $y^* = ys = uw^* > w^*$ folgt. In beiden Fällen ist also $\tau(D'_{y^{*-1}} \cdot C'_u \cdot C'_{w^*}) = 1$ wegen Gleichung VI.2.

Ist $y < w$, dann ist wegen Theorem VI.(3.21).(iii) auch $y^* < w^*$ und $\mu(y, w) = \mu(y^*, w^*)$ und die Behauptung folgt.

Ist $y \not\prec w$, dann ist entsprechend auch $y^* \not\prec w^*$ und $\tau(D'_{y^{-1}} \cdot C'_u \cdot C'_w) = 0 = \tau(D'_{y^{*-1}} \cdot C'_u \cdot C'_{w^*})$ und die Behauptung folgt auch hier.

Damit ist die Gleichung aus dem Theorem für alle C'_u für $u \in S$ bewiesen. Nun sind aber die vorkommenden τ -Ausdrücke Matrixeinträge der Links-Einzelldarstellungen zu den Zellmoduln $LC^{(\Lambda_1)}$ bzw. $LC^{(\Lambda_2)}$ und wir haben damit gezeigt, dass die Darstellungsmatrizen für alle C'_u ($u \in S$) in beiden Matrixdarstellungen identisch sind. Dann sind diese Matrixdarstellungen aber für alle $h \in \mathcal{H}$ identisch, da die C'_u ganz $\mathcal{H}$ als A -Modul erzeugen, und das Theorem ist bewiesen. $\square$

Bemerkungen: Ordnet man also die Elemente $(C'_w)_{w \in \Lambda_1}$ anhand ihrer Rechts-Zellzugehörigkeit den Elementen $(C'_{w'})_{w' \in \Lambda_2}$ zu, dann erhält man bezüglich dieser Basen identische Darstellungsmatrizen aus den Links-Einzelmoduln $LC^{(\Lambda_1)}$ und $LC^{(\Lambda_2)}$.

In [KL79, §5] bzw. [Shi86, Theorem 1.7.3] taucht dieses Ergebnis in der Form auf, dass die W-Graphen zu den Zellen Λ_1 und Λ_2 (für Typ A) isomorph sind. Am angegebenen Ort wird jedoch der Begriff der Isomorphie von W-Graphen nicht definiert und auch in der Literatur war keine Definition zu finden. Zum Beweis dieses Ergebnisses ist die obige Fallunterscheidung wohl angemessen.

Dieses Resultat ist in [Gyo96, Theorem A] auch für andere Typen als A zu finden. Es ist dort mit anderen Methoden bewiesen, der Beweis ist jedoch schwer nachzuvollziehen.

VI.4 Kazhdan-Lusztig-Basis und Wedderburn-Zerlegung im Typ A

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man in der generischen Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A aus der Kazhdan-Lusztig-Basis (und ihrer dualen Basis) explizit eine Wedderburn-Zerlegung erhalten kann.

Diese wird später eine prominente Rolle im Zusammenhang mit Lusztig's asymptotischer Algebra spielen.

(4.1) Theorem (Wedderburn-Zerlegung für Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4) mit ihrer dualen Basis $(D'_w)_{w \in W}$ aus VI.(2.14). Zusätzlich sei das Coxetersystem (W, S) und damit $\mathcal{H}$ vom Typ A.

Es seien $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ Linkszellen, so dass aus jeder zweiseitigen Zelle genau eine Linkszelle vorkommt, und $\Lambda := \bigcup_{i=1}^r \Lambda_i$. Wir bezeichnen mit $\chi_1, \dots, \chi_r$ die zugehörigen irreduziblen Charaktere von $K\mathcal{H}$ (vgl. VI.(3.9)) und mit $c_{\chi_1}, \dots, c_{\chi_r}$ die zugehörigen Schur-Elemente (siehe IV.(2.2)). Es sei

$$\mathcal{B} := \{C'_x D'_{y^{-1}} \mid x, y \in \Lambda \text{ und } x \sim_L y\}.$$

Dann ist $\mathcal{B}$ über A linear unabhängig und es gilt

$$C'_x D'_{y^{-1}} \cdot C'_{x'} D'_{y'^{-1}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } y \neq x' \\ c_{\chi_i} \cdot C'_x D'_{y'^{-1}} & \text{falls } y = x' \text{ und } x, y, x', y' \in \Lambda_i \end{cases}$$

für alle $x, y, x', y' \in \Lambda$ mit $x \sim_L y$ und $x' \sim_L y'$.

Beweis: Wir stellen zunächst zur einfacheren Referenz einige Aussagen tabellarisch zusammen:

(i)	$y \leq_L x \iff C'_x D'_{y^{-1}} \neq 0$	siehe Proposition VI.(2.15)
(ii)	$\chi_j(h) = \sum_{z \in \Lambda_j} \tau(D'_{z^{-1}} \cdot h \cdot C'_z)$	siehe Korollar VI.(3.10)
(iii)	$\sum_{z \in \Lambda_j} C'_z D'_{z^{-1}}$ ist zentral in $\mathcal{H}$	siehe Korollar VI.(3.10)
(iv)	$y \leq_R x \iff D'_{y^{-1}} C'_x \neq 0$	siehe Proposition VI.(2.15)
(v)	$y \sim_L x \implies y \sim_{LR} x$	siehe Definition VI.(2.16)
(vi)	$y \leq_R x$ und $y \sim_{LR} x \implies y \sim_R x$	siehe Theorem VI.(2.17)
(vii)	$y \sim_L x$ und $y \sim_R x \implies y = x$	siehe Korollar VI.(3.8)
(viii)	$y \leq_L x$ und $y \sim_{LR} x \implies y \sim_L x$	siehe Theorem VI.(2.17)

Die Elemente $C'_x D'_{y^{-1}} \in \mathcal{B}$ sind wegen (i) alle ungleich Null, da jeweils $x \sim_L y$ ist.

Wir betrachten gewisse Werte irreduzibler Charaktere: Es sei $h \in K\mathcal{H}$ beliebig, $1 \leq i, j \leq r$ mit $i \neq j$ und $x, y \in \Lambda_i$. Dann gilt mit (ii) und (iii)

$$\begin{aligned} \chi_j(h \cdot C'_x D'_{y^{-1}}) &= \sum_{z \in \Lambda_j} \tau(D'_{z^{-1}} \cdot h \cdot C'_x \underbrace{D'_{y^{-1}} \cdot C'_z}_{(!)}) = \tau \left(\sum_{z \in \Lambda_j} (C'_z D'_{z^{-1}}) \cdot h \cdot C'_x D'_{y^{-1}} \right) \\ &= \tau \left(\sum_{z \in \Lambda_j} h \cdot C'_z \underbrace{D'_{z^{-1}} C'_x}_{(!)} D'_{y^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Wegen (iv) sind die Summanden in diesem Ausdruck gleich 0, wenn nicht $y \leq_R z$ und $z \leq_R x$ ist (beachte die mit (!) markierten Stellen). Wenn aber $y \leq_R z \leq_R x$ gilt, so folgt mit (v), dass $z \leq_{LR} x \sim_{LR} y \leq_{LR} z$, also $z \sim_{LR} x$ ist. Da dies aber wegen $j \neq i$ nicht gilt, ist

$$\chi_j(h \cdot C'_x D'_{y^{-1}}) = 0 \quad \text{für } x, y \in \Lambda_i, j \neq i \text{ und für alle } h \in K\mathcal{H} \quad (\text{VI.4})$$

und es folgt, dass $C'_x D'_{y^{-1}}$ in der isotypischen (Wedderburn-)Komponente der Algebra $K\mathcal{H}$ zum irreduziblen Charakter χ_i liegt. Insbesondere folgt daraus, dass $C'_x D'_{y^{-1}} \cdot C'_{x'} D'_{y'^{-1}} = 0$ für alle $x, y, x', y' \in \Lambda$ mit $x \not\sim_L y$ und $x' \not\sim_L y'$ ist, falls nicht $y \sim_L x'$ gilt.

Es seien von nun an i fest und $x, y, x', y' \in \Lambda_i$ beliebig.

Wegen (iv) ist das Produkt $C'_x D'_{y^{-1}} \cdot C'_{x'} D'_{y'^{-1}}$ gleich 0, wenn nicht $y \leq_R x'$ ist. Da aber $x' \sim_L y$ und damit $x' \sim_{LR} y$ (beachte (v)) ist, folgt aus $y \leq_R x'$ mit (vi), dass $y \sim_R x'$ ist, und dann mit (vii), dass $y = x'$ ist.

Also ist gezeigt, dass $C'_x D'_{y^{-1}} \cdot C'_{x'} D'_{y'^{-1}}$ allenfalls für $y = x'$ ungleich 0 ist.

Da $\sum_{z \in \Lambda_i} C'_z D'_{z^{-1}}$ in der isotypischen Komponente zum Charakter χ_i ist und mit (iii) zentral ist, ist es gleich einem Vielfachen des zentral-primitiven Idempotents dieser Komponente. Wir bestimmen dieses Vielfache, indem wir $\chi_i(C'_x D'_{x^{-1}})$ für $x \in \Lambda_i$ bestimmen (das zentral-primitive Idempotent operiert nämlich auf einem einfachen Modul in der isotypischen (Wedderburn-)Komponente zum Charakter χ_i wie die Identität, hat also als Charakterwert den Charaktergrad):

Weil $\tau = \sum_{j=1}^r c_{\chi_j}^{-1} \chi_j$ ist (siehe [GP00, 7.2.6]), alle χ_j für $j \neq i$ auf $C'_x D'_{x^{-1}}$ verschwinden und $\tau(C'_x D'_{x^{-1}}) = 1$ ist ($(D'_w)_{w \in W}$ ist die duale Basis von $(C'_w)_{w \in W}$ bezüglich τ), gilt $\chi_i(C'_x D'_{x^{-1}}) = c_{\chi_i}$. Daraus folgt, dass $e^{(i)} := c_{\chi_i}^{-1} \cdot \sum_{z \in \Lambda_i} C'_z D'_{z^{-1}}$ gleich dem zentral-primitiven Idempotent zum Charakter χ_i ist.

Wir setzen nun $e_z^{(i)} := c_{\chi_i}^{-1} \cdot C'_z D'_{z^{-1}} \in K\mathcal{H}$. Die obigen Überlegungen zeigen, dass einerseits $e_z^{(i)} \neq 0$ ist und andererseits $e_z^{(i)} \cdot e_{z'}^{(i)} = 0$ ist für $z \neq z'$, so dass $e^{(i)} = \sum_{z \in \Lambda_i} e_z^{(i)}$ eine „orthogonale Summe“ ist und wegen

$$e_z^{(i)} = e_z^{(i)} \cdot e^{(i)} = \sum_{z' \in \Lambda_i} e_z^{(i)} e_{z'}^{(i)} = e_z^{(i)} \cdot e_z^{(i)}$$

für $z \in \Lambda_i$ folgt, dass die $e_z^{(i)}$ paarweise orthogonale Idempotente in $K\mathcal{H}$ sind.

Damit erhalten wir sofort, dass für $x, y \in \Lambda_i$ beliebig

$$C'_x D'_{y^{-1}} = e^{(i)} \cdot C'_x D'_{y^{-1}} = \sum_{z \in \Lambda_i} e_z^{(i)} \cdot C'_x D'_{y^{-1}} = e_x^{(i)} \cdot C'_x D'_{y^{-1}} \quad (\text{VI.5})$$

und

$$C'_x D'_{y^{-1}} = C'_x D'_{y^{-1}} \cdot e^{(i)} = \sum_{z \in \Lambda_i} C'_x D'_{y^{-1}} \cdot e_z^{(i)} = C'_x D'_{y^{-1}} e_y^{(i)} \quad (\text{VI.6})$$

ist.

Die Elemente $\{C'_x D'_{y^{-1}} \mid x, y \in \Lambda_i\}$ sind über A linear unabhängig:

Ist nämlich $\sum_{x, y \in \Lambda_i} \alpha_{x, y} C'_x D'_{y^{-1}} = 0$ (mit $\alpha_{x, y} \in A$), dann ist für alle $z, z' \in \Lambda_i$

$$0 = e_z^{(i)} \cdot \left(\sum_{x, y \in \Lambda_i} \alpha_{x, y} C'_x D'_{y^{-1}} \right) \cdot e_{z'}^{(i)} = \alpha_{z, z'} e_z^{(i)} C'_z D'_{z'^{-1}} e_{z'}^{(i)} = \alpha_{z, z'} C'_z D'_{z'^{-1}}$$

(für die letzte Gleichheit benutzen wir Gleichungen VI.5 und VI.6) und damit $\alpha_{x, y} = 0$ für alle $x, y \in \Lambda_i$, da $C'_x D'_{y^{-1}} \neq 0$ ist (siehe (i)). Damit spannen Sie aber aus Dimensionsgründen in $K\mathcal{H}$ die gesamte isotypische Komponente zum Charakter χ_i auf, so dass sich jedes Element in dieser Komponente eindeutig als K -Linearkombination von Elementen aus $\{C'_x D'_{y^{-1}} \mid x, y \in \Lambda_i\}$ darstellen lässt.

Wir bestimmen als nächstes $C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{x^{-1}}$ für $x, y \in \Lambda_i$, es ist als Produkt zweier Elemente in der isotypischen Komponente $e^{(i)} K\mathcal{H}$ ebenfalls darin enthalten. Also können wir es nach den obigen Ergebnissen als K -Linearkombination der $C'_v D'_{w^{-1}}$ mit $v, w \in \Lambda_i$ schreiben:

$$C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{x^{-1}} = \sum_{v, w \in \Lambda_i} \alpha_{v, w} C'_v D'_{w^{-1}} \quad \text{mit gewissen } \alpha_{v, w} \in K.$$

Wieder können wir wie oben durch Multiplikation mit Elementen $e_z^{(i)}$ von links und $e_{z'}^{(i)}$ von rechts zeigen, dass $C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{x^{-1}}$ ein K -Vielfaches von $C'_x D'_{x^{-1}}$ ist, da $0 = e_z^{(i)} C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{x^{-1}} e_{z'}^{(i)}$ für $z \neq x$ und $z' \neq x$ gilt. Um die Konstante zu bestimmen, berechnen wir $\tau(C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{x^{-1}})$:

Dazu sei Γ die Rechtszelle mit $y \in \Gamma$. Dann ist $C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{x^{-1}} = \sum_{y' \in \Gamma} C'_x D'_{y'^{-1}} C'_{y'} D'_{x^{-1}}$, da für alle in $y' \neq y$ in derselben Rechtszelle **nicht** $y' \underset{\mathbb{L}}{\sim} y$ gilt (siehe (vii)) und damit auch nicht $y' \underset{\mathbb{L}}{\leq} y$ (sonst wäre mit (viii) auch $y' \underset{\mathbb{L}}{\sim} y$), so dass $C'_x D'_{y'^{-1}} = 0$ ist (beachte $x \underset{\mathbb{L}}{\sim} y$). Also gilt

$$\begin{aligned} \tau(C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{x^{-1}}) &= \sum_{y' \in \Gamma} \tau(C'_x D'_{y'^{-1}} C'_{y'} D'_{x^{-1}}) = \tau\left(\left(\sum_{y' \in \Gamma} D'_{y'^{-1}} C'_{y'}\right) \cdot D'_{x^{-1}} C'_x\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \chi_i(D'_{x^{-1}} C'_x) = \chi_i(C'_x D'_{x^{-1}}) = c_{\chi_i}. \end{aligned}$$

Zunächst ist an der mit $(*)$ markierten Stelle nicht klar, welcher Charakter zum Rechts-Zellmodul $\text{RC}^{(\Gamma)}$ gehört. Laut Theorem VI.(3.9) und Korollar VI.(3.10) für Rechtszellen ist es ein irreduzibler Charakter χ von $K\mathcal{H}$, für den

$$\chi(h) = \tau\left(\left(\sum_{y' \in \Gamma} D'_{y'^{-1}} C'_{y'}\right) \cdot h\right) \quad \text{für alle } h \in K\mathcal{H}$$

gilt. Wir wollen zeigen, dass $\chi = \chi_i$ ist. Dazu setzen wir zunächst $h := C'_z D'_{z^{-1}}$ für $z \in W$ und $z \not\underset{\mathbb{LR}}{\sim} y$, dann gilt nämlich

$$\begin{aligned} \chi(C'_z D'_{z^{-1}}) &= \chi(D'_{z^{-1}} C'_z) = \tau\left(\sum_{y' \in \Gamma} D'_{y'^{-1}} C'_{y'} D'_{z^{-1}} C'_z\right) \\ &= \sum_{y' \in \Gamma} \tau(C'_z D'_{y'^{-1}} C'_{y'} D'_{z^{-1}}) = 0, \end{aligned}$$

weil nach (i) das Produkt $C'_z D'_{y'^{-1}}$ nur für $y' \underset{\mathbb{L}}{\leq} z$ ungleich Null und das Produkt $C'_{y'} D'_{z^{-1}}$ nur für $z \underset{\mathbb{L}}{\leq} y'$ ungleich Null ist. Da aber aus $y' \underset{\mathbb{L}}{\sim} z$ und $y \underset{\mathbb{R}}{\sim} y'$ sofort $y \underset{\mathbb{LR}}{\sim} z$ folgen würde, was nach Voraussetzung nicht gilt, ist $\chi(C'_z D'_{z^{-1}}) = 0$ für alle $z \in W$ mit $z \not\underset{\mathbb{LR}}{\sim} y$. Andererseits ist aber für $z \in \Lambda_j$ mit $j \neq i$ der Charakterwert $\chi_j(C'_z D'_{z^{-1}})$ gleich c_{χ_j} , also insbesondere ungleich 0. Damit ist $\chi \neq \chi_j$ für alle $j \neq i$, also $\chi = \chi_i$.

Da $\tau(C'_x D'_{x^{-1}}) = 1$ ist, folgt $C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{x^{-1}} = c_{\chi_i} \cdot C'_x D'_{x^{-1}}$.

Um schließlich $C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{z^{-1}}$ für $x, y, z \in \Lambda_i$ zu bestimmen, gehen wir analog vor:

Wie oben ist es ein Vielfaches von $C'_x D'_{z^{-1}}$ und wir können die Konstante bestimmen, indem wir $\tau(C'_x D'_{z^{-1}} C'_z D'_{x^{-1}}) = c_{\chi_i}$ mit $\tau(C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{z^{-1}} C'_z D'_{x^{-1}})$ vergleichen: Es sei Γ die Rechtszelle mit $x \in \Gamma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tau(C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{z^{-1}} C'_z D'_{x^{-1}}) &= \sum_{x' \in \Gamma} \tau(C'_{x'} D'_{y^{-1}} C'_y D'_{z^{-1}} C'_z D'_{x'^{-1}}) = \chi_i(D'_{y^{-1}} C'_y D'_{z^{-1}} C'_z) \\ &= \chi_i(C'_z D'_{y^{-1}} C'_y D'_{z^{-1}}) = \chi_i(c_{\chi_i} \cdot C'_z D'_{z^{-1}}) = c_{\chi_i}^2. \end{aligned}$$

Also ist $C'_x D'_{y^{-1}} C'_y D'_{z^{-1}} = c_{\chi_i} \cdot C'_x D'_{z^{-1}}$ und alle Behauptungen sind bewiesen. $\square$

(4.2) Korollar (Verschiedene Linkszellen desselben Typs)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4) mit ihrer dualen Basis $(D'_w)_{w \in W}$ aus VI.(2.14). Zusätzlich sei das Coxetersystem (W, S) und damit $\mathcal{H}$ vom Typ A.

Es seien Λ_1 und Λ_2 zwei Linkszellen, die in derselben zweiseitigen Zelle liegen, so dass also die Links-Zellmoduln $\text{LC}^{(\Lambda_1)}$ und $\text{LC}^{(\Lambda_2)}$ isomorph sind.

Sind dann $x, y \in \Lambda_1$, so gibt es eindeutige $x', y' \in \Lambda_2$, für die $x \underset{\mathbb{R}}{\sim} x'$ und $y \underset{\mathbb{R}}{\sim} y'$ gelten, und für diese ist $C'_x D'_{y^{-1}} = C'_{x'} D'_{y'^{-1}}$.

Beweis: Alle Argumente in Theorem VI.(4.1) sind unabhängig davon, ob Λ_1 oder Λ_2 diejenige Linkszelle in ihrer zweiseitigen Zelle ist, die in Λ vorkommt. Daraus folgt erstens, dass die Elemente $C'_{x'}D'_{y'-1}$ für $x', y' \in \Lambda_2$ in der isotypischen (Wedderburn-) Komponente zum einfachen Modul $\text{LC}^{(\Lambda_1)}$ liegen, und zweitens, dass diese Elemente analoge Relationen erfüllen.

Wegen Theorem VI.(3.7) gibt es zu jedem $x \in \Lambda_1$ genau ein $x' \in \Lambda_2$ mit $x' \underset{\mathbb{R}}{\sim} x$ (x' ist das Urbild von $(P(z), P(x^{-1}))$ unter der Robinson-Schensted-Abbildung, wobei z ein beliebiges Element aus Λ_2 ist).

Es seien nun $x', y' \in \Lambda_2$ beliebig gewählt. Wir bestimmen $C'_{x'}D'_{y'-1}$:

Es ist $C'_x D'_{x-1} \cdot C'_{x'} D'_{y'-1} = 0$ für $x \in \Lambda_1$, falls nicht $x \underset{\mathbb{R}}{\leq} x'$, also mit (vi) (siehe Beweis zu VI.(4.1)) $x \underset{\mathbb{R}}{\sim} x'$ ist. Entsprechendes gilt für $C'_{x'} D'_{y'-1} C'_y D'_{y-1}$ und $y \in \Lambda_1$. Deswegen folgt sofort, dass $C'_{x'} D'_{y'-1}$ ein K -Vielfaches von $C'_x D'_{y-1}$ ist für die (eindeutigen) $x, y \in \Lambda_1$ mit $x \underset{\mathbb{R}}{\sim} x'$ und $y \underset{\mathbb{R}}{\sim} y'$.

Für die Elemente $C'_{x'} D'_{y'-1}$ mit $x' \in \Lambda_2$ folgt damit sofort aus den Matrix-Einheits-Relationen in VI.(4.1), dass $C'_{x'} D'_{y'-1} = C'_x D'_{y-1}$ für $x \in \Lambda_1$ mit $x \underset{\mathbb{R}}{\sim} x'$ ist. Für beliebige $C'_{x'} D'_{y'-1}$ mit $x', y' \in \Lambda_2$ folgt $C'_{x'} D'_{y'-1} = C'_x D'_{y-1}$ (für $x, y \in \Lambda_1$, $x \underset{\mathbb{R}}{\sim} x'$ und $y \underset{\mathbb{R}}{\sim} y'$), da nach Theorem VI.(3.22)

$$\tau(C'_{x'} D'_{y'-1} \cdot h) = \tau(D'_{y'-1} \cdot h \cdot C'_{x'}) = \tau(D'_{y-1} \cdot h \cdot C'_x) = \tau(C'_x D'_{y-1} \cdot h)$$

für alle $h \in \mathcal{H}$ ist. □

(4.3) Korollar (Matrix-Einheit einer Linkszelle)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4) mit ihrer dualen Basis $(D'_w)_{w \in W}$ aus VI.(2.14). Zusätzlich sei das Coxetersystem (W, S) und damit $\mathcal{H}$ vom Typ A.

Es sei $\Lambda \subseteq W$ eine Linkszelle, $\chi \in \text{Irr}(\mathcal{H})$ der irreduzible Charakter des Links-Zellmoduls $\text{LC}^{(\Lambda)}$ (siehe VI.(3.9)) und c_χ das zugehörige Schur-Element (siehe IV.(2.2)). Dann ist der von den Elementen $M := \{c_\chi^{-1} \cdot C'_x D'_{y-1} \mid x, y \in \Lambda\}$ aufgespannte K -Untervektorraum $\langle M \rangle_K$ von $K\mathcal{H}$ ein zweiseitiges Ideal in $K\mathcal{H}$, das als Ring isomorph zu einem vollen Matrixring über K ist, wobei für die Elemente von M die Relationen von Matrix-Einheiten gelten:

$$(c_\chi^{-1} \cdot C'_x D'_{y-1}) \cdot (c_\chi^{-1} \cdot C'_z D'_{w-1}) = \delta_{y,z} \cdot (c_\chi^{-1} \cdot C'_x D'_{w-1}).$$

Beweis: Die angegebenen Relationen sind in Theorem VI.(4.1) bewiesen. Da die Zellmoduln einzelner Linkszellen irreduzibel sind (siehe VI.(3.9)), erzeugen die sämtlichen Elemente aus Theorem VI.(4.1) als K -Vektorraum ganz $K\mathcal{H}$, so dass folgt, dass $\langle M \rangle_K$ ein zweiseitiges Ideal in $K\mathcal{H}$ ist. □

(4.4) Korollar (Wedderburn-Zerlegung)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4) mit ihrer dualen Basis $(D'_w)_{w \in W}$ aus VI.(2.14). Zusätzlich sei das Coxetersystem (W, S) und damit $\mathcal{H}$ vom Typ A.

Durch die drei vorstehenden Resultate haben wir aus der Kazhdan-Lusztig-Basis und ihrer dualen explizit eine Wedderburn-Zerlegung für $\mathcal{H}$ konstruiert. Dabei tauchen genau die Schur-Elemente als Nenner auf.

Es seien also wie in VI.(4.1) $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ Linkszellen, so dass aus jeder zweiseitigen Zelle genau eine Linkszelle vorkommt, und $\Lambda := \bigcup_{i=1}^r \Lambda_i$. Wir bezeichnen mit $\chi_1, \dots, \chi_r$ die zugehörigen irreduziblen Charaktere von $K\mathcal{H}$ (vgl. VI.(3.9)) und mit $c_{\chi_1}, \dots, c_{\chi_r}$ die zugehörigen Schur-Elemente (siehe IV.(2.2)). Dann bilden die Elemente

$$\{c_{\chi_i}^{-1} \cdot C'_x D'_{y-1} \mid x, y \in \Lambda_i \text{ und } 1 \leq i \leq r\}$$

eine Wedderburn-Basis von $\mathcal{H}$.

Beweis: Setze die Ergebnisse in VI.(4.1) und VI.(4.3) zusammen. □

Bemerkung: Die hier vorkommenden Elemente $c_\chi^{-1} \cdot C'_x D'_{y-1}$ werden auch im nächsten Abschnitt über Lusztig's asymptotische Algebra eine prominente Rolle spielen.

VI.5 Lusztig's asymptotische Algebra $\mathcal{J}$

In [Lus87b] hat George Lusztig zu einer Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ über $A = \mathbb{Z}[v^{1/2}, v^{-1/2}]$ die sogenannte „asymptotische Algebra“ $\mathcal{J}$ zusammen mit einem Homomorphismus $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}$ von A -Algebren eingeführt. Dieser Homomorphismus hat sich später in etlichen Anwendungen (siehe z.B. [Lus87c], [Lus87a] oder [GR01]) als sehr nützlich und mächtig erwiesen.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass im Typ A die Algebra $\mathcal{J}$ nichts Anderes als das A -Erzeugnis der im letzten Abschnitt konstruierten Wedderburn-Zerlegung ist und der Lusztig-Homomorphismus einfach die Inklusion von $\mathcal{H}$ dort hinein.

Wir stellen zunächst die Definition der asymptotischen Algebra und des Lusztig-Homomorphismus vor, wobei wir für die Beweise auf die Literatur verweisen. Dort wird für die Konstruktion der asymptotischen Algebra die C -Basis (siehe VI.(2.5)) verwendet. Deswegen sind hier die folgenden Vorbereitungen notwendig:

(5.1) Definition/Proposition (Involution j und Strukturkonstanten)

Es gelten die Bezeichnungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3), so dass wir also mit $a \mapsto \bar{a}$ für $a \in A$ die Involution von A bezeichnen, die $v^{1/2}$ mit $v^{-1/2}$ vertauscht. Es sei $j : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ die Abbildung, die durch

$$j \left(\sum_{w \in W} a_w \tilde{T}_w \right) \mapsto \sum_{w \in W} \bar{a}_w (-1)^{l(w)} \cdot \tilde{T}_w$$

für beliebige $a_w \in A$ definiert ist. Dann ist j ein Ringautomorphismus der Ordnung 2 von $\mathcal{H}$. Für die C -Basis von $\mathcal{H}$ gilt, dass $C_w = (-1)^{l(w)} \cdot j(C'_w)$ ist für alle $w \in W$.

Es gilt dann auch $C'_w = (-1)^{l(w)} \cdot j(C_w)$.

Sind $h_{x,y,z} \in A$ für $x, y, z \in W$ die Strukturkonstanten von $\mathcal{H}$ bezüglich der C -Basis, gilt also

$$C_x \cdot C_y = \sum_{z \in W} h_{x,y,z} C_z \quad \text{für alle } x, y \in W,$$

dann gilt für die Strukturkonstanten $h'_{x,y,z}$ von $\mathcal{H}$ bezüglich der C' -Basis

$$C'_x \cdot C'_y = \sum_{z \in W} (-1)^{l(x)+l(y)+l(z)} \cdot \overline{h_{x,y,z}} \cdot C'_z = \sum_{z \in W} h'_{x,y,z} \cdot C'_z \quad \text{für alle } x, y \in W,$$

so dass $h'_{x,y,z} = (-1)^{l(x)+l(y)+l(z)} \cdot \overline{h_{x,y,z}}$ für alle $x, y, z \in W$ ist.

Mit den Bezeichnungen aus VI.(2.14) gilt $h'_{x,y,z} = \tau(C'_x C'_y D'_{z^{-1}})$ für alle $x, y, z \in W$, da beide Seiten gleich dem Koeffizienten bei C'_z sind, wenn man $C'_x C'_y$ in der C' -Basis schreibt.

Beweis: In [GP00, Exercise 8.1] wird gezeigt, dass j ein Ringautomorphismus von $\mathcal{H}$ ist und in [GP00, Theorem 11.1.10, Step 3], dass die C -Basis wie beschrieben aus der C' -Basis hervorgeht. $\square$

(5.2) Korollar (Duale Basen und j)

Es gelten die Bezeichnungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und die Definitionen aus VI.(5.1). Zusätzlich sei $(D'_w)_{w \in W}$ wie in VI.(2.14) die bezüglich τ duale Basis von $(C'_w)_{w \in W}$ und analog $(D_w)_{w \in W}$ die bezüglich τ duale Basis von $(C_w)_{w \in W}$ (es gilt also $\tau(C_w \cdot D_{y^{-1}}) = \delta_{w,y}$ für alle $w, y \in W$), dann ist

$$D_w = (-1)^{l(w)} \cdot j(D'_w)$$

für alle $w \in W$.

Beweis: Der Ringautomorphismus j von $\mathcal{H}$ respektiert insofern die Spurform τ , als $\tau(j(h)) = \overline{\tau(h)}$ für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt (man beachte die Definition von j in VI.(5.1) und die Tatsache, dass τ auf allen $\tilde{T}_w$ mit $w \neq 1$ verschwindet und $\tau(\tilde{T}_1) = 1$ ist).

Also folgt aus $\tau(C'_w \cdot D'_{y^{-1}}) = \delta_{y,w}$ durch Anwenden von $\bar{}$, dass $\tau(C_w \cdot (-1)^{l(w)} \cdot j(D'_{y^{-1}})) = \delta_{y,w}$ ist und damit $\tau(C_w \cdot j(D'_{y^{-1}})) = (-1)^{l(y)} \cdot \delta_{y,w}$ ist. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

(5.3) Definition/Proposition (Lusztig's asymptotische Algebra, vgl. [Lus87b, 1.1])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus VI.(2.1) bis VI.(2.3) und in VI.(5.1). Weiter sei für $z \in W$ jeweils $a(z) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die natürliche Zahl, für die

$$\begin{aligned} (v^{1/2})^{a(z)} \cdot h_{x,y,z} &\in \mathbb{Z}[v^{1/2}] \text{ ist} && \text{für alle } x, y \in W \text{ und} \\ (v^{1/2})^{a(z)-1} \cdot h_{x,y,z} &\notin \mathbb{Z}[v^{1/2}] \text{ ist} && \text{für gewisse } x, y \in W. \end{aligned}$$

Weiter setzen wir für $x, y, z \in W$ jeweils $\gamma'_{x,y,z} \in \mathbb{Z}$ gleich dem konstanten Koeffizienten von $(-v^{1/2})^{a(z)} \cdot h_{x,y,z}$.

Es sei

$$\mathcal{D} := \{d \in W \mid a(d) = l(d) - 2 \cdot \deg(P_{1,d})\},$$

wobei $P_{1,d}$ die Kazhdan-Lusztig-Polynome aus VI.(2.5) sind und $\deg P_{1,d}$ als Grad von $P_{1,d}$ in v (**Achtung:** nicht Grad in $v^{1/2}$ — siehe VI.(2.5)) zu verstehen ist. Für die Elemente $d \in \mathcal{D}$ gilt $d^2 = 1$, sie heißen **distinguerte** oder **Duflo-Involutionen** (obwohl das Einselement dabei ist). Jede Linkszelle von W enthält genau ein Element von $\mathcal{D}$.

Es sei nun J die freie abelsche Gruppe mit Basis $(t_w)_{w \in W}$. Sie wird durch die $\gamma'_{x,y,z}$ als Strukturkonstanten zu einer assoziativen $\mathbb{Z}$ -Algebra, indem wir also setzen:

$$t_x \cdot t_y := \sum_{z \in W} \gamma'_{x,y,z} t_z.$$

Ihr Einselement ist gleich $\sum_{d \in \mathcal{D}} t_d$. Wir bezeichnen die assoziative A -Algebra $A \otimes_{\mathbb{Z}} J$ mit $\mathcal{J}$, sie heißt **Lusztig's asymptotische Algebra**.

Beweis: Siehe [Lus87b, Abschnitt 1 und 2]. Dass jede Linkszelle genau ein Element aus $\mathcal{D}$ enthält, steht in [Lus87b, Theorem 1.10]. $\square$

Bemerkung: In [Lus87b] ist $\gamma_{x,y,z}$ an Stelle von unserem $\gamma'_{x,y,z}$ definiert, so dass $\gamma_{x,y,z^{-1}} = \gamma'_{x,y,z}$ ist. Die Inversenbildung scheint aber ein — wenn auch kleiner — so doch unnötiger Umweg zu sein.

(5.4) Definition/Proposition (Lusztig-Homomorphismus, siehe [Lus87b, Abschnitt 2])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus VI.(2.1) bis VI.(2.3) und VI.(5.1) bis VI.(5.3). Dann ist durch die folgende Vorschrift eine A -lineare Abbildung der Algebra $\mathcal{H}$ in die Algebra $\mathcal{J}$ gegeben:

$$\phi(C_x) := \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}, z \in W \\ a(d)=a(z)}} h_{x,d,z} \cdot t_z = \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}, z \in W \\ d \sim z}} h_{x,d,z} \cdot t_z \quad \text{für alle } x \in W.$$

Diese Abbildung ϕ ist ein Homomorphismus von A -Algebren und heißt **Lusztig-Homomorphismus**. Wir bezeichnen die Fortsetzung $\text{id}_K \otimes_A \phi : K\mathcal{H} \rightarrow K\mathcal{J}$ auf die Konstantenerweiterungen mit dem Quotientenkörper $K = \text{Quot}(A) = \mathbb{Q}(\sqrt{v})$ ebenfalls mit ϕ . Sie ist ein Isomorphismus von K -Algebren.

Beweis: Siehe [Lus87b, Abschnitt 2]. Für die zweite Gleichung siehe entweder [Lus87a, 3.2.(a)] oder beachte [Lus85, Corollary 6.3.(b)] zusammen mit der Tatsache, dass $h_{x,d,z} = \tau(C_x \cdot C_d \cdot D_{z^{-1}}) = 0$ ist, wenn nicht $z \leq_L d$ ist (siehe [Lus84, (5.1.14)]). In [Lus87b, Theorem 2.8] ist bewiesen, dass $\text{id}_K \otimes_A \phi$ ein Isomorphismus ist. Dies folgt aber auch aus dem folgenden Theorem VI.(5.5), zu dessen Beweis nicht verwendet wird, dass $\text{id}_K \otimes_A \phi$ ein Isomorphismus ist. $\square$

(5.5) Theorem (Urbilder der t -Basis unter dem Lusztig-Homomorphismus beim Typ A)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus VI.(2.1) bis VI.(2.3) und VI.(5.1) bis VI.(5.4). Zusätzlich sei das Coxetersystem (W, S) und damit $\mathcal{H}$ vom Typ A. Dann gibt es für jedes $z \in W$ genau ein $d \in \mathcal{D}$ mit $d \sim_L z$. Ist $z \in W$ und Σ die Linkszelle, in der z liegt und c_x das Schur-Element (siehe IV.(2.2)) zum einfachen Einzellmodul $\text{LC}^{(\Sigma)}$, dann ist $\phi\left(\overline{c_x^{-1}} \cdot C_z D_{d^{-1}}\right) = t_z \in \mathcal{J}$ für das eindeutig bestimmte $d \in \mathcal{D}$ mit $d \sim_L z$.

Beweis: Dieses verblüffende Resultat folgt direkt aus unseren Ergebnissen über die Kazhdan-Lusztig-Basis und die Wedderburn-Zerlegung in VI.(4.1). Das liegt daran, dass die Abbildungsvorschrift des Lusztig-Homomorphismus eine bemerkenswerte Ähnlichkeit mit den Formeln der Links-Zelldarstellungen hat (siehe dazu auch Bemerkung VI.(5.6)).

Es seien $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ Linkszellen, so dass aus jeder zweiseitigen Zelle genau eine Linkszelle vorkommt, und $\Lambda := \bigcup_{i=1}^r \Lambda_i$ (vgl. VI.(4.1)). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\Sigma = \Lambda_i$. Wir bezeichnen mit $\chi_1, \dots, \chi_r$ die zugehörigen irreduziblen Charaktere von $K\mathcal{H}$ (vgl. VI.(3.9)) und mit $c_{\chi_1}, \dots, c_{\chi_r}$ die zugehörigen Schur-Elemente (siehe IV.(2.2)), es ist also $c_\chi = c_{\chi_i}$.

Es sei $d \in \mathcal{D}$ (eindeutige) Duflo-Involution in Λ_i (siehe VI.(5.3)). Betrachten wir nun den Links-Zellmodul $\mathrm{LC}^{(\Lambda_i)}$ und die zugehörige Links-Zelldarstellung bezüglich der Basis $(C'_v)_{v \in \Lambda_i}$, dann folgt aus den Relationen in VI.(4.1), dass das Element $c_{\chi_i}^{-1} \cdot C'_z D'_{d^{-1}} = c_{\chi_i}^{-1} \cdot C'_z D'_d$ in dieser Matrixdarstellung auf eine Matrix abgebildet wird, die genau eine Eins und sonst lauter Nullen enthält:

$$\tau(D'_{w^{-1}} \cdot c_{\chi_i}^{-1} \cdot C'_z D'_{d^{-1}} \cdot C'_v) = c_{\chi_i}^{-1} \cdot \tau(C'_z D'_{d^{-1}} \cdot C'_v D'_{w^{-1}}) = \delta_{v,d} \cdot \delta_{w,z}$$

für $v, w \in \Lambda_i$. In allen anderen einfachen Zelldarstellungen operiert dieses Element wie die Null — diese Gleichung gilt nämlich sogar für alle $v, w \in \Lambda$ mit $v \sim_\mathbb{L} w$.

Schreiben wir nun $c_{\chi_i}^{-1} \cdot C'_z D'_{d^{-1}}$ in der Basis $(C'_u)_{u \in W}$, also

$$c_{\chi_i}^{-1} \cdot C'_z D'_{d^{-1}} =: \sum_{u \in W} \alpha_u \cdot C'_u \quad \text{mit } \alpha_u \in K \text{ für alle } u \in W,$$

dann folgt daraus

$$\delta_{v,d} \cdot \delta_{w,z} = \tau \left(\sum_{u \in W} D'_{w^{-1}} \cdot \alpha_u C'_u \cdot C'_v \right) = \sum_{u \in W} \alpha_u \cdot \tau(C'_u \cdot C'_v D'_{w^{-1}}) = \sum_{u \in W} \alpha_u \cdot h'_{u,v,w}$$

für $v, w \in \Lambda$ mit $v \sim_\mathbb{L} w$, wobei hier wieder wie in VI.(5.1) für die Strukturkonstanten von $\mathcal{H}$ bezüglich der C' -Basis $h'_{u,v,w}$ steht.

Wir betrachten nun das Bild von $c_{\chi_i}^{-1} \cdot C'_z D'_{d^{-1}}$ unter der Verkettung $\phi \circ j$ des Lusztig-Homomorphismus mit der Involution j aus VI.(5.1) (fortgesetzt auf die Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$):

$$\begin{aligned} (\phi \circ j) \left(\sum_{u \in W} \alpha_u C'_u \right) &= \phi \left(\sum_{u \in W} \overline{\alpha_u} \cdot (-1)^{l(u)} \cdot C_u \right) = \sum_{u \in W} \left(\overline{\alpha_u} \cdot (-1)^{l(u)} \cdot \sum_{\substack{d' \in \mathcal{D}, z' \in W \\ d' \sim_\mathbb{L} z'}} h_{u,d',z'} t_{z'} \right) \\ &= \sum_{\substack{d' \in \mathcal{D}, z' \in W \\ d' \sim_\mathbb{L} z'}} \left((-1)^{l(d')+l(z')} \cdot \overline{\sum_{u \in W} \alpha_u \cdot h'_{u,d',z'}} \right) t_{z'}. \end{aligned}$$

Hier sei angemerkt, dass

$$j(\alpha_u \cdot C'_u) = j(\alpha_u \tilde{T}_1 C'_u) = j(\alpha_u \tilde{T}_1) \cdot j(C'_u) = \overline{\alpha_u} \cdot \tilde{T}_1 \cdot (-1)^{l(u)} C_u = \overline{\alpha_u} \cdot (-1)^{l(u)} \cdot C_u$$

ist.

Wir betrachten nun ein Paar $(d', z') \in \mathcal{D} \times W$ mit $d' \sim_\mathbb{L} z'$. Da $\mathcal{H}$ vom Typ A ist, können wir Theorem VI.(3.5) und Theorem VI.(3.7) bzw. Korollar VI.(3.8) anwenden. Es gibt also genau ein $v \in \Lambda$ mit $v \sim_\mathbb{R} d'$ und genau ein $w \in \Lambda$ mit $w \sim_\mathbb{R} z'$. Man betrachtet nämlich das Bild $(P(d'), P(d'^{-1}))$ von d' unter der Robinson-Schensted-Abbildung und ersetzt darin die erste Komponente $P(d')$ durch das Standardtableau derselben Gestalt, das zu der Linkszelle in Λ gehört, die in der zweiseitigen Zelle zu dieser Gestalt liegt. Das Urbild dieses neuen Paares unter der Robinson-Schensted-Abbildung ist dann v , und für z' verfährt man genauso.

Aus $d' \sim_{\mathcal{L}} z'$ folgt insbesondere $d' \sim_{\mathcal{L}} z'$ und damit $v \sim_{\mathcal{L}} w$ (weil $v, w \in \Lambda$ liegen und in derselben zweiseitigen Zelle). Nun folgt aus Korollar VI.(4.2), dass $C'_v D'_{w^{-1}} = C'_{d'} D'_{z'^{-1}}$ ist, dass also insbesondere

$$h'_{u,d',z'} = \tau(C'_u \cdot C'_{d'} D'_{z'^{-1}}) = \tau(C'_u \cdot C'_v D'_{w^{-1}}) = h'_{u,v,w} \quad \text{für alle } u \in W$$

gilt. Also ist

$$\sum_{u \in W} \alpha_u \cdot h'_{u,d',z'} = \sum_{u \in W} \alpha_u \cdot h'_{u,v,w} = \delta_{v,d} \cdot \delta_{w,z} = \overline{\sum_{u \in W} \alpha_u \cdot h'_{u,d',z'}}.$$

Diese Summe ist also im Fall $v = d$ und $w = z$ gleich Eins, und gleich Null für alle anderen Paare $(v, w) \in \Lambda \times \Lambda$ mit $v \sim_{\mathcal{L}} w$.

Das Bild von d' unter der Robinson-Schensted-Abbildung (siehe VI.(3.5)) ist $(P(d'), P(d'^{-1})) = (P(d'), P(d'))$, denn d' ist eine Involution. Wegen $v \sim_{\mathcal{L}} d'$ ist das Bild von v unter der Robinson-Schensted-Abbildung gleich $(P(v), P(v^{-1})) = (P(v), P(d'))$.

Liegt d' nicht in Λ , dann ist v nicht in derselben Linkszelle wie d' , also ist $P(v) \neq P(d')$ wegen Theorem VI.(3.7). Dann ist aber v keine Involution, da das Bild von v unter der Robinson-Schensted-Abbildung zwei verschiedene Komponenten hat. Also ist $v \neq d$.

Liegt dagegen d' in Λ , dann ist $v = d'$ und $w = z'$, da in diesem Fall auch $z' \in \Lambda$ ist.

Der Fall $(v, w) = (d, z)$ tritt damit genau für den Fall ein, dass $(d', z') = (d, z)$ selbst ist.

Damit ist gezeigt, dass

$$(\phi \circ j)(c_{\chi_i}^{-1} \cdot C'_z D'_{d^{-1}}) = (-1)^{l(d)+l(z)} \cdot t_z$$

ist.

Nun folgt aber wegen $j(C'_z D'_{d^{-1}}) = (-1)^{l(z)+l(d)} \cdot C_z D_{d^{-1}}$ (siehe VI.(5.2)) die Behauptung, dass

$$\phi(\overline{c_{\chi_i}^{-1}} \cdot C_z D_{d^{-1}}) = t_z$$

ist. □

(5.6) Bemerkung (Neue Interpretation des Lusztig-Homomorphismus)

Die Resultate in diesem Kapitel (insbesondere VI.(5.5)) ergeben eine neue Interpretation des Lusztig-Homomorphismus für Typ A: Bis auf Verzerrungen mit Automorphismen des Grundrings und der Involution j sind die Urbilder der t-Basis der asymptotischen Algebra $\mathcal{J}$ unter dem Lusztig-Homomorphismus ϕ genau die Elemente der Wedderburn-Basis von $K\mathcal{H}$. Da ϕ ein A -Algebren-Homomorphismus ist, der bei Konstantenerweiterung zum Quotientenkörper K ein Isomorphismus wird (siehe [Lus87b, Theorem 2.8], dies folgt aber auch aus der Surjektivität mit VI.(5.5)), ist der Lusztig-Homomorphismus $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}$ nichts Anderes als die Einbettung von $\mathcal{H}$ in das A -Erzeugnis der Wedderburn-Basis aus VI.(4.4). Dies wird im folgenden Diagramm deutlich:

$$\begin{array}{ccc} K\mathcal{H} & \xrightarrow[\text{Isomorphismus}]{\text{id}_K \otimes (\phi \circ j)} & K\mathcal{J} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{L} & \xrightarrow[\text{Isomorphismus}]{\text{id}_K \otimes (\phi \circ j)|_{\mathcal{L}}} & \mathcal{J} \\ & \nwarrow \phi \circ j \quad \nearrow & \\ & \mathcal{H} & \end{array} \quad \text{mit } \mathcal{L} = \langle c_{\chi_i}^{-1} C'_x D'_{y^{-1}} \mid 1 \leq i \leq r \text{ und } x, y \in \Lambda_i \rangle_A.$$

Damit wird etwas klarer, warum ϕ an so vielen Stellen in der Literatur gewinnbringend für darstellungstheoretische Fragen eingesetzt werden konnte (vgl. z.B. [Lus87c], [Lus87a] und [GR01]).

Es sieht so aus, als ob man mit Hilfe der C-Basis an Stelle der C'-Basis analog zu VI.(4.1) bis VI.(4.4) eine Wedderburn-Zerlegung erhalten könnte, die dann direkt zur Definition des Lusztig-Homomorphismus passt. Außerdem scheint man umgekehrt mit der C'-Basis eine zur asymptotischen Algebra analoge Konstruktion durchführen zu können, die dann zu einer Definition eines Homomorphismus von A -Algebren führen würde, die direkt zur Einbettung in unsere Wedderburn-Zerlegung auf Grundlage der C'-Basis passen würde.

VI.6 Parabolische Unteralgebren und Induktion von Zellmoduln

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Bildung von Zellmoduln insofern mit der Induktion von parabolischen Unteralgebren verträglich ist, als von Zellmoduln induzierte Moduln wieder Zellmoduln sind. Welche dies genau sind, lässt sich kombinatorisch beschreiben.

(6.1) Definition/Proposition (Parabolische Unteralgebren, siehe [GP00, 4.4.7])

Es gelten die Voraussetzungen aus VI.(1.4). Es sei $J \subseteq S$ und $W_J \subseteq W$ die entsprechende parabolische Untergruppe der Coxetergruppe W (siehe Definition VI.(3.11)).

Es sei $\mathcal{H}_J$ das A -Erzeugnis der T_w mit $w \in W_J$. Dann ist $\mathcal{H}_J$ eine Unteralgebra von $\mathcal{H}$ mit demselben Einselement. Wir nennen $\mathcal{H}_J$ eine **parabolische Unteralgebra**. Sie ist kanonisch isomorph zur Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}_A(W_J, J, (a_s)_{s \in J})$.

Beweis: Siehe [GP00, 4.4.7]. □

(6.2) Lemma (Deodhars Lemma, siehe [GP00, 2.1.2])

Es sei (W, S) ein Coxetersystem, $J \subseteq S$ und X_J die Menge der ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertreter (siehe VI.(3.12)). Weiter sei $x \in X_J$ einer dieser ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertreter und $s \in S$. Dann ist entweder $xs \in X_J$ oder $xs = ux$ für ein $u \in J$.

Beweis: Siehe [GP00, 2.1.2]. □

Bemerkung: Daraus folgt, dass die ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertreter X_J eine Schreier-Transversale bilden, dass man also die Elemente von X_J in einem Baum anordnen kann mit 1_W an der Wurzel, bei dem jeder Nachfolger durch Rechtsmultiplikation mit einem $s \in S$ aus seinem Vorgänger hervorgeht. Anders gesagt ist jeder Anfang einer reduzierten Darstellung eines ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertreters wieder ein solcher. Dieser Tatsache werden wir uns im Folgenden bedienen.

(6.3) Bemerkung (Kazhdan-Lusztig-Basis für parabolische Unteralgebra)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Weiter sei $J \subseteq W$ und $\mathcal{H}_J$ die zugehörige parabolische Unteralgebra. Wie schon in VI.(6.1) angemerkt ist $\mathcal{H}_J$ dann selbst eine generische Iwahori-Hecke-Algebra zum Coxetersystem (W_J, J) . Entsprechend hat sie auch eine Kazhdan-Lusztig-Basis. Da die Involution in VI.(2.3) auf $\mathcal{H}_J$ dieselbe ist, egal, ob man die von $\mathcal{H}$ kommende einschränkt oder die von $\mathcal{H}_J$ kommende benutzt, ist die Kazhdan-Lusztig-Basis von $\mathcal{H}_J$ einfach eine Teilmenge der Kazhdan-Lusztig-Basis von $\mathcal{H}$. Wir erhalten also die Elemente der Kazhdan-Lusztig-Basis von $\mathcal{H}_J$ als $(C'_w)_{w \in W_J}$.

Sämtliche Ergebnisse, die in VI.(2.4) bis VI.(2.12) zitiert werden, gelten auch für $\mathcal{H}_J$. Insbesondere gibt es auch die Relationen „ $\leq_L$ “ und „ $\leq_R$ “ auf $\mathcal{H}_J$. Zur Unterscheidung bezeichnen wir zunächst mit „ $\leq_L^J$ “ (bzw. „ $\leq_R^J$ “) die Relation auf W_J , die über $\mathcal{H}_J$ definiert ist und mit „ $\leq_L$ “ (bzw. „ $\leq_R$ “) die Relation auf W (auch wenn wir sie für Elemente $y, w \in W_J \subseteq W$ anwenden).

Es ist zunächst nicht klar, ob die von W auf W_J eingeschränkten Relationen dieselben sind wie die direkt von $\mathcal{H}_J$ kommenden. Innerhalb von $\mathcal{H}_J$ sind „ $\leq_L^J$ “ und „ $\leq_R^J$ “ identisch, da die Kazhdan-Lusztig-Basiselemente dieselben sind und die C'_s für $s \in S \setminus J$ bei Multiplikation aus $\mathcal{H}_J$ herausführen. Es könnte aber auf den ersten Blick für $y, w \in W_J$ ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Kette $y_1, \dots, y_k \in W$ mit $y \leq_L^J y_1 \leq_L^J \dots \leq_L^J y_k \leq_L^J w$ geben, so dass $y \leq_L w$ gilt, aber nicht $y \leq_L^J w$!

Dies ist aber durch das folgende Theorem unmöglich, so dass wir im Folgenden auf die Unterscheidung zwischen „ $\leq_L$ “ und „ $\leq_L^J$ “ (bzw. „ $\leq_R$ “ und „ $\leq_R^J$ “) wieder verzichten können.

(6.4) Theorem (Verträglichkeit von „ $\leq_L$ “ und „ $\leq_R$ “ zu parabolischen Unteralgebren)

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Weiter sei $J \subseteq W$ und $\mathcal{H}_J$ die zugehörige parabolische Unteralgebra. Es sei X_J das System von ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertretern aus VI.(3.12) und „ $\leq_R$ “ die Relation aus VI.(2.9) auf W und „ $\leq_R^J$ “ die entsprechende auf W_J .

Sind $y, w \in W$ mit $y \leq_R w$ und ist $y = y' \cdot x_y$ und $w = w' \cdot x_w$ mit $y', w' \in W_J$ und $x_y, x_w \in X_J$, dann gilt $y' \leq_R^J w'$.

Beweis: Siehe [BV83, Corollary 3.7] oder [Gec]. $\square$

Bemerkungen:

- Das Analoge gilt für „ $\leq_L$ “ und die ausgezeichneten Linksnebenklassenvertreter.
- Der Beweis basiert auf einer Übersetzung der Relation „ $\leq_L$ “ auf den Linkszellen von $\mathcal{H}$ in die Theorie der primitiven Ideale gewisser einhüllender Algebren. Diese Übersetzung verwendet die Kazhdan-Lusztig-Vermutung, die von Brylinski und Kashiwara (siehe [BK81]) und unabhängig von Beilinson und Bernstein (siehe [BB81]) bewiesen wurde.
- Erst in [Gec] ist ein elementarer Beweis im Rahmen von Iwahori-Hecke-Algebren zu finden.
- Siehe auch [Lus84, Referenzen nach Theorem 5.25].

(6.5) Theorem (Induktion von Zellmoduln, vgl. [BV83, Proposition 3.15] bzw. [Lus84, (5.26.1)])

Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Weiter sei $J \subseteq W$ und $\mathcal{H}_J$ die zugehörige parabolische Unteralgebra. Es sei X_J das System von ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertretern aus VI.(3.12) und „ $\leq_R$ “ die Relation aus VI.(2.9).

Weiter sei $\Lambda \subseteq W_J$ eine nach unten abgeschlossene Vereinigung von Rechtszellen von $\mathcal{H}_J$, es seien also mit jeder Rechtszelle $\Gamma \subseteq \Lambda$ auch alle Rechtszellen Γ' mit $\Gamma' \leq_R \Gamma$ in Λ enthalten.

Dann ist $\Lambda X_J \subseteq W$ eine nach unten abgeschlossene Vereinigung von Rechtszellen von $\mathcal{H}$ und es gilt

$$RC_{\mathcal{H}}^{(\Lambda X_J)} \cong \text{Ind}_{\mathcal{H}_J}^{\mathcal{H}} RC_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)} := RC_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)} \otimes_{\mathcal{H}_J} \mathcal{H} \quad \text{als } \mathcal{H}\text{-Moduln,}$$

wobei der Index $\mathcal{H}_J$ andeutet, dass der Zellmodul bezüglich der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}_J$ gemeint ist.

Bemerkung: In [Lus84, (5.26.1)] steht ein entsprechendes Ergebnis für Moduln für die Gruppenalgebra $\mathbb{Q}W$.

Beweis: Wir fixieren für jedes $x \in X_J$ einen festen reduzierten Ausdruck $x = s_1^{(x)} \cdot \dots \cdot s_{l(x)}^{(x)}$ mit $s_i^{(x)} \in S$ für $1 \leq i \leq l(x)$ so, dass für alle $1_W \neq x \in X_J$ mit $t := s_{l(x)}^{(x)}$ für den Ausdruck $x \cdot t = s_1^{(xt)} \cdot \dots \cdot s_{l(xt)}^{(xt)}$ gilt, dass $s_j^{(xt)} = s_j^{(x)}$ für $1 \leq j \leq l(x) - 1$ ist. Dies geht, da nach Deodhars Lemma VI.(6.2) jeder solche Anfang wieder ein ausgezeichneter Rechtsnebenklassenvertreter ist und man induktiv von den kurzen zu den langen Elementen von X_J die reduzierten Ausdrücke wählen kann (vergleiche [GP00, 2.1.2, Algorithm B]).

Wir führen nun einige abkürzende Bezeichnungen ein: Es sei $l \in \mathbb{N}$ die größte Länge eines ausgezeichneten Rechtsnebenklassenvertreters. Wir setzen für $0 \leq i \leq l$:

$$I^{(i)} := \langle C'_{w' \cdot x} \mid w' \in \Lambda \text{ und } x \in X_J \text{ und } l(x) \leq i \rangle_A \subseteq \mathcal{H},$$

wobei $\langle - \rangle_A$ für das Erzeugnis als A -Unterm modul von $\mathcal{H}$ steht.

Fasst man $I^{(0)} \subseteq \mathcal{H}_J \subseteq \mathcal{H}$ als A -Unterm modul von $\mathcal{H}_J$ auf, dann ist es ein Rechtsideal und als $\mathcal{H}_J$ -Gitter isomorph zu $RC_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)}$, da Λ nach unten abgeschlossen ist.

Für $w' \in \mathcal{H}_J$ und $x \in X_J$ sei

$$\tilde{C}(w', 1_W) := C'_{w'} \quad \text{und} \quad \tilde{C}(w', x) := C'_{w'} \cdot C'_{s_1^{(x)}} \cdot \dots \cdot C'_{s_{l(x)}^{(x)}} \in \mathcal{H}.$$

Wir setzen für $0 \leq i \leq l$:

$$\tilde{I}^{(i)} := \langle \tilde{C}(w', x) \mid w' \in \Lambda \text{ und } x \in X_J \text{ und } l(x) \leq i \rangle_A \subseteq \mathcal{H}.$$

Um Spezialfälle zu vermeiden, setzen wir $I^{(-1)} = \tilde{I}^{(-1)} := \{0\}$.

Wir beweisen nun gleichzeitig induktiv die folgenden drei Aussagen für $0 \leq i \leq l$:

- (a_i) $\tilde{C}(w', x) - C'_{w'x} \in I^{(i-1)}$ für alle $w' \in \Lambda$ und alle $x \in X_J$ mit $l(x) = i$.
 (b_i) $\tilde{I}^{(i)} = I^{(i)}$.
 (c_i) $I^{(i-1)} \cdot C'_s \subseteq I^{(i)}$ für alle $s \in S$.

Wir betrachten zunächst die drei Aussagen für $i = 0$:

Es sei $w' \in \Lambda$. Nach Definition ist $\tilde{C}(w', 1_W) = C'_{w'}$, also ist für (a₀) nichts zu zeigen. Die Aussage (b₀) folgt sofort und Aussage (c₀) ist klar, da $I^{(-1)} = \{0\} \subseteq I^{(0)}$ ist.

Es sei nun $1 \leq j \leq l$ und die drei Aussagen für alle $i < j$ bereits bewiesen. Es sei $w' \in \Lambda$ und $x \in X_J$ mit $l(x) = j - 1$ und $s \in S$ mit $xs \in X_J$ und $l(xs) = j$. Zusätzlich seien x und s so gewählt, dass in dem oben fixierten reduzierten Ausdruck für xs der Erzeuger s ganz rechts steht (jedes Element von X_J der Länge j kann so erreicht werden wegen der Bemerkungen nach Lemma VI.(6.2)). Dann ist $w'xs > w'x$ und es folgt mit Gleichung VI.3:

$$C'_{w'x} \cdot C'_s = C'_{w'xs} + \sum_{\substack{y < w'x \\ l(y) \neq l(w'x) \\ ys < y}} \mu(y, w'x) \cdot C'_y. \quad (\text{VI.7})$$

Alle C'_y , die in dieser Summe mit $\mu(y, w'x) \neq 0$ vorkommen, liegen in $I^{(j-1)}$: Jedes $y \in W$, das in der Summe vorkommt, ist nämlich Bruhat-kleiner als $w'x$ und es gilt $ys < y$. Schreibt man also w' und x als reduzierte Ausdrücke und hängt diese zusammen, dann erhält man einen reduzierten Ausdruck für $w'x$ (siehe Proposition VI.(3.12)) und y ist gleich einem Teilausdruck (siehe VI.(1.2)). Deswegen gilt: Ist $y = y'z$ mit $y' \in W_J$ und $z \in X_J$, dann ist $l(z) < l(x)$, da sonst $z = x$ und damit $ys > y$ wäre. Da offensichtlich $y \leq_R w'x$ ist (es gilt ja sogar $y \leq_R w'x$), folgt mit Theorem VI.(6.4), dass $y' \leq_R w'$, also $y' \in \Lambda$ ist, weil Λ nach unten abgeschlossen ist.

Nun folgt die Aussage (a_j) sofort:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(w', xs) - C'_{w'xs} &= \tilde{C}(w', xs) - C'_{w'x} \cdot C'_s + C'_{w'x} \cdot C'_s - C'_{w'xs} \\ &= \underbrace{(\tilde{C}(w', x) - C'_{w'x}) \cdot C'_s}_{\in I^{(j-2)} \text{ wg. (a}_{j-1}\text{)}} + \underbrace{\sum_{\substack{y < w'x \\ l(y) \neq l(w'x) \\ ys < y}} \mu(y, w'x) \cdot C'_y}_{\in I^{(j-2)} \subseteq I^{(j-1)} \text{ wg. Gl. VI.7}} \\ &\in I^{(j-1)} \text{ wg. (c}_{j-1}\text{)} \end{aligned}$$

Hier haben wir die Aussagen (a_{j-1}) und (c_{j-1}) für den ersten Teil und die Gleichung VI.7 mit den Argumenten danach für den zweiten Teil benutzt.

Die Aussage (b_j) folgt nun direkt aus (a_j) und (b_{j-1}), da sich die Elemente, die von $\tilde{I}^{(j-1)}$ nach $\tilde{I}^{(j)}$ als Erzeuger hinzukommen, von den Elementen, die von $I^{(j-1)}$ nach $I^{(j)}$ als Erzeuger hinzukommen, jeweils um ein Element aus $I^{(j-1)} = \tilde{I}^{(j-1)}$ unterscheiden.

Es bleibt, die Aussage (c_j) zu beweisen: Ist $w' \in \Lambda$ und $x \in X_J$ mit $l(x) = j - 1$, dann ist für jedes $s \in S$ entweder $w'xs > w'x$ oder $w'xs < w'x$. In ersterem Fall können wir wieder Gleichung VI.7 betrachten, die Summe darin liegt nach den Argumenten von oben in $I^{(j-1)}$, also bleibt noch $C'_{w'xs} \in I^{(j)}$ zu zeigen. Ist $xs \in X_J$, dann ist $C'_{w'xs} \in I^{(j)}$, ansonsten gibt es nach dem Lemma von Deodhar VI.(6.2) ein $u \in J$ mit $xs = ux$, so dass $w'xs = w'ux \in W_J x$ ist. Da wieder aus $w'xs = w'ux \leq_R w'x$ mit Theorem VI.(6.4) folgt, dass $w'u \leq_R w'$ und damit $w'u \in \Lambda$ ist, liegt also $C'_{w'x} \cdot C'_s$ in jedem Fall in $I^{(j)}$. Diese Argumentation funktioniert auch dann, wenn der oben fixierte reduzierte Ausdruck für $xs \in X_J$ **nicht** auf s endet.

Im zweiten Fall $w'xs < w'x$ ist laut Gleichung VI.3 das Produkt $C'_{w'x} \cdot C'_s = (v^{1/2} + v^{-1/2}) \cdot C_{w'x} \in I^{(j)}$ und damit die Aussage (c_j) gezeigt.

Durch Induktion sind damit (a_i) bis (c_i) für $0 \leq i \leq l$ bewiesen.

Ist $w' \in \Lambda$ und $x \in X_J$ mit $l(x) = l$, dann gibt es kein $s \in S$ mit $xs > x$ und $xs \in X_J$. Damit funktioniert die obige Argumentation für (c_j) auch noch für $j = l + 1$ und zeigt sogar, dass $I^{(l)}$

ein $\mathcal{H}$ -Modul ist. Der Rang von $I^{(l)}$ als freier A -Modul ist gleich dem Rang von $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)}$ multipliziert mit der Anzahl der Elemente von X_J , also dem Index von W_J in W . Da $I^{(l)}$ als A -Modul von einer Teilmenge einer A -Basis von $\mathcal{H}$ erzeugt wird (indiziert durch ΛX_J), ist es ein reiner A -Untermodul von $\mathcal{H}$.

Für alle Elemente in ΛX_J gilt, dass sie $\leq_R$ -kleiner oder gleich einem Element aus Λ sind, da für $w' \in \Lambda$ und $x \in X_J$ mit $x = s_1^{(x)} \cdot \dots \cdot s_{l(x)}^{(x)}$

$$w'x \leq_R w's_1^{(x)} \cdot \dots \cdot s_{l(x)-1}^{(x)} \leq_R \dots \leq_R w's_1^{(x)} \leq_R w'$$

gilt (man beachte, dass die einzelnen $s_j^{(x)}$ das Wort jeweils länger machen und deshalb mit Gleichung VI.3 und Definition VI.(2.9) sofort $w's_1^{(x)} \cdot s_j^{(x)} \leq_R w's_1^{(x)} \cdot s_{j-1}^{(x)}$ für $1 \leq j \leq l(x)$ folgt).

Andererseits kann dies für kein Element von $W \setminus \Lambda X_J$ gelten, da $I^{(l)}$ ein $\mathcal{H}$ -Untermodul von $\mathcal{H}$ ist und wir das Kriterium in VI.(2.11) benutzen können. Also ist ΛX_J der $\leq_R$ -Abschluss nach unten von Λ in $\mathcal{H}$ und ΛX_J ist eine nach unten abgeschlossene Vereinigung von Rechtszellen von $\mathcal{H}$. Dementsprechend können wir überhaupt von $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}}^{(\Lambda X_J)}$ reden und es ist $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}}^{(\Lambda X_J)} = I^{(l)}$.

Da aber $\mathcal{H}_J$ laut VI.(6.1) eine Unterálgebra von $\mathcal{H}$ ist und $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)}$ ein Rechtsideal in $\mathcal{H}_J$ ist, können wir Letzteres als Teilmenge von $\mathcal{H}$ auffassen. Mit dieser Einbettung ist der induzierte Modul $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)} \otimes_{\mathcal{H}_J} \mathcal{H}$ dann isomorph zum $\mathcal{H}$ -Erzeugnis von $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)}$ in $\mathcal{H}$.

Dieses ist aber gleich $\tilde{I}^{(l)}$, da die C'_s ganz $\mathcal{H}$ als Álgebra erzeugen. Damit sind alle Behauptungen bewiesen. $\square$

(6.6) Korollar (Induktion von Zellmoduln, vgl. [BV83, Proposition 3.15] bzw. [Lus84, (5.26.1)])

Es gelten dieselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in VI.(6.5) mit dem Unterschied, dass Λ nur eine $\leq_R$ -konvexe Vereinigung von Rechtszellen von $\mathcal{H}_J$ sein muss.

Dann ist $\Lambda X_J \subseteq W$ eine $\leq_R$ -konvexe Vereinigung von Rechtszellen von $\mathcal{H}$ und es gilt

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{H}}^{(\Lambda X_J)} \cong \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_J}^{\mathcal{H}} \mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)} := \mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)} \otimes_{\mathcal{H}_J} \mathcal{H} \quad \text{als } \mathcal{H}\text{-Moduln,}$$

wobei der Index $\mathcal{H}_J$ andeutet, dass der Zellmodul bezüglich der Iwahori-Hecke-Álgebra $\mathcal{H}_J$ gemeint ist.

Beweis: Dass Λ $\leq_R$ -konvex ist, bedeutet, dass eine nach unten abgeschlossene Vereinigung Γ von Rechtszellen von $\mathcal{H}_J$ existiert, so dass $\Gamma \cup \Lambda$ bezüglich „ $\leq_R$ “ nach unten abgeschlossen und $\Gamma \cap \Lambda = \emptyset$ ist. Wenden wir nun Theorem VI.(6.5) auf $\Gamma \cup \Lambda$ und auf Γ an, so folgt, dass

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{H}}^{((\Gamma \cup \Lambda)X_J)} \cong \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_J}^{\mathcal{H}} \mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Gamma \cup \Lambda)} \quad \text{und} \quad \mathrm{RC}_{\mathcal{H}}^{(\Gamma X_J)} \cong \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_J}^{\mathcal{H}} \mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Gamma)}$$

als $\mathcal{H}$ -Moduln ist. Es ist $\Lambda X_J = ((\Gamma \cup \Lambda)X_J) \setminus (\Gamma X_J)$ und damit $\leq_R$ -konvex.

Da aber $\mathcal{H}$ als Links- $\mathcal{H}_J$ -Modul frei und damit projektiv ist (siehe [GP00, 4.4.7]), ist $\mathcal{H}$ als Links- $\mathcal{H}_J$ -Modul auch flach (siehe [CR81, (2.28)]), also ist Induzieren ein exakter Funktor. Da sowohl das $\mathcal{H}_J$ -Ideal $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Gamma)}$ im $\mathcal{H}_J$ -Ideal $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Gamma \cup \Lambda)}$ als auch das $\mathcal{H}$ -Ideal $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}}^{(\Gamma X_J)}$ im $\mathcal{H}$ -Ideal $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}}^{((\Gamma \cup \Lambda)X_J)}$ ein A -reiner A -Untermodul ist, folgt auch für die Faktormoduln $\mathrm{RC}_{\mathcal{H}}^{(\Lambda X_J)} \cong \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_J}^{\mathcal{H}} \mathrm{RC}_{\mathcal{H}_J}^{(\Lambda)}$. $\square$

VI.7 Projektive Zellmoduln

In VI.(2.12) sind die Zellmoduln zunächst für generische Iwahori-Hecke-Algebren definiert. Spezialisieren wir die Algebra, so erhalten wir aber mit derselben Methode Zellmoduln für die spezialisierte Algebra. Da diese im Allgemeinen nicht halbeinfach ist (siehe z.B. VI.(3.4) für Typ A), sind nicht mehr alle einfachen Moduln projektiv und die projektiv unzerlegbaren sind besonders interessant für die Darstellungstheorie.

Induziert man projektive Moduln von parabolischen Unteralgebren, erhält man wieder projektive (benutze I.(1.4) und, dass eine Iwahori-Hecke-Algebra frei als Modul für ihre parabolischen Unteralgebren ist).

Insofern geben die Ergebnisse des letzten Abschnitts Anlass zur Hoffnung, dass unter den Zellmoduln spezialisierter Iwahori-Hecke-Algebren zumindest diejenigen projektiven Moduln zu finden sind, die man durch sukzessives Induzieren von parabolischen Unteralgebren erreichen kann.

Es zeigt sich nun in Beispielrechnungen mit dem Computer, dass sogar noch mehr projektive Moduln unter den Zellmoduln sind als erwartet.

In diesem Abschnitt wird ein solches Beispiel vorgestellt.

(7.1) Das Poset der Rechtszellen für Typ A_4

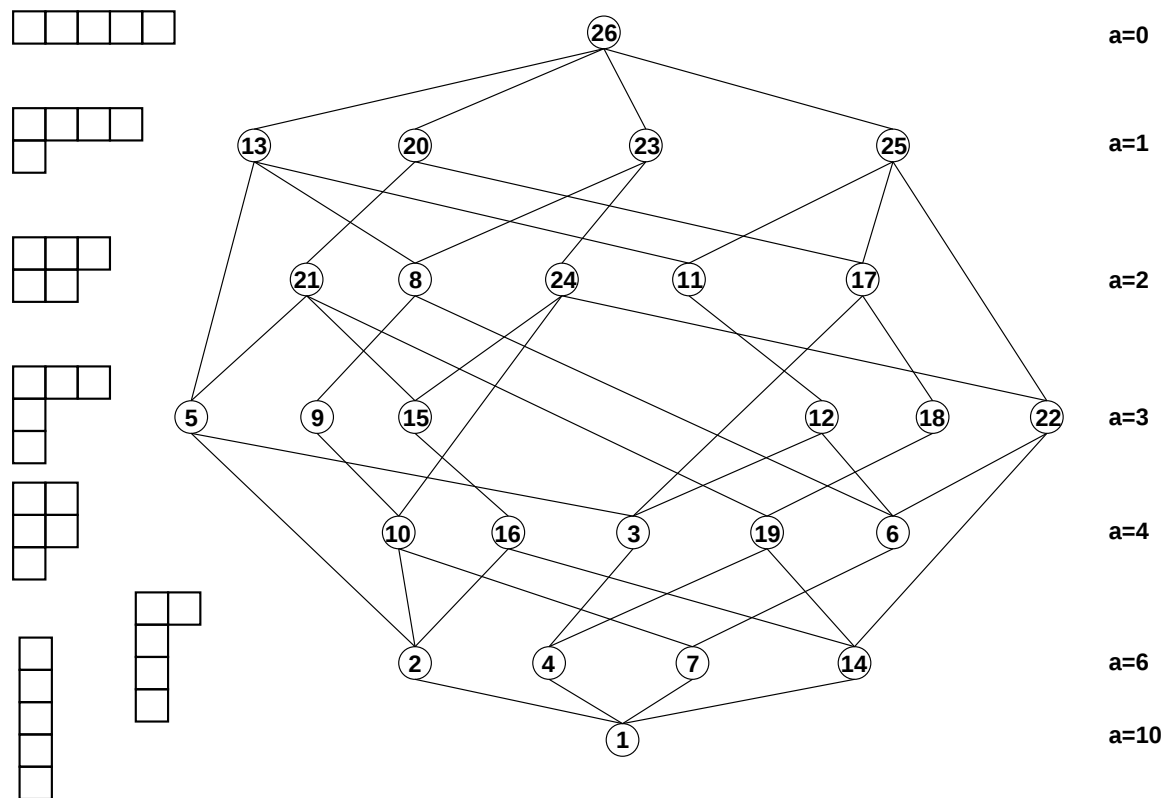
Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in VI.(2.1) bis VI.(2.3) und $(C'_w)_{w \in W}$ sei die Basis aus VI.(2.4). Das Coxetersystem (W, S) und damit $\mathcal{H}$ sei vom Typ A_4 .

In diesem Fall zerfällt die Weylgruppe W in 26 Rechtszellen, deren Nummerierung wir festlegen, indem wir in der folgenden Tabelle VI.2 für jede Rechtszelle ein darin enthaltenes Gruppenelement angeben (genauer sogar die Duflo-Involution aus VI.(5.3)).

Rechtszelle	Enthaltene Duflo-Involution	Rechtszelle	Enthaltene Duflo-Involution
1	$s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_4 s_3 s_2 s_1$	14	$s_2 s_3 s_2 s_4 s_3 s_2$
2	$s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1$	15	$s_2 s_3 s_2$
3	$s_1 s_2 s_1 s_4$	16	$s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_4 s_3 s_2$
4	$s_1 s_2 s_1 s_3 s_4 s_3 s_2 s_1$	17	$s_2 s_4$
5	$s_1 s_2 s_1$	18	$s_2 s_3 s_4 s_3 s_2$
6	$s_1 s_3 s_4 s_3$	19	$s_2 s_1 s_3 s_4 s_3 s_2$
7	$s_1 s_2 s_3 s_2 s_4 s_3 s_2 s_1$	20	s_2
8	$s_1 s_3$	21	$s_2 s_1 s_3 s_2$
9	$s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$	22	$s_3 s_4 s_3$
10	$s_1 s_3 s_2 s_1 s_4 s_3$	23	s_3
11	$s_1 s_4$	24	$s_3 s_2 s_4 s_3$
12	$s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_2 s_1$	25	s_4
13	s_1	26	id_W

Tabelle VI.2: Identifikation der Rechtszellen beim Typ A_4

Im folgenden Bild VI.3 ist das Hasse-Diagramm des Posets der Rechtszellen für die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_4 abgebildet. Die Vertizes entsprechen den 26 Rechtszellen, die durchnummeriert sind. Weiter unten liegende Zellen sind kleiner als weiter oben liegende bezüglich „ $\leq_R$ “, wenn sie durch eine Linie verbunden sind. Die auf gleicher Höhe angeordneten Rechtszellen liegen in einer gemeinsamen zweiseitigen Zelle. Am linken Rand ist für jede zweiseitige Zelle die Partition als Young-Diagramm abgebildet, die dem Isomorphietyp der einfachen Rechts-Zellmoduln darin entsprechen (siehe VI.(3.3) bzw. VI.(3.9)). Am rechten Rand sind für jede zweiseitige Zelle die a -Werte (siehe VI.(5.3)) der Weylgruppenelemente aufgeführt.

Abbildung VI.3: Poset der Rechtszellen für Typ A_4

Die Zelleinteilung und -Anordnung wurde mit dem CHEVIE-Paket (siehe [GHL⁺96]) unter dem Computer-Algebra-System GAP3 (siehe [S⁺95]) berechnet und das Poset wurde mit dem XGAP4-Paket (siehe [CN99]) unter GAP4 (siehe [GAP02]) gezeichnet.

(7.2) Spezialisierung mit $e = 3$ und $\ell = 7$

Wir spezialisieren nun die generische Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ vom Typ A_4 zu derjenigen über dem Körper $\mathbb{F}_7$ mit sieben Elementen und Parameter $u \in \mathbb{F}_7$, so dass u Ordnung 3 hat (d.h. $e = 3$ und $\ell = 7$ im Sinne von Kapitel VII). Genauer gesagt benutzen wir den Ringhomomorphismus $\theta : A \rightarrow \mathbb{F}_7$, der die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_7$ fortsetzt und $v^{1/2}$ auf $\theta(3)$ (in GAP ist das $Z(7)$) abbildet, ein Element der Ordnung 6 in $\mathbb{F}_7 \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (vergleiche Abschnitt V.(2.2)).

Die zugehörige Zerlegungsabbildung d_θ lässt sich dann durch die Zerlegungsmatrix in Tabelle VI.3 beschreiben.

Partitionen	3-reguläre:	5	4,1	3,2	3,1,1	2,2,1	
	Dimension	1	4	1	6	4	
5	1	1					Indexdarstellung
4,1	4	·	1				
3,2	5	·	1	1			
3,1,1	6	·	·	·	1		
2,2,1	5	1	·	·	·	1	
2,1,1,1	4	·	·	·	·	1	
1,1,1,1,1	1	·	·	1	·	·	Signumsdarstellung

Tabelle VI.3: Zerlegungsmatrix für Typ A, $e = 3$, $\ell = 7$

Darin sind die Zeilen durch die Isomorphietypen der einfachen Moduln von $K\mathcal{H}$ indiziert, wobei jeweils die zugehörige Partition (siehe VI.(3.3) bzw. VI.(3.9)) und die Dimension angegeben ist. Die Spalten sind durch die Isomorphietypen der einfachen Moduln der spezialisierten Algebra $\mathbb{F}_7\mathcal{H}$ indiziert, wobei ebenfalls die zugehörige e -reguläre Partition (siehe VI.(3.4)) und die Dimension angegeben sind. In jeder Zeile stehen die Vielfachheiten, mit denen die einfachen Moduln von $\mathbb{F}_7\mathcal{H}$ in einer Reduktion $\mathbb{F}_7 \otimes_A \mathrm{RC}^{(\Sigma)}$ eines einfachen Zellmoduls $\mathrm{RC}^{(\Sigma)}$ zu einer Rechtszelle Σ vom entsprechenden Typ als Konstituenten vorkommen.

Diese Zerlegungsmatrix wurde mit dem GAP3-Paket Specht von Andrew Mathas (siehe [Mat97]) berechnet.

(7.3) Projektive Moduln

Mit Hilfe von Brauer-Reziprozität (siehe Theorem V.(4.1) und die daran anschließende Bemerkung) können wir nun aus der Zerlegungsmatrix Informationen über die projektiv unzerlegbaren $\mathbb{F}_7\mathcal{H}$ -Moduln ablesen. Ist nämlich $\mathcal{O}$ mit $A \subseteq \mathcal{O} \subseteq K$ ein geeigneter Ring (siehe V.(2.3)), so dass $\mathcal{O}\mathcal{H}$ semiperfekt ist, dann gibt es zu jedem projektiv unzerlegbaren $\mathbb{F}_7\mathcal{H}$ -Modul P eine „Hebung“, also einen $\mathcal{O}\mathcal{H}$ -Modul $\tilde{P}$ mit $P \cong \mathbb{F}_7 \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{P}$. Die Spalten der Zerlegungsmatrix können nun wie folgt interpretiert werden:

Ist P ein projektiv unzerlegbarer $\mathbb{F}_7\mathcal{H}$ -Modul mit einfachem Kopf V (siehe IV.(2.4)), dann stehen in der Spalte, die zum einfachen Modul V gehört, die Vielfachheiten, mit denen die einfachen $K\mathcal{H}$ -Moduln als Konstituenten in einem Modul $K\tilde{P}$ mit $P \cong \mathbb{F}_7 \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{P}$ vorkommen.

Es gibt also einen projektiv unzerlegbaren $\mathbb{F}_7\mathcal{H}$ -Modul P , dessen $K\tilde{P}$ in dieser Weise als Konstituenten jeweils einmal einen Einfachen zur Partition $(2, 2, 1)$ und einen zur Partition $(2, 1, 1, 1)$ enthält. Es sei nun Σ_i für $1 \leq i \leq 26$ jeweils die Rechtszelle mit Nummer i .

Betrachtet man den Zellmodul $\mathrm{RC}^{(\Sigma_{19} \cup \Sigma_{14})}$ und seine Reduktion $\mathbb{F}_7 \otimes_A \mathrm{RC}^{(\Sigma_{19} \cup \Sigma_{14})}$, dann kann man mit dem Computer nachrechnen, dass dieser ein projektiv unzerlegbarer $\mathbb{F}_7\mathcal{H}$ -Modul ist.

Analoges gilt für den Zellmodul $\mathrm{RC}^{(\Sigma_{23} \cup \Sigma_{24})}$ und für viele weitere Beispiele von Zellmoduln, auch für andere Typen als Typ A.

Leider wird der Rechenaufwand für die Kazhdan-Lusztig-Basis mit steigendem n sehr schnell sehr groß, so dass solche Beispiele bislang nur bis zu den Typen A_6 , B_5 und D_5 betrachtet werden konnten. In diesen Rechnungen zeigte sich, dass sehr viele projektive Moduln für spezialisierte Algebren als Zellmoduln auftauchen. Die projektiv unzerlegbaren sind nicht immer dabei, aber dem Autor ist bislang kein Fall bekannt, in dem nicht mindestens ein sogenanntes „basic set“, also eine Menge von projektiven Moduln, deren Isomorphieklassen eine Basis der projektiven Grothendieck-Gruppe bilden, unter den Zellmoduln waren.

(7.4) Bemerkungen zu den Rechnungen

Bei den größeren Beispielen wird der Rechenaufwand für die Kazhdan-Lusztig-Basis schnell extrem groß. Deswegen wurden dafür die Ergebnisse des Programms Coxeter (siehe [dC99] und [dC91]) nach CHEVIE/GAP3 importiert.

Die daraus resultierenden Zellmoduln wurden dann nach der Spezialisierung wieder aus GAP3 exportiert und es wurde mit dem Programmpaket C-MeatAxe (siehe [Rin00]) eine Kompositionsreihe und die Radikalreihe berechnet. Dabei kamen Programme aus [Szö98] zum Einsatz.

Das entscheidende Argument zum Nachweis der Projektivität ist dann das folgende: Ist M ein Modul, dessen einfache Konstituenten mit denen eines aus der Zerlegungsabbildung bekannten projektiv unzerlegbaren Moduls übereinstimmt (Vielfachheiten gezählt!), und ist der Kopf von M einfach, dann ist M selbst projektiv unzerlegbar.

(7.5) Interpretation und Erklärungsversuch

Auf den ersten Blick ist es sehr verblüffend, dass man unter den Zellmoduln projektive Moduln für spezialisierte Iwahori-Hecke-Algebren findet, denn zunächst ist kein guter Grund dafür ersichtlich. Andererseits entstehen die Zellmoduln aus Filtrierungen des regulären Moduls, denn die Relationen „ $\leq_L$ “ und „ $\leq_R$ “ sind ja gerade so definiert, dass man Ideale erhält (siehe VI.(2.9) bis VI.(2.12)). Insofern ist es nicht ganz abwegig zu hoffen, dass der „Klebstoff“, der in den nicht einfachen Zellmoduln sozusagen die einfachen Konstituenten „zusammenhält“, etwas mit projektiven Moduln, also direkten Summanden von freien, zu tun haben könnte.

Tatsächlich wurde in Abschnitt VI.6 gezeigt, dass induzierte Moduln von Zellmoduln parabolischer Unterhalbgebren wieder Zellmoduln sind. Da induzierte Moduln von projektiven wieder projektiv sind (siehe I.(1.4)), ist zu erwarten, dass man unter den spezialisierten Zellmoduln zumindest diejenigen Projektiven findet, die durch sukzessives Induzieren von parabolischen Unterhalbgebren zu erhalten sind.

Das obige Beispiel $RC^{(\Sigma_{19} \cup \Sigma_{14})}$ lässt sich aber durch dieses Argument nicht erklären! Betrachtet man nämlich alle projektiv unzerlegbaren Moduln maximal parabolischer Unterhalbgebren und ihre Induktion zu $\mathcal{H}$ -Moduln, so kommt der Isomorphietyp von $RC^{(\Sigma_{19} \cup \Sigma_{14})}$ nicht vor.

Betrachtet man hingegen die sogenannte i-Induktion, also Induzieren mit nachfolgender Zerlegung in Blöcke, so zeigt sich, dass der Isomorphietyp von $RC^{(\Sigma_{19} \cup \Sigma_{14})}$ tatsächlich durch Induktion eines projektiv unzerlegbaren Moduls einer maximal parabolischen Unterhalbgebra vom Typ $A_2 \times A_1$ und anschließender Zerlegung in Blöcke erhalten werden kann.

Andererseits ist — zumindest dem Autor — unklar, wie die Zerlegung in Blöcke im Zusammenhang mit Zellmoduln zu einem Argument benutzt werden kann, das begründen könnte, warum so viele „kleine“ projektive Moduln unter den Zellmoduln sind.

Zumindest deuten Beispielrechnungen darauf hin, dass folgende Hypothese richtig sein könnte:

Betrachtet man eine bezüglich „ $\leq_L$ “ nach unten abgeschlossene Menge Γ von Rechtszellen, so dass der Charakter des zugehörigen Zellmoduls $RC^{(\Gamma)}$ nach Spezialisierung eine Summe von projektiven Charakteren ist, dann ist auch $RC^{(\Gamma)}$ selbst ein projektiver Modul.

Spekulation: Wenn man zeigen könnte, dass zumindest ein „basic set“ von projektiven Moduln aus den Zellmoduln gewonnen werden könnte, dann hätte man womöglich explizite generische Moduln für $\mathcal{H}$ mit einer ausgezeichneten Basis, auf die man die Methoden aus Kapitel IV anwenden könnte, um eine explizite Konstruktion von primitiven Idempotenten zu gewinnen, bei der die Nenner der Koeffizienten beispielsweise in der C' -Basis kontrolliert werden könnten. Dies wäre im Hinblick auf Kapitel VII sehr interessant.

Kapitel VII

Die James-Geck-Vermutung

In diesem Kapitel wird eine bislang unbewiesene Vermutung von Gordon James aus dem Jahr 1990 vorgestellt. Ursprünglich (siehe [Jam90, Abschnitt 4]) ist diese Vermutung für q -Schur-Algebren vom Typ A formuliert. In dieser Arbeit behandeln wir die Version für Iwahori-Hecke-Algebren. Wir geben zunächst eine Formulierung wieder, die sehr ähnlich zur Urversion ist, und dann eine, die von Meinolf Geck stammt (siehe [Gec98, Conjecture 3.4]). Zur Vereinfachung beschränken wir uns auch hier auf den Typ A.

Der zweite Teil dieses Kapitels beschäftigt sich mit zwei neuen Umformulierungen dieser Vermutung mit Hilfe von Brauer-Reziprozität und Idempotenten.

Im dritten Teil folgt eine weitere Umformulierung, bei der der Rang einer Gram-Matrix nach verschiedenen Spezialisierungen verglichen wird.

Von hier an ändert sich die Struktur des Dokuments: Während bisher in jedem Unterabschnitt ein Verweis auf die Stelle angegeben war, wo die verwendeten Bezeichnungen eingeführt wurden, wird nun ein zusammenhängender Text folgen, in dem einmal eingeführte Bezeichnungen ohne weiteren Kommentar bis zum Kapitelende weiter verwendet werden.

VII.1 Bisherige Formulierungen

(1.1) Bezeichnungen

Voraussetzungen: Es sei $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ der Ring der Laurent-Polynome in der Unbestimmten v über den ganzen Zahlen und $K := \text{Quot}(A) = \mathbb{Q}(v)$ der Quotientenkörper von A . Weiter sei (W, S) ein endliches Coxetersystem vom Typ A_{n-1} (mit $n \geq 2$), es sind also $W = S_n$ die symmetrische Gruppe auf $\{1, \dots, n\}$ und $S = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$ ihre Coxetererzeuger. Mit $\mathcal{H} := \mathcal{H}_A(W, S, v)$ sei die generische Ein-Parameter-Iwahori-Hecke-Algebra bezeichnet (siehe VI.(1.7)) und mit $K\mathcal{H}$ ihre Konstantenerweiterung $K \otimes_A \mathcal{H}$ (vgl. I.(3.2)).

Folgerungen: Wie in VI.(1.4).(iii) angemerkt ist $\mathcal{H}$ eine A -Ordnung, also eine A -Algebra, die als A -Modul endlich erzeugt und frei ist. Der Ring A ist als Lokalisierung des faktoriellen Rings $\mathbb{Z}[v]$ ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper K . Die Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$ zerfällt über K (siehe Theorem VI.(3.1)) und $K\mathcal{H}$ ist halbeinfach (siehe VI.(3.3) oder betrachte die Spezialisierung $v \mapsto 1 \in \mathbb{Q}$ und benutze Tits' Deformationssatz, siehe [GP00, 7.4.6]).

Voraussetzungen: Es sei ℓ eine rationale Primzahl, L ein endlicher Körper der Charakteristik ℓ und $\theta_\ell : A \rightarrow L$ eine Spezialisierung wie in Abschnitt V.(2.1), es sei also θ_ℓ ein Ringhomomorphismus, so dass L der Quotientenkörper von $\theta_\ell(A)$ ist. Wir fassen L vermöge θ_ℓ als einen A -Modul auf und bezeichnen die Konstantenreduktion $L \otimes_A \mathcal{H}$ mit $L\mathcal{H}$. Es sei $u := \theta_\ell(v) \in L$.

Wir bezeichnen mit $e = e(u) \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl, für die $1 + u + u^2 + \dots + u^{e-1} = 0$ ist. Das bedeutet, dass e im Fall $u \neq 1$ gleich der multiplikativen Ordnung von u in L und sonst gleich der Charakteristik ℓ ist. In jedem Fall ist also $e > 1$.

Folgerungen: Der Körper L ist laut VI.(3.1) Zerfällungskörper für $L\mathcal{H}$.

Die Spezialisierung θ_ℓ erfüllt damit alle Voraussetzungen, die für die Definition einer Zerlegungsabbildung nach V.(2.2) notwendig sind. Wir bezeichnen die zugehörige Zerlegungsabbildung mit $d_{\theta_\ell} : R_0(K\mathcal{H}) \rightarrow R_0(L\mathcal{H})$.

Wir können nun die erste Fassung der Vermutung formulieren:

(1.2) Vermutung (James-Vermutung für Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A)

(vgl. [Jam90, Abschnitt 4])

Es seien alle Bezeichnungen wie oben. Zusätzlich sei $L = \mathbb{F}_\ell$ der Körper mit ℓ Elementen.

Betrachtet man alle Möglichkeiten für θ_ℓ mit einer festen Charakteristik ℓ und festem $e = e(u)$, wobei $e \cdot \ell > n$ ist, dann hängt die Zerlegungsabbildung d_{θ_ℓ} nicht von θ_ℓ , also insbesondere nicht von u ab.

Genauer: Sind $\theta_\ell : A \rightarrow L$ und $\theta'_\ell : A \rightarrow L'$ zwei Spezialisierungen wie oben (mit $L = L' = \mathbb{F}_\ell$), für die gilt, dass $e := e(\theta_\ell(v)) = e(\theta'_\ell(v))$ und $e \cdot \ell > n$ ist, dann gibt es einen Isomorphismus $\psi : R_0(L\mathcal{H}) \rightarrow R_0(L'\mathcal{H})$ abelscher Gruppen, der die Klassen der einfachen Moduln erhält, so dass für die beiden Zerlegungsabbildungen d_{θ_ℓ} und $d_{\theta'_\ell}$ der Zusammenhang $d_{\theta'_\ell} = \psi \circ d_{\theta_\ell}$ gilt. Hierbei steht $L\mathcal{H}$ für die Konstantenreduktion von $\mathcal{H}$ bezüglich der Spezialisierung θ_ℓ und $L'\mathcal{H}$ für diejenige bezüglich θ'_ℓ .

(1.3) Bemerkungen

- In [Jam90, Abschnitt 4] wird diese Aussage für q -Schur-Algebren mit Hilfe von Zerlegungsmatrizen formuliert. Dort wird sogar auf die Voraussetzung $L = \mathbb{F}_\ell$ verzichtet. Die Formulierung hier ist eine Interpretation der Aussagen in [Jam90, Abschnitt 4] für Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A, die den Bezeichnungen in dieser Arbeit angepasst wurde.
- Die Voraussetzung $u \in \mathbb{F}_\ell$ kommt daher, dass die Spezialisierungen der q -Schur-Algebren in [Jam90] vom Studium der ℓ -modularen Zerlegungsabbildungen der Gruppe $GL_n(q)$ kommen, wobei $q \in \mathbb{N}$ eine Primzahlpotenz ist, die nicht durch ℓ teilbar ist („nicht-definierende Charakteristik“). Dementsprechend ist der Parameter u nach der Spezialisierung einfach die ℓ -modulare Reduktion der natürlichen Zahl q und liegt damit im Primkörper. Da $L = \text{Quot}(A)$ vorausgesetzt wurde, folgt sofort, dass $L = \mathbb{F}_\ell$ ist. Diese Voraussetzung erscheint aber aus Sicht der Iwahori-Hecke-Algebren bzw. der q -Schur-Algebren künstlich.

Für die Version nach Meinolf Geck (vgl. [Gec98, Conjecture 3.4]) brauchen wir einige weitere Bezeichnungen:

(1.4) Bezeichnungen

Voraussetzungen: Zusätzlich zu den Bezeichnungen aus VII.(1.1) sei nun $\mathfrak{p}$ der Kern der Spezialisierung $\theta_\ell : A \rightarrow L$. Weiter sei ζ_e eine primitive e -te Einheitswurzel im Kreisteilungskörper $E := \mathbb{Q}(\zeta_e)$ und φ_e das zugehörige Kreisteilungspolynom in $\mathbb{Z}[v]$. Es sei $\mathfrak{q} := \varphi_e \cdot A$ das von φ_e in A erzeugte Hauptideal. Die kanonische Abbildung $\mathbb{Z}[v] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ sei mit π bezeichnet.

Folgerungen: Da L ein endlicher Körper der Charakteristik ℓ ist und $u = \theta_\ell(v)$ damit endliche Ordnung hat, ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 2 (siehe Korollar III.(1.3) auf Seite 44), also von der Form $\ell \cdot A + \mathfrak{p} \cdot A$ mit einem normierten, in $\mathbb{Z}[v]$ irreduziblen Polynom p , dessen Bild unter der kanonischen Abbildung π irreduzibel und ungleich v ist. Damit ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. Der Restklassenkörper $A/\mathfrak{p} \cong A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ ist isomorph zu L , da nach Voraussetzung $L = \text{Quot}(\theta_\ell(A))$ ist. Das Kreisteilungspolynom φ_e ist normiert und irreduzibel in $\mathbb{Z}[v]$. Deswegen ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal der Höhe 1 in A (siehe wieder III.(1.3)).

Ist $u = 1$, dann ist $e = \ell$ und $\varphi_e = 1 + v + v^2 + \dots + v^{\ell-1}$, also liegt φ_e in $\mathfrak{p}$. Ist $u \neq 1$, dann ist e gleich der multiplikativen Ordnung von u in L , also ist u eine primitive e -te Einheitswurzel in L und auch in diesem Fall liegt φ_e in $\mathfrak{p}$. Jedenfalls ist also $\mathfrak{q}$ ein Primideal von der Höhe 1 in A und es gilt $0 \neq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$.

Da φ_e in $\mathfrak{p}$ liegt, ist $\pi(p)$ ein Teiler von $\pi(\varphi_e)$. Damit sind die Voraussetzungen von Korollar III.(2.4) erfüllt, das weiter unten Anwendung finden wird.

Der Ringhomomorphismus $\theta_{\zeta_e} : A \rightarrow E$, $v \mapsto \zeta_e$ hat als Kern das Primideal $\mathfrak{q}$ und als Bild den Ganzheitsring $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ des Zahlkörpers $E = \mathbb{Q}(\zeta_e)$ (siehe [CR81, (4.5)]). Also ist $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ als Ring isomorph zu $A/\mathfrak{q}$ und E als Körper isomorph zum Quotientenkörper $\text{Quot}(A/\mathfrak{q})$, der isomorph zum Restklassenkörper der Lokalisierung $A_{\mathfrak{q}}$ ist.

Da $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p} = \ker \theta_{\ell}$ ist, faktorisiert der Ringhomomorphismus $\theta_{\ell} : A \rightarrow L$ über den Ringhomomorphismus $\theta_{\zeta_e} : A \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta_e] \cong A/\mathfrak{q}$, es gibt also einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\theta_{\ell}^{\zeta_e} : \mathbb{Z}[\zeta_e] \rightarrow L$, so dass $\theta_{\ell} = \theta_{\ell}^{\zeta_e} \circ \theta_{\zeta_e}$ ist, er bildet ζ_e auf $\theta_{\ell}(v)$ ab (wir erlauben uns hier, von Verkettung zu sprechen, da das Bild von θ_{ζ_e} im Definitionsbereich von $\theta_{\ell}^{\zeta_e}$ liegt).

Der Ring A ist ganz-abgeschlossen in K , da er Lokalisierung des Polynomrings $\mathbb{Z}[v]$ ist, der eindeutige Primfaktorzerlegung hat (siehe [Kun85, II.2.8 und III.4.12]). Der Ring $A/\mathfrak{q} \cong \mathbb{Z}[\zeta_e]$ ist ganz-abgeschlossen in E (siehe [CR81, (4.5)]).

Wie bereits in VII.(1.1) erwähnt ist K Zerfällungskörper für $K\mathcal{H}$. Aber auch E ist Zerfällungskörper für $E\mathcal{H}$, und L ist Zerfällungskörper für $L\mathcal{H}$ (siehe jeweils Theorem VI.(3.1)).

Damit haben wir gezeigt, dass alle Voraussetzungen für die Faktorisierung von Zerlegungsabbildungen erfüllt sind (siehe V.(5.1)). Um Indizes zu sparen, führen wir die folgenden abkürzenden Bezeichnungen für die drei Zerlegungsabbildungen aus V.(5.1) ein:

$$d_{\ell} := d_{\theta_{\ell}} \quad d_{\zeta_e} := d_{\theta_{\zeta_e}} \quad \text{und} \quad d_{\ell}^{\zeta_e} := d_{\theta_{\ell}^{\zeta_e}}.$$

Wir haben ein kommutatives Diagramm mit drei Zerlegungsabbildungen, für die $d_{\ell} = d_{\ell}^{\zeta_e} \circ d_{\zeta_e}$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} R_0(K\mathcal{H}) & \xrightarrow{d_{\ell}} & R_0(L\mathcal{H}) \\ & \searrow d_{\zeta_e} \quad \nearrow d_{\ell}^{\zeta_e} & \\ & R_0(E\mathcal{H}) & \end{array} \quad (\text{VII.1})$$

Nun können wir die James-Geck-Vermutung formulieren:

(1.5) Vermutung (James-Geck-Vermutung für Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A)
(vgl. [Gec98, Conjecture 3.4])

Es seien alle Bezeichnungen wie oben. Zusätzlich sei $L = \mathbb{F}_{\ell}$ der Körper mit ℓ Elementen und $\ell > n$, also kein Teiler der Gruppenordnung von $W = S_n$.

Dann ist die Zerlegungsabbildung $d_{\ell}^{\zeta_e}$ ein Isomorphismus, der die Klassen der einfachen Moduln erhält.

(1.6) Bemerkungen

- Diese Vermutung ist in [Gec98] allgemeiner für Iwahori-Hecke-Algebren von beliebigem Typ formuliert wobei vorausgesetzt ist, dass alle Parameter Potenzen derselben Unbestimmten sind. Zur Vereinfachung beschränken wir uns hier auf den Typ A, da man sonst allgemeiner über Dedekindringen statt über $\mathbb{Z}$ arbeiten muss und die Quadratwurzeln der Parameter im Grundkörper braucht, um Zerfällungskörper zu erhalten.
- Auch hier erscheint die Voraussetzung $L = \mathbb{F}_{\ell}$ künstlich. Der Grund hierfür ist derselbe wie der in VII.(1.3) erwähnte.
- In dieser Formulierung ist die Unabhängigkeit der Zerlegungsabbildung d_{ℓ} von u expliziter ausgeführt. Die Zerlegungsabbildung d_{ℓ} wird nämlich **unabhängig von ℓ und u für alle möglichen θ_{ℓ}** durch den „generischen“ Fall d_{ζ_e} beschrieben. Dadurch wird genau spezifiziert, dass es **nur** auf $e(u)$, also die multiplikative Ordnung von u für $u \neq 1$ und die Charakteristik von L für $u = 1$, ankommt. Insofern geht die Vermutung in VII.(1.5) sogar weiter als das Original in VII.(1.2). Andererseits ist die Voraussetzung $\ell > n$ stärker als $e \cdot \ell > n$ im Original.
- In der Originalformulierung in [Jam90, Abschnitt 4] ist bereits die Idee der Faktorisierung von Zerlegungsabbildungen angedeutet.

VII.2 Neue Formulierungen mit Brauer-Reziprozität

Wir formulieren nun mittels Brauer-Reziprozität eine Aussage, die zur Version der Vermutung in VII.(1.5) äquivalent ist.

(2.1) Vermutung (Erste Umformulierung der James-Geck-Vermutung)

(vgl. VII.(1.5) und [Gec98, Conjecture 3.4])

Es sei $\mathcal{H}$ die generische Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} über dem Ring $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ mit Parameter v , und $\ell > n$ eine Primzahl. Weiter sei $1 \neq e \in \mathbb{N}$ mit $e \mid \ell - 1$ oder $e = \ell$. Im Fall $e \mid \ell - 1$ sei $a \in \mathbb{Z}$ ein Element, das modulo ℓ die Ordnung e hat, sonst sei $a = 1$. Schließlich sei ζ_e eine primitive e -te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und $\bar{p}$ das Primideal $\ell\mathbb{Z}[\zeta_e] + (\zeta_e - a)\mathbb{Z}[\zeta_e]$ in $\mathbb{Z}[\zeta_e]$.

Dann ist jedes primitive Idempotent $f \in \mathbb{Z}[\zeta_e]_{\bar{p}}\mathcal{H}$ auch als Idempotent in $\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}$ primitiv.

(2.2) Bemerkungen

- Dabei ist $\mathbb{Z}[\zeta_e]_{\bar{p}}$ die Lokalisierung von $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ bei $\bar{p}$. Dass das Ideal $\bar{p}$ ein Primideal ist, folgt für $e \mid \ell - 1$ aus [CR81, (4.34)+Beweis] und für $e = \ell$ aus [CR81, (4.38)+Beweis].
- Im Fall $e = \ell$ ist $\bar{p} = (\zeta_e - 1)\mathbb{Z}[\zeta_e]$, da

$$\begin{aligned} (\zeta_e - 1) \cdot \sum_{i=1}^{e-1} i \cdot \zeta_e^{e-1-i} &= \sum_{i=1}^{e-1} i \cdot \zeta_e^{e-i} - \sum_{i=1}^{e-1} i \cdot \zeta_e^{e-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{e-2} (i+1) \cdot \zeta_e^{e-1-i} - \sum_{i=1}^{e-1} i \cdot \zeta_e^{e-1-i} \\ &= \zeta_e^{e-1} + \sum_{i=1}^{e-2} \zeta_e^{e-1-i} - (e-1) \cdot \zeta_e^0 = -e \end{aligned}$$

ist, weil $\sum_{j=0}^{e-1} \zeta_e^j = 0$ ist.

- Im Gegensatz zu VII.(1.5) kommen in der Formulierung in VII.(2.1) nur Iwahori-Hecke-Algebren über Grundringen der Charakteristik 0 vor. Die Zerlegungsabbildung d_{ζ_e} für die Algebren $\mathbb{Q}(v)\mathcal{H}$ und $\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}$ ist durch die Ergebnisse in [Ari96] oder [LLT96, Conjecture 6.9(ii)] oder [LLT95] bekannt, so dass James' Vermutung durch diese Umformulierung zu einer arithmetischen Fragestellung in der Algebra $\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}$ wird.
- Statt die Aussage für alle primitiven Idempotenten von $\mathbb{Z}[\zeta_e]_{\bar{p}}\mathcal{H}$ zu formulieren, hätte man sich auch darauf beschränken können, je ein primitives Idempotent für jeden Isomphietyp projektiv unzerlegbarer Moduln zu betrachten.
- Wenn man in der obigen Situation zu jedem Isomphietyp projektiv unzerlegbarer $\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}$ -Moduln ein Idempotent $f \in \mathbb{Z}[\zeta_e]_{\bar{p}}\mathcal{H}$ konstruieren könnte, so dass $f\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}$ von diesem Typ ist, dann wäre die Vermutung bewiesen. Mit Hilfe der Ergebnisse in Kapitel IV könnte man solche Idempotenten konstruieren, wenn man ganzzahlige Formen von projektiv unzerlegbaren $\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}$ -Moduln mit einer geeigneten Basis hätte. Es ist denkbar, dass mit Hilfe der Beobachtungen, die in Abschnitt VI.7 beschrieben sind, aus der Kazhdan-Lusztig-Basis solche Idempotenten gewonnen werden können.

(2.3) Beweis der Äquivalenz der ersten Umformulierung zu James' Vermutung

Wir zeigen zunächst, dass in VII.(1.5) und in VII.(2.1) dieselbe Situation vorliegt, und danach, dass die Aussagen der Vermutungen äquivalent sind.

In der Situation der Vermutung VII.(1.5) folgt aus der Voraussetzung $L = \mathbb{F}_\ell$, dass entweder $\theta_\ell(v) = 1$ ist und damit $e = \ell$ und $\ker \theta_\ell = \ell \cdot A + (v - 1) \cdot A$ gilt, oder dass e die Ordnung von $\theta_\ell(v)$ in $\mathbb{F}_\ell$ ist, also ein Teiler von $\ell - 1$. Der Kern von θ_ℓ ist dann wie in VII.(1.4) von der Form $\ell \cdot A + p \cdot A$,

wobei hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = v - a$ mit einem $a \in \mathbb{Z}$ wie in VII.(2.1) ist, da aus [CR81, (4.34)+Beweis] folgt, dass das Bild des Kreisteilungspolynom φ_e unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z}[v] \rightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ in Linearfaktoren zerfällt. Betrachtet man nun den Kern von $\theta_\ell^{\zeta_e}$ bzw. das Bild von $\mathfrak{p}$ unter θ_{ζ_e} , dann erhält man das Primideal $\bar{\mathfrak{p}} = \ell \cdot \mathbb{Z}[\zeta_e] + (\zeta_e - a) \cdot \mathbb{Z}[\zeta_e]$ aus VII.(2.1).

Betrachtet man umgekehrt die Voraussetzungen in VII.(2.1), dann lassen sich die für VII.(1.5) notwendigen Bezeichnungen leicht festlegen: Die Spezialisierung $\theta_\ell : A \rightarrow \mathbb{F}_\ell$ setzt die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_\ell$ fort und bildet v auf das Bild von a in $\mathbb{F}_\ell$ ab. Der Kern von θ_ℓ ist das maximale Ideal $\ell \cdot A + (v - a) \cdot A$ und die beiden anderen Spezialisierungen werden definiert wie in VII.(1.4). Damit erhalten wir die drei Zerlegungsabbildungen d_ℓ , d_{ζ_e} und $d_\ell^{\zeta_e}$.

Wir können nun die Äquivalenz der beiden Vermutungen in VII.(1.5) und VII.(2.1) beweisen. Dazu bleiben alle Bezeichnungen und Voraussetzungen aus diesem Kapitel in Kraft.

Wir betrachten direkt die fragliche Zerlegungsabbildung $d_\ell^{\zeta_e} : R_0(E\mathcal{H}) \rightarrow R_0(L\mathcal{H})$ in der Faktorisierung. Sie kommt von der Spezialisierung $\theta_\ell^{\zeta_e} : \mathbb{Z}[\zeta_e] \rightarrow L$. Der Ring $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ sei mit R bezeichnet, er ist der Ganzheitsring des Kreisteilungskörpers $E = \mathbb{Q}(\zeta_e)$ und damit ein Dedekindring (siehe z.B. [CR81, (4.4) und (4.5)]). Der Kern von $\theta_\ell^{\zeta_e}$ ist gleich dem Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$.

Zur Konstruktion von Zerlegungsabbildungen wie im Beweis zu Proposition V.(2.5) auf Seite 69 benutzen wir die Lokalisierung $R_{\bar{\mathfrak{p}}}$ von R bei $\bar{\mathfrak{p}}$, es gilt nämlich $R \subseteq R_{\bar{\mathfrak{p}}} \subseteq E$ und $\text{rad } R_{\bar{\mathfrak{p}}} \cap R = \bar{\mathfrak{p}}$. Der Ring $R_{\bar{\mathfrak{p}}}$ ist ein diskreter Bewertungsring (siehe [Mat86, 11.6 und 11.4]).

Ist M also ein $E\mathcal{H}$ -Modul, dann ist das Bild von $[M] \in R_0(E\mathcal{H})$ unter der Zerlegungsabbildung $d_\ell^{\zeta_e}$ definiert, indem man eine beliebige $R_{\bar{\mathfrak{p}}}$ -Form von M wählt, deren Reduktion modulo $\bar{\mathfrak{p}}$ bestimmt und zur entsprechenden Klasse in $R_0(L\mathcal{H})$ übergeht.

Mit Hilfe desselben Ringes $R_{\bar{\mathfrak{p}}}$ können wir nun auch eine Klebeabbildung $e_\ell^{\zeta_e} : K_0(L\mathcal{H}) \rightarrow K_0(E\mathcal{H})$ zwischen den projektiven Grothendieck-Gruppen definieren. Dazu bleibt für Definition V.(3.1) nur zu prüfen, dass $R_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathcal{H}$ semiperfekt ist. Dies gilt aber nach Korollar II.(6.3) auf Seite 42.

Die Klebeabbildung $e_\ell^{\zeta_e}$ ist nun laut Definition V.(3.1) so definiert: Ist $\bar{f} \in L\mathcal{H}$ ein Idempotent, dann ist $\bar{f}L\mathcal{H}$ ein projektiver Modul. Das Idempotent $\bar{f}$ lässt sich zu einem Idempotent $f \in R_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathcal{H}$ heben, man kann f als Element von $E\mathcal{H}$ auffassen und erhält einen projektiven Modul $fE\mathcal{H}$. Das Bild der Klasse $[\bar{f}L\mathcal{H}] \in K_0(L\mathcal{H})$ ist dann die Klasse $[fE\mathcal{H}] \in K_0(E\mathcal{H})$.

Dieselben Voraussetzungen, die für die Definition der Klebeabbildung notwendig waren, erlauben uns nun, die Brauer-Reziprozität (siehe Theorem V.(4.1)) anzuwenden. Die Klebeabbildung $e_\ell^{\zeta_e}$ ist also die duale Abbildung zur Zerlegungsabbildung $d_\ell^{\zeta_e}$ bezüglich der Paarungen

$$\langle - | - \rangle : K_0(E\mathcal{H}) \times R_0(E\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \langle - | - \rangle : K_0(L\mathcal{H}) \times R_0(L\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

aus Definition V.(1.12) auf Seite 66.

Wegen Proposition V.(1.13) ist die Basis von $K_0(E\mathcal{H})$ (bzw. $K_0(L\mathcal{H})$), die aus den Klassen der projektiv unzerlegbaren Moduln besteht, jeweils dual zu der Basis von $R_0(E\mathcal{H})$ (bzw. $R_0(L\mathcal{H})$), die aus den Klassen der einfachen Moduln besteht. Deswegen ist $d_\ell^{\zeta_e}$ genau dann ein Isomorphismus, der die Klassen der einfachen Moduln erhält, wenn $e_\ell^{\zeta_e}$ ein Isomorphismus ist, der die Klassen der projektiv unzerlegbaren Moduln erhält.

Die Klebeabbildung $e_\ell^{\zeta_e}$ ist genau dann ein Isomorphismus, der die Klassen der projektiv unzerlegbaren Moduln erhält, wenn jedes primitive Idempotent $f \in R_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathcal{H}$ auch als Idempotent in $\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}$ primitiv ist.

Damit ist gezeigt, dass Vermutung VII.(2.1) äquivalent zu Vermutung VII.(1.5) ist. $\square$

(2.4) Bezeichnungen für die zweite Umformulierung

In der zweiten Umformulierung werden nur Iwahori-Hecke-Algebren über Grundringen vorkommen, die den Ring $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ enthalten, es werden also Aussagen über die generische Iwahori-Hecke-Algebra gemacht.

Dazu betrachten wir nun die beiden Zerlegungsabbildungen d_{ζ_e} und d_ℓ . Sie kommen von den beiden Spezialisierungen θ_{ζ_e} bzw. θ_ℓ . Wir konstruieren explizit zwei Bewertungsringe, die zur Konstruktion dieser Zerlegungsabbildungen wie im Beweis zu Proposition V.(2.5) auf Seite 69 geeignet sind. Zusätzlich ist der eine im anderen enthalten, damit sich die primitiven Idempotente in den Iwahori-Hecke-Algebren über diesen Ringen besser vergleichen lassen. Man beachte, dass aus dieser letzten Forderung folgt, dass nicht beide diskret sein können (siehe [Mat86, Theorem 10.1]).

Das Primideal $\mathfrak{q} \triangleleft A$ ist als von φ_e erzeugtes Hauptideal definiert. Das Primideal $\mathfrak{p} \triangleleft A$ ist von der Höhe 2. Wie im Beweis zu Proposition III.(2.6) bzw. in VII.(2.3) folgt aufgrund der Voraussetzung $u = \theta_\ell(v) \in \mathbb{F}_\ell$ bzw. $L = \mathbb{F}_\ell$, dass das Primideal $\mathfrak{p}$ von der Form $\ell A + pA$ ist mit $p = v - a = v - 1$ im Fall $u = 1 \in \mathbb{F}_\ell$ und $p = v - a$ für ein $a \in \mathbb{Z}$ sonst. In letzterem Fall ist a ein Urbild von u unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_\ell$.

Damit sind alle Voraussetzungen von Korollar III.(2.4) auf Seite 48 erfüllt. Es sei ν die dort konstruierte, nicht-diskrete Bewertung $\nu : A \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Ihre eindeutige Fortsetzung auf K (siehe Lemma II.(1.6).(v)) sei ebenfalls mit ν bezeichnet, es sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring zu ν in K und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal. In Korollar III.(2.3) wurde gezeigt, dass die Wertegruppe von ν gleich $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist. Deswegen ist die erste Komponente ν_1 von ν eine diskrete Bewertung auf K , der zu ν_1 gehörende Bewertungsring in K sei mit $\mathcal{O}'$ bezeichnet, sein maximales Ideal mit $\mathfrak{m}'$, es gilt $\mathfrak{m}' \subsetneq \mathfrak{m} \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}' \subsetneq K$.

Das bedeutet konkret, dass ein Element $f/g \in K$ mit $f, g \in \mathbb{Z}[v]$ teilerfremd genau dann in $\mathcal{O}'$ liegt, wenn g in $\mathbb{Z}[v]$ nicht durch φ_e teilbar ist. Ein Element f/g liegt genau dann in $\mathfrak{m}'$, wenn f in $\mathbb{Z}[v]$ durch φ_e teilbar ist. Ist $f/g \in \mathcal{O}' \setminus \mathfrak{m}'$, sind also weder f noch g durch φ_e teilbar, dann liegt f/g genau dann in $\mathcal{O}$, wenn das Bild von f/g unter dem Einsetzungshomomorphismus $v \mapsto \zeta_e$ in der Lokalisierung $\mathbb{Z}[\zeta_e]_{\bar{\mathfrak{p}}}$ des Ganzheitsrings $\mathbb{Z}[\zeta_e]$ des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta_e)$ beim Primideal $\bar{\mathfrak{p}} = \ell\mathbb{Z}[\zeta_e] + (\zeta_e - a)\mathbb{Z}[\zeta_e]$ liegt.

(2.5) Vermutung (Zweite Umformulierung der James-Geck-Vermutung)

(vgl. VII.(1.5), VII.(2.1) und [Gec98, Conjecture 3.4])

Es sei $\mathcal{H}$ die generische Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} über dem Ring $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ mit Parameter v , und $\ell > n$ eine Primzahl. Weiter sei $1 \neq e \in \mathbb{N}$ mit $e \mid \ell - 1$ oder $e = \ell$. Im Fall $e \mid \ell - 1$ sei $a \in \mathbb{Z}$ ein Element, das modulo ℓ die Ordnung e hat, sonst sei $a = 1$.

Es seien $\mathfrak{q} := \varphi_e A$ und $\mathfrak{p} := \ell A + (v - a)A$, wobei φ_e das e -te Kreisteilungspolynom ist.

Die Bewertung $\nu : \mathbb{Q}(v) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ und die Bewertungsringe $\mathcal{O} = \{x \in K \mid \nu(x) \geq (0, 0)\}$ und $\mathcal{O}' = \{x \in \mathbb{Q}(v) \mid \nu_1(x) \geq 0\}$ seien wie in VII.(2.4) definiert, es gilt also $A \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}' \subsetneq \mathbb{Q}(v)$.

Dann ist jedes primitive Idempotent $f \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ auch als Idempotent in $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ primitiv.

(2.6) Bemerkungen

- In der Formulierung in VII.(2.5) kommen nur Iwahori-Hecke-Algebren über Grundringen vor, die $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ enthalten.
- Statt die Aussage für alle primitiven Idempotente von $\mathcal{O}\mathcal{H}$ zu formulieren, hätte man sich auch darauf beschränken können, je ein primitives Idempotent für jeden Isomphietyp projektiv unzerlegbarer $\mathcal{O}\mathcal{H}$ -Moduln zu betrachten.
- Wenn man unter den obigen Voraussetzungen zu jedem Isomphietyp projektiv unzerlegbarer $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ -Moduln ein Idempotent in $f \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ konstruieren könnte, so dass $f\mathcal{O}'\mathcal{H}$ von diesem Typ ist, dann wäre die Vermutung bewiesen. Mit Hilfe der Ergebnisse in Kapitel IV könnte man solche Idempotente konstruieren, wenn man projektiv unzerlegbare $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ -Moduln mit einer geeigneten Basis hätte. Es ist möglich, dass mit Hilfe der Beobachtungen, die in Abschnitt VI.7 beschrieben sind, aus der Kazhdan-Lusztig-Basis solche Moduln gewonnen werden können.
- Der Unterschied zwischen VII.(2.1) und VII.(2.5) ist, dass alle vorkommenden Grundringe im ersten Fall in $\mathbb{Q}(\zeta_e)$ und im zweiten Fall in $\mathbb{Q}(v)$ enthalten sind. Einmal liegt also eine „spezialisierte“ Situation vor und einmal eine „generische“. Da sich Idempotente von $\mathbb{Q}(\zeta_e)\mathcal{H}$ nach $\mathcal{O}'\mathcal{H}$, von $\mathbb{F}_\ell\mathcal{H}$ nach $\mathcal{O}\mathcal{H}$ und von $\mathbb{F}_\ell\mathcal{H}$ nach $\mathbb{Z}[\zeta_e]_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathcal{H}$ heben lassen, lassen sich die beiden Umformulierungen relativ leicht auseinander ableiten. Das Heben von Idempotenten von $\mathbb{F}_\ell\mathcal{H}$

nach $\mathcal{O}\mathcal{H}$ ist deutlich am aufwendigsten, denn man braucht zwei Vervollständigungsschritte mit nachfolgendem Verbessern von Idempotenten. Dies spricht dafür, dass die Formulierung in VII.(2.5) „weiter entfernt“ von der Originalversion der Vermutung ist als die in VII.(2.1).

(2.7) Beweis der Äquivalenz der zweiten Umformulierung zu James' Vermutung

Wie schon im Beweis der Äquivalenz der ersten Umformulierung zu James' Vermutung in VII.(2.3) liegt hier dieselbe Situation vor wie in VII.(1.5). Es bleibt also die Äquivalenz der Aussagen zu zeigen. Es gilt $\mathfrak{m}' \subsetneq \mathfrak{m} \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}' \subsetneq K$. Deswegen folgt aus [Mat86, Theorem 10.1], dass $\mathfrak{m}'$ ein Primideal in $\mathcal{O}$ ist und dass $\mathcal{O}'$ die Lokalisierung von $\mathcal{O}$ bei der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}'$ von $\mathcal{O}$ ist.

Die Bewertung ν ist so an die Primidealkette $\{0\} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq A$ angepasst, dass $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m}$ ist. Hierbei folgt die Gleichung $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{m}'$ aus Korollar III.(2.3), da ν auf $A \setminus \{0\}$ nur Werte in $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ annimmt.

Also ist $\mathcal{O}'$ ein Bewertungsring, der wie in Proposition V.(2.5) auf Seite 69 geeignet ist, die Zerlegungsabbildung d_{ζ_e} zu definieren, und $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring, der geeignet ist, die Zerlegungsabbildung d_ℓ zu definieren, da sie nämlich jeweils die Voraussetzungen in V.(2.3) und V.(2.4) erfüllen. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass sich im vorliegenden Fall jeder einfache $K\mathcal{H}$ -Modul auch schon über A realisieren lässt (siehe [DJ86, 7.6]).

Laut Proposition III.(2.6) ist aufgrund der Voraussetzung $\ell \equiv 1 \pmod{e}$ oder $e = \ell$ der Restklassenkörper $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ von $\mathcal{O}$ isomorph zu $L = \mathbb{F}_\ell$. Der Restklassenkörper $\mathcal{O}'/\mathfrak{m}'$ von $\mathcal{O}'$ ist isomorph zu $E = \mathbb{Q}(\zeta_e)$, da nach Lemma II.(1.9) die Lokalisierung von A beim Primideal $\mathfrak{q}$ gleich $\mathcal{O}'$ ist und damit $\mathcal{O}'/\mathfrak{m}' = A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}_{\mathfrak{q}} \cong A/\mathfrak{q} \cong \mathbb{Z}[\zeta_e]$ ist.

Zusätzlich sind $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ und $\mathcal{O}\mathcal{H}$ semiperfekt. Dies folgt für $\mathcal{O}'$ aus Korollar II.(6.3) auf Seite 42, da $\mathcal{O}'$ diskret und K laut Theorem VI.(3.1) Zerfällungskörper für $K\mathcal{H}$ ist. Für $\mathcal{O}\mathcal{H}$ folgt die Semiperfektheit aus Korollar III.(3.5) auf Seite 51, da $\text{Quot}(A/\mathfrak{q}) \cong \mathbb{Q}(\zeta_e) = E$ ebenfalls nach Theorem VI.(3.1) Zerfällungskörper für $E\mathcal{H}$ ist. Insbesondere bedeutet dies laut Proposition II.(5.10) auf Seite 40, dass sich jeweils Idempotente von $L\mathcal{H} \cong \mathcal{O}\mathcal{H}/\mathfrak{m}\mathcal{O}\mathcal{H}$ nach $\mathcal{O}\mathcal{H}$ bzw. von $E\mathcal{H} \cong \mathcal{O}'\mathcal{H}/\mathfrak{m}'\mathcal{O}'\mathcal{H}$ heben lassen.

Durch Definition V.(3.1) sind damit zwei Klebeabbildungen $e_{\zeta_e} := e_{\theta_e}^{\mathcal{O}'} : K_0(E\mathcal{H}) \rightarrow K_0(K\mathcal{H})$ und $e_\ell := e_{\theta_\ell}^{\mathcal{O}} : K_0(L\mathcal{H}) \rightarrow K_0(K\mathcal{H})$ definiert. Das bedeutet, dass, wenn $\bar{f} \in E\mathcal{H}$ ein primitives Idempotent ist, das Bild der Klasse $[\bar{f}E\mathcal{H}] \in K_0(E\mathcal{H})$ unter e_{ζ_e} definiert ist als $[fK\mathcal{H}] \in K_0(K\mathcal{H})$, wenn $f \in \mathcal{O}'\mathcal{H}$ ein Idempotent ist, das bei der kanonischen Abbildung $\mathcal{O}'\mathcal{H} \rightarrow E\mathcal{H}$ auf $\bar{f}$ geht. Für e_ℓ gilt entsprechend, dass, wenn $\bar{f} \in L\mathcal{H}$ ein primitives Idempotent ist, das Bild der Klasse $[\bar{f}L\mathcal{H}] \in K_0(L\mathcal{H})$ unter e_ℓ gleich $[fK\mathcal{H}] \in K_0(K\mathcal{H})$ ist, wenn $f \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ ein Idempotent ist, das bei der kanonischen Abbildung $\mathcal{O}\mathcal{H} \rightarrow L\mathcal{H}$ auf $\bar{f}$ geht.

Wie schon bei der ersten Umformulierung können wir die Brauer-Reziprozität anwenden: Wegen Theorem V.(4.1) auf Seite 72 sind also die Klebeabbildungen e_{ζ_e} bzw. e_ℓ jeweils gleich der dualen Abbildung der Zerlegungsabbildung d_{ζ_e} bzw. d_ℓ bezüglich der Paarung $\langle - | - \rangle$ aus Definition V.(1.12) auf Seite 66. Also gilt $e_\ell = e_{\zeta_e} \circ e_\ell^{\zeta_e}$ mit der Abbildung $e_\ell^{\zeta_e}$ aus VII.(2.3). Die Zerlegungsabbildung $d_\ell^{\zeta_e}$ ist, wie dort schon benutzt wurde, genau dann ein Isomorphismus, der die Klassen der einfachen Moduln erhält, wenn $e_\ell^{\zeta_e}$ ein Isomorphismus ist, der die Klassen der projektiv unzerlegbaren Moduln erhält.

Wir behaupten nun, dass dies genau dann gilt, wenn jedes primitive Idempotent in $\mathcal{O}\mathcal{H}$ auch in $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ primitiv ist.

Es sei nämlich $f \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ ein primitives Idempotent. Dann ist das Bild $\tilde{f}$ von f unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{O}\mathcal{H} \rightarrow L\mathcal{H}$ ebenfalls primitiv, also $\tilde{f}L\mathcal{H}$ ein projektiv unzerlegbarer Modul. Genauso ist das Bild $\bar{f}$ von f unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{O}'\mathcal{H} \rightarrow E\mathcal{H}$ ein Idempotent, das genau dann primitiv (in $E\mathcal{H}$) ist, wenn f in $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ primitiv ist.

Dieses Bild $\bar{f}$ liegt sogar in $(\mathcal{O}/\mathfrak{m}')\mathcal{H} \subseteq (\mathcal{O}'/\mathfrak{m}')\mathcal{H} = E\mathcal{H}$. Nun ist aber das Bild von $\bar{f}$ unter der kanonischen Abbildung $(\mathcal{O}/\mathfrak{m}')\mathcal{H} \rightarrow (\mathcal{O}/\mathfrak{m})\mathcal{H} \cong L\mathcal{H}$ gleich $\tilde{f}$. Die Klebeabbildung $e_\ell^{\zeta_e}$ wird mit

Hilfe eines diskreten Bewertungsring $\tilde{R}$ mit

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m}' \subsetneq \tilde{R} \subsetneq \mathcal{O}'/\mathfrak{m}' = E$$

definiert, für den $\text{rad } \tilde{R} \cap \mathcal{O}/\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}'$ gilt. Also ist $[\bar{f}E\mathcal{H}] \in K_0(E\mathcal{H})$ das Bild unter $e_\ell^{\zeta_e}$ von $[\tilde{f}L\mathcal{H}] \in K_0(L\mathcal{H})$.

Wenn also jedes primitive Idempotent $f \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ auch als Idempotent in $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ primitiv ist, dann ist $e_\ell^{\zeta_e}$ ein Isomorphismus, der die Klassen der projektiv unzerlegbaren Moduln erhält. Ist umgekehrt $f \in \mathcal{O}\mathcal{H}$ ein primitives Idempotent, das sich in $\mathcal{O}'\mathcal{H}$ als orthogonale Summe zweier Idempotenten $f = f'_1 + f'_2$ schreiben lässt, dann folgt mit derselben Argumentation, dass $[\bar{f}E\mathcal{H}] = e_\ell^{\zeta_e}([\tilde{f}L\mathcal{H}])$ nicht die Klasse eines projektiv unzerlegbaren Moduls ist.

Damit haben wir bewiesen, dass Vermutung VII.(2.5) äquivalent zu Vermutung VII.(1.5) ist. $\square$

Bemerkung: Entscheidend bei diesem Beweis ist, dass $\mathcal{O}\mathcal{H}$ semiperfekt ist, da wir die eigentliche Aussage über primitive Idempotenten in $L\mathcal{H}$ dadurch nach $\mathcal{O}\mathcal{H}$ heben können.

VII.3 Neue Formulierungen mit Gram-Matrizen

Iwahori-Hecke-Algebren sind in natürlicher Weise symmetrische Algebren (siehe Definition IV.(1.3)). Sie besitzen über jedem Grundring (mit invertierbarem Parameter) eine nicht-ausgearteten Spurform τ (siehe Proposition VI.(1.5)), die in der T-Basis durch die T_1 -Koordinate gegeben ist. Andererseits ist jede halbeinfache Algebra über einem Körper symmetrisch (siehe [CR81, (9.7)]). Betrachtet man also eine nicht-halbeinfache Spezialisierung einer Iwahori-Hecke-Algebra über einem Körper modulo ihrem Radikal, dann erhält man eine symmetrische Algebra. Die ursprüngliche natürliche Spurform τ liefert aber keine Spurform auf diesem halbeinfachen Quotienten, da sie auf dem Radikal der Algebra nicht verschwindet. Bei der Suche nach nicht-ausgearteten Spurformen auf diesem Quotienten stößt man auf Charaktere. Dies liefert eine weitere Umformulierung der James-Vermutung. Wir benutzen hier die Ergebnisse in Abschnitt V.5.

(3.1) Bezeichnungen für die dritte Umformulierung

Es seien nach wie vor alle Voraussetzungen und Bezeichnungen dieses Kapitels in Kraft.

Nach Konstruktion liegt eine Situation wie in V.(5.1) mit einem kommutativen Diagramm von Zerlegungsabbildungen (siehe Diagramm VII.1) vor. Laut Theorem VI.(3.4) ist die Zerlegungsabbildung d_{ζ_e} surjektiv. Deswegen können wir das Kriterium in Theorem V.(5.5) anwenden.

Dazu sei ψ die Linearform auf $R\mathcal{H}$ (Erinnerung: $R = \mathbb{Z}[\zeta_e]$ und $E = \mathbb{Q}(\zeta_e)$, siehe oben), die gleich der Summe der irreduziblen Charaktere von $E\mathcal{H}$ ist. Da d_{ζ_e} surjektiv ist, gibt es eine (nicht eindeutig bestimmte) $\mathbb{Z}$ -Linearkombination $\tilde{\psi}$ der irreduziblen Charaktere von $K\mathcal{H}$ (die wir als A -lineare Abbildungen $\mathcal{H} \rightarrow A$ auffassen, vergleiche die Ausführungen in V.(5.4)), für die $\text{id}_R \otimes_A \tilde{\psi} = \psi$ ist. Es ist dann ψ eine Spurform auf $R\mathcal{H}$ und $\tilde{\psi}$ eine Spurform auf $\mathcal{H}$.

(3.2) Vermutung (Dritte Umformulierung der James-Geck-Vermutung)

(vgl. VII.(1.5) und [Gec98, Conjecture 3.4])

Es sei $\mathcal{H}$ die generische Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} über dem Ring $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ mit Parameter v , und $\ell > n$ eine Primzahl. Weiter sei $1 \neq e \in \mathbb{N}$ mit $e \mid \ell - 1$ oder $e = \ell$.

Es sei $\tilde{\psi}$ wie in VII.(3.1) und M die Gram-Matrix von $\tilde{\psi}$ bezüglich einer Basis $(B_w)_{w \in W}$ von $\mathcal{H}$, also $M := (\tilde{\psi}(B_w \cdot B_{w'}))_{w, w' \in W}$.

Dann ist der Rang der Matrix $1_E \otimes_A M$ über E gleich dem Rang der Matrix $1_L \otimes_A M$ über L .

(Hier fassen wir jeweils E bzw. L vermöge des Homomorphismus θ_{ζ_e} bzw. θ_ℓ als A -Modul auf, um die Konstantenreduktion der Matrix M zu definieren.)

Beweis der Äquivalenz zu VII.(1.5): Wie schon im Beweis der Äquivalenz der ersten Umformulierung zu James' Vermutung in VII.(2.3) liegt hier dieselbe Situation vor wie in VII.(1.5). Die Äquivalenz der Aussagen folgt dann sofort aus Theorem V.(5.5). $\square$

(3.3) Bemerkungen

- Diese Formulierung involviert nur die Charaktertafel der generischen Iwahori-Hecke-Algebra und die Zerlegungsabbildung d_{ζ_e} zur Spezialisierung θ_{ζ_e} . Dies alles ist bekannt (siehe für die Charaktertafel [Sta75] oder [Ram91] oder [Gec99] und für die Zerlegungsabbildung [Ari96] oder [LLT96, Conjecture 6.9(ii)] oder [LLT95]). Damit ist im Prinzip ein Algorithmus gegeben, um für alle e und ℓ zu berechnen, ob die Vermutung stimmt. Allerdings werden die vorkommenden Gram-Matrizen mit n sehr schnell sehr groß, so dass dies wohl unpraktikabel ist.
- Der Ring $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ ist nicht semi-euklidisch (siehe [Gol80, Kapitel 5]), so dass das Konzept der Elementarteiler nicht funktioniert. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass man keinen Gauß-Algorithmus für Matrizen über A durchführen kann. Die Bewertungsringe $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$, die wir in Abschnitt VII.(2.4) für Vermutung VII.(2.5) definiert haben, erlauben dagegen eine Elementarteilertheorie, so dass man die Matrix M als Matrix über $\mathcal{O}$ auffassen kann und die Aussage in VII.(3.2) als eine Aussage über die Elementarteiler dieser Matrix formulieren kann, nämlich dass jeder $\mathcal{O}$ -Elementarteiler von M , der in $\mathfrak{p}$ liegt, auch schon in $\mathfrak{q}$ liegt.
- In [Gec01, Theorem 1.2] beweist Meinolf Geck, dass die analoge Version der Vermutung in VII.(1.5) für q -Schur-Algebren äquivalent dazu ist, dass der Rang der Matrix des Du-Lusztig-Homomorphismus von der q -Schur-Algebra in Lusztig's asymptotische Algebra $\mathcal{J}$ (vergleiche VI.(5.3)) nur von der multiplikativen Ordnung des Parameters q und nicht von der Charakteristik ℓ abhängt. Dieses Ergebnis weist erstaunliche Parallelen mit der in VII.(3.2) gegebenen Formulierung auf, obgleich dort von einer völlig anderen Matrix die Rede ist.

Wir können auch mit dem regulären Charakter ρ von $E\mathcal{H}$ arbeiten, wobei wir dann nur ein hinreichendes Kriterium erhalten:

(3.4) Aussage (Hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit der James-Geck-Vermutung) (vgl. VII.(1.5) und [Gec98, Conjecture 3.4])

Es sei $\mathcal{H}$ die generische Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A_{n-1} über dem Ring $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ mit Parameter v , und $\ell > n$ eine Primzahl. Weiter sei $1 \neq e \in \mathbb{N}$ mit $e \mid \ell - 1$ **oder** $e = \ell$.

Es sei M' die Gram-Matrix des regulären Charakters $\tilde{\rho}$ von $\mathcal{H}$ bezüglich einer Basis $(B_w)_{w \in W}$ von $\mathcal{H}$, also $M' := (\tilde{\rho}(B_w \cdot B_{w'}))_{w, w' \in W}$.

Dann ist der Rang der Matrix $1_E \otimes_A M'$ über E gleich dem Rang der Matrix $1_L \otimes_A M'$ über L .

(Hier fassen wir jeweils E bzw. L vermöge des Homomorphismus θ_{ζ_e} bzw. θ_ℓ als A -Modul auf, um die Konstantenreduktion der Matrix M' zu definieren.)

Beweis: Wie schon im Beweis der Äquivalenz der ersten Umformulierung zu James' Vermutung in VII.(2.3) liegt hier dieselbe Situation vor wie in VII.(1.5). Wir arbeiten im Vergleich zu VII.(3.2) an Stelle von ψ mit dem regulären Charakter ρ von $E\mathcal{H}$, wobei wir wie oben ρ als R -lineare Abbildung von $R\mathcal{H}$ nach $R = \mathbb{Z}[\zeta_e]$ auffassen. Damit erhalten wir mit Korollar V.(5.6) die Aussage. $\square$

(3.5) Bemerkungen

- Könnte man diese Aussage beweisen, wäre die Vermutung in VII.(1.5) bewiesen.
- Die Ausführungen in VII.(3.3) gelten sinngemäß.
- Die Aussage in VII.(3.4) ist **nicht** äquivalent zur Vermutung in VII.(1.5). Betrachtet man nämlich die Konstantenreduktion $\text{id}_L \otimes_A \tilde{\rho}$ des regulären Charakters $\tilde{\rho}$ von $\mathcal{H}$, dann ist dies zwar eine Summe irreduzibler Charaktere von $L\mathcal{H}$, in der alle irreduziblen Charaktere vorkommen. Der Vektor der Vielfachheiten ist aber eine $\mathbb{N}$ -Linearkombination der Zeilen der ℓ -modularen Zerlegungsmatrix zur Zerlegungsabbildung $d_\ell : R_0(K\mathcal{H}) \rightarrow R_0(L\mathcal{H})$, wobei die Koeffizienten

gleich den Charaktergraden der irreduziblen Charaktere von $K\mathcal{H}$ sind. Obgleich diese Charaktergrade Teiler der Gruppenordnung $n!$ der Weyl-Gruppe $W = S_n$ sind, ist es möglich, dass (selbst für $\ell > n$) die resultierenden Vielfachheiten der irreduziblen Charaktere von $L\mathcal{H}$ in $\text{id}_L \otimes_A \tilde{\rho}$, also dem regulären Charakter von $L\mathcal{H}$, durch ℓ teilbar sind. Eventuell hilft die Aussage in VII.(3.4) aber, die Vermutung in VII.(1.5) für eine schärfere Bedingung an ℓ zu beweisen.

- Besonders interessant an dieser Aussage ist, dass die Determinante der Matrix M' durch das nachfolgende Lemma (siehe VII.(3.6)) bekannt ist! Dies liegt daran, dass die dort vorkommende Determinante der Matrix N eine Einheit in A ist.

Aber selbst wenn wir M' als Matrix über dem Bewertungsring $\mathcal{O}$ aus VII.(2.4) auffassen und die Elementarteiler betrachten, dann folgt aus der Tatsache, dass die einzigen Faktoren der Determinante von M' , die im Primideal $\mathfrak{p}$ liegen (nämlich Potenzen von φ_e), alle auch schon im Primideal $\mathfrak{q}$ liegen, leider nicht, dass der Rang von $1_E \otimes_A M'$ gleich dem Rang von $1_L \otimes_A M'$ ist, wie man an der folgenden Matrix sehen kann:

$$N := \begin{pmatrix} \ell & \varphi_e \\ \varphi_e & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie hat modulo $\mathfrak{q}$ den Rang 1 und modulo $\mathfrak{p}$ den Rang 0, ihre Elementarteiler im Bewertungsring $\mathcal{O}$ sind ℓ und φ_e^2/ℓ (beides Elemente in $\mathcal{O}$) und die Determinante von N ist gleich $-\varphi_e^2$.

(3.6) Lemma (Determinante der Gram-Matrix des regulären Charakters)

(vgl. [Fle93, Proposition 1.4])

Es sei A ein Integritätsbereich und $\mathcal{H}$ eine A -freie A -Algebra von endlichem Rang mit einer nicht-ausgearteten Spurform $\tau : \mathcal{H} \rightarrow A$, die $\mathcal{H}$ zu einer symmetrischen Algebra macht. Weiter sei A ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper K , der Zerfällungskörper für die Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$ sei. Es seien $\rho : \mathcal{H} \rightarrow A$ der reguläre Charakter von $\mathcal{H}$ und $c_\chi \in K$ für $\chi \in \text{Irr}(K\mathcal{H})$ die Schur-Elemente (siehe Definition IV.(2.2), wobei $\text{Irr}(K\mathcal{H})$ die Menge der irreduziblen Charaktere von $K\mathcal{H}$ bezeichnet). Dann gilt für die Determinante der Gram-Matrix $M' := (\rho(B_w \cdot B_{w'}))_{w,w' \in W}$ der Spurform ρ und die Determinante der Gram-Matrix $N := (\tau(B_w \cdot B_{w'}))_{w,w' \in W}$ der Spurform τ (bezüglich einer beliebigen Basis $(B_w)_{w \in W}$ von $\mathcal{H}$) der folgende Zusammenhang:

$$\det M' = \det N \cdot \prod_{\chi \in \text{Irr}(K\mathcal{H})} (c_\chi \cdot \chi(1))^{\chi(1)^2}.$$

Beweis: Siehe [Fle93, Proposition 1.4]. Die Idee des Beweises ist, dass man in $K\mathcal{H}$ einen Basiswechsel zu einer Basis aus Matrix-Einheiten der Wedderburn-Zerlegung durchführt. In dieser Basis ist obiges Ergebnis sofort klar. $\square$

Bemerkungen:

- Die Voraussetzung, dass $\mathcal{H}$ durch τ zu einer symmetrischen Algebra gemacht wird, bedeutet genau, dass $\det N$ eine Einheit in A ist.
- Leider transportiert ein solcher Basiswechsel zwar die Determinante der Gram-Matrizen, nicht jedoch die Elementarteiler.
- Bei generischen Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A_{n-1} sind die Schur-Elemente (bis auf Potenzen von v) Produkte von Kreisteilungspolynomen φ_k für $1 \leq k \leq n$ (siehe [GP00, 10.5.2]).

VII.4 Fazit

In diesem Kapitel wurde in Abschnitt VII.(1.2) die Vermutung von Gordon James für Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A formuliert, die Motivation für diese ganze Arbeit war. Die Vermutung ist nach wie vor unbewiesen, es gibt nicht einmal eine explizite untere Schranke für die Primzahl ℓ , ab der die Aussage der Vermutung bewiesen ist.

Mit der Umformulierung in VII.(2.1) ist es gelungen, eine zur Vermutung in VII.(1.5) äquivalente Formulierung zu geben, die nur Aussagen über Iwahori-Hecke-Algebren in Charakteristik 0 enthält. Dort ist nämlich die Rede von der spezialisierten Algebra, wobei der Parameter eine e -te Einheitswurzel ist. Die Zerlegungsmatrix für diese Spezialisierung ist durch den Satz von Ariki (siehe [Ari96]) bekannt. In VII.(2.5) ist eine Umformulierung, die nur Aussagen über Iwahori-Hecke-Algebren über Ringen enthält, die den Ring $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ enthalten. Dort ist also die Rede von Ordnungen in der generischen Algebra über dem Funktionenkörper $\mathbb{Q}(v)$ in einer Unbestimmten v .

Durch diese beiden Formulierungen mit Hilfe von Idempotenten bzw. projektiv unzerlegbaren Moduln könnten sich neue Ansätze für einen Beweis von James' Vermutung ergeben, da zum Beispiel die in Kapitel IV beschriebenen Methoden helfen könnten, aus gewissen ganzzahligen Formen projektiv unzerlegbarer Moduln mit einer geeigneten Basis explizit Idempotente zu konstruieren, wobei die dabei auftretenden Nenner in den Koeffizienten kontrolliert werden.

Die Ergebnisse in Kapitel VI deuten darauf hin, dass die aus der Kazhdan-Lusztig-Basis konstruierten Zellmoduln solche projektiv unzerlegbaren Moduln liefern könnten, insbesondere im Hinblick auf die Beobachtungen, die in Abschnitt VI.7 beschrieben sind.

Auch die anderen Ergebnisse in Kapitel VI, die sich mit der Wedderburn-Zerlegung beschäftigen, die ebenfalls aus der Kazhdan-Lusztig-Basis und ihrer dualen Basis konstruiert wird, geben Grund zur Hoffnung auf einen Beweis für James' Vermutung. Sie werfen nämlich ein neues Licht auf den Lusztig-Homomorphismus in die asymptotische Algebra (siehe VI.(5.3), VI.(5.4) und VI.(5.5)). Im Fall von q -Schur-Algebren hat Meinolf Geck in [Gec01, Theorem 1.2] bewiesen, dass der Rang der Abbildungsmatrix des Du-Lusztig-Homomorphismus in verschiedenen Spezialisierungen mit James' Vermutung zu tun hat. Gelänge es, die Konstruktion der Wedderburn-Zerlegung auf q -Schur-Algebren zu übertragen, so könnte dies einen weiteren Ansatzpunkt für einen Beweis liefern.

Schließlich hat die dritte Umformulierung in VII.(3.2), die Aussagen über Ränge von Gram-Matrizen in verschiedenen Spezialisierungen macht, eine verblüffende Ähnlichkeit mit der Formulierung von Meinolf Geck in [Gec01, Theorem 1.2]. Obgleich diese Umformulierung auf den ersten Blick wenig greifbar erscheint, könnten sich auch hieraus Ansatzpunkte für einen Beweis ergeben.

Insgesamt hegt der Autor die Hoffnung, dass diese Arbeit einen Beitrag leistet, Ansätze für einen Beweis von James' Vermutung zu finden.

Anhang A

Ergänzungen

In diesem Anhang sind Ergänzungen zum Haupttext gesammelt. Dies sind zum Einen Ergebnisse, die zwar als solche interessant, aber für den weiteren Verlauf der Arbeit nicht relevant sind. Zum Anderen sind hier der Vollständigkeit halber auch Beweise aufgenommen worden, die aus irgendeinem Grund im Haupttext entbehrlich sind.

A.1 Vollständigkeit und Heben von Idempotenten

Die folgenden Definitionen und Propositionen sind direkt aus [Mat86, Kapitel 8] übernommen und kommen jeweils auch im Haupttext dieser Arbeit vor. Da aber in [Mat86] alle Ringe als kommutativ vorausgesetzt sind, was im Folgenden nicht benötigt wird, sind hier der Vollständigkeit halber komplette Beweise aufgenommen worden.

(1.1) Definition (Lineare Topologie, vgl. [Mat86, Kapitel 8])

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring, M ein $\mathcal{H}$ -Modul, Λ eine gerichtete Menge und $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein System von Untermoduln von M mit $M_\lambda \supseteq M_\mu$, wenn $\lambda \leq \mu$ ist. Die **lineare Topologie** auf M bezüglich $\{M_\lambda\}$ ist dadurch definiert, dass die Mengen $x + M_\lambda$ für $x \in M$ und $\lambda \in \Lambda$ eine Umgebungsbasis bilden. Das bedeutet: Eine Teilmenge $X \subseteq M$ ist genau dann offen, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ ein $\lambda \in \Lambda$ existiert mit $x + M_\lambda \subseteq X$.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass das Mengensystem $\mathcal{U}_x := \{x + M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ für $x \in M$ die Axiome einer Umgebungsbasis einer Topologie auf M erfüllt. Dazu ist es notwendig, für alle $x \in M$ zu zeigen, dass (a) $\mathcal{U}_x$ nicht leer ist, dass (b) $x \in V$ für alle $V \in \mathcal{U}_x$ gilt, dass es (c) für alle $V, W \in \mathcal{U}_x$ ein $Y \in \mathcal{U}_x$ gibt mit $Y \subseteq V \cap W$ und dass (d) für alle $Y \in \mathcal{U}_x$ und alle $y \in Y$ ein $V \in \mathcal{U}_y$ existiert mit $V \subseteq Y$ (vgl. [vQ76, Satz 2.16]).

Da offenbar $x \in x + M_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt, reicht es, (c) und (d) zu zeigen. Für (c) reicht es, dass für $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ ein $\mu \in \Lambda$ existiert mit $x + M_\mu \subseteq (x + M_\lambda) \cap (x + M_{\lambda'})$. Dies ist aber für $\mu > \lambda$ und $\mu > \lambda'$ erfüllt und solch ein μ existiert, weil Λ gerichtet ist. Behauptung (d) ist richtig, da für $y \in x + M_\lambda$ gilt, dass $y + M_\lambda = x + M_\lambda$ ist.

Ob $\mathcal{H}$ kommutativ ist, spielt hier überhaupt keine Rolle. $\square$

(1.2) Proposition (Eigenschaften von linearen Topologien, vgl. [Mat86, Kapitel 8])

Es seien $\mathcal{H}$, M , Λ und $\{M_\lambda\}$ wie in A.(1.1). Dann sind die Addition in M , das Bilden von Negativen und die Operation jedes Elementes von $\mathcal{H}$ auf M bezüglich der linearen Topologie stetig. Ist $M = \mathcal{H}$ und sind die M_λ zweiseitige Ideale in $\mathcal{H}$, so ist auch die Multiplikation als Abbildung $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ stetig (Produkttopologie auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$).

Die lineare Topologie ist genau dann hausdorffsch, wenn $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{0\}$ ist.

Jede der Mengen $x + M_\lambda$ ist offen und abgeschlossen, so dass die Quotiententopologie auf jedem M/M_λ diskret ist.

Ist $N \subseteq M$ ein Teilmodul, dann ist die Teilraumtopologie gleich der linearen Topologie auf N , die durch das System $\{N \cap M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ gegeben ist. Die Quotiententopologie auf M/N ist gleich der linearen Topologie, die durch das System $\{(M_\lambda + N)/N \mid \lambda \in \Lambda\}$ gegeben ist. Sie ist genau dann hausdorffsch, wenn N in M abgeschlossen ist.

Beweis: Vgl. [Mat86, Kapitel 8]. Zum Beweis der Stetigkeit reicht es jeweils, Stetigkeit in jedem Punkt zu zeigen. Sind $x, y \in M$ beliebig, dann folgt aus $x' \in x + M_\lambda$ und $y' \in y + M_\lambda$, dass $x' + y' \in x + y + M_\lambda$ ist. Also ist die Addition als Abbildung von $M \times M \rightarrow M$ stetig (Produkttopologie auf $M \times M$). Ebenso ist $-x' \in -x + M_\lambda$ und $x'h \in xh + M_\lambda$ für alle $h \in \mathcal{H}$, da M_λ ein $\mathcal{H}$ -Untermodul von M ist. Also ist auch das Bilden von Negativen und die Operation jedes Elementes von $\mathcal{H}$ auf M stetig.

Ist $M = \mathcal{H}$ und sind die M_λ zweiseitige Ideale in $\mathcal{H}$, dann ist wegen $(x + M_\lambda) \cdot (y + M_\lambda) \subseteq xy + M_\lambda$ auch die Multiplikation stetig, da M_λ ein zweiseitiges Ideal ist.

Offenbar lässt sich ein Punkt $x \in M$ genau dann von der Null „trennen“, wenn eine Nullumgebung M_λ existiert, so dass $x \notin M_\lambda$ ist, dann sind nämlich $0 + M_\lambda$ und $x + M_\lambda$ disjunkt. Also ist die lineare Topologie auf M genau dann hausdorffsch, wenn $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{0\}$ ist.

Jede der Mengen $x + M_\lambda$ ist offen, da mit jedem $y \in x + M_\lambda$ auch $y + M_\lambda$ ganz in $x + M_\lambda$ enthalten ist. Da das Komplement von $x + M_\lambda$ aber die Vereinigung der anderen Nebenklassen von M_λ , also offen ist, ist $x + M_\lambda$ auch abgeschlossen für alle $x \in M$ und alle $\lambda \in \Lambda$. Also ist die Quotiententopologie auf M/M_λ für alle $\lambda \in \Lambda$ gleich der diskreten.

Ist $N \subseteq M$ ein $\mathcal{H}$ -Teilmodul, dann erfüllt das Mengensystem $\{N \cap M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ die Axiome für eine lineare Topologie auf N . Wir nennen diese Topologie im Folgenden „lineare Topologie“, um sie von der Teilraumtopologie zu unterscheiden.

Jede bezüglich der Teilraumtopologie offene Menge in N , die also Schnitt einer offenen Menge von M mit N ist, ist auch in der linearen Topologie auf N offen. Also ist die lineare Topologie auf N feiner als die Teilraumtopologie (oder gleich). Umgekehrt ist das nicht ganz so einfach zu sehen.

Wir zeigen zunächst, dass der topologische Abschluss $\overline{U}$ einer Menge $U \subseteq M$ bezüglich der linearen Topologie gleich $U' := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (U + M_\lambda)$ ist. Der Abschluss von U besteht aus allen Punkten $x \in M$, für die in jeder Umgebung ein Punkt von U liegt. Da aber $u \in x + M_\lambda$ genau dann gilt, wenn $x \in u + M_\lambda$ ist, folgt $U' = \overline{U}$.

Ist eine Menge $V \subseteq N$ nun offen in der linearen Topologie, dann ist $U := N \setminus V$ abgeschlossen, es gilt also $U = \overline{U} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (U + (N \cap M_\lambda))$. Wir fassen nun U als Teilmenge von M auf und bilden den topologischen Abschluss von U in M , also $U' := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (U + M_\lambda)$. Dann ist U' abgeschlossen bezüglich der linearen Topologie auf M . Aber weil U in N bezüglich der linearen Topologie abgeschlossen ist und weil $U + (N \cap M_\lambda) = (U + M_\lambda) \cap N$ für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt (U ist in N enthalten!), ist $U' \cap N = U$, also $(M \setminus U') \cap N = V$. Damit ist V auch offen in der Teilraumtopologie und wir haben gezeigt, dass die Teilraumtopologie mit der linearen Topologie übereinstimmt.

Für die Quotiententopologie auf M/N sei zunächst bemerkt, dass das Mengensystem $\{M'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ mit $M'_\lambda := (M_\lambda + N)/N$ eine lineare Topologie auf M/N definiert, da aus $M_\lambda \subseteq M_\mu$ für beliebige $\lambda, \mu \in \Lambda$ sofort $M_\lambda + N \subseteq M_\mu + N$ folgt. Eine Menge $U \subseteq M/N$ ist genau dann offen in der Quotiententopologie, wenn ihr Urbild unter der kanonischen Abbildung $M \twoheadrightarrow M/N$ offen bezüglich der linearen Topologie auf M ist. Es sei $U \subseteq M/N$ und U' das Urbild, dann ist für ein $x \in U'$ genau dann $x + M_\lambda \subseteq U'$, wenn $(x + N) + M'_\lambda \subseteq U \subseteq M/N$ ist, also stimmen die Quotiententopologie und die lineare Topologie auf M/N überein. Offenbar ist $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M'_\lambda$ genau dann gleich $\{0 + N\} \subseteq M/N$, wenn $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N + M_\lambda = N$ ist, also nach dem oben Gezeigten N in M abgeschlossen ist. $\square$

(1.3) Definition/Proposition (Vervollständigung, vgl. [Mat86, Kapitel 8])

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring, M ein $\mathcal{H}$ -Modul, Λ eine gerichtete Menge und $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein System von Untermoduln mit $M_\lambda \supseteq M_\mu$, wenn $\lambda \leq \mu$. Die **Vervollständigung** $\hat{M}$ von M ist der inverse Limes $\varprojlim M/M_\lambda$ des Systems $\{M/M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ mit der folgenden Topologie: Jedes M/M_λ wird mit der diskreten Topologie versehen, das direkte Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} M/M_\lambda$ mit der Produkttopologie und $\hat{M}$ mit der Teilraumtopologie in diesem Produkt. Diese Topologie ist eine lineare Topologie auf $\hat{M}$, die durch

das System der Kerne $\ker p_\mu$ der Projektionen $p_\mu : \varprojlim M/M_\lambda \rightarrow M/M_\mu$ auf die Komponenten des direkten Produkts gegeben ist. Die Vervollständigung von $\hat{M}$ bezüglich dieser Topologie ist als topologischer Modul isomorph zu $\hat{M}$.

Die kanonische lineare Abbildung $i : M \rightarrow \hat{M}$, $m \mapsto (m + M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist stetig und das Bild $i(M)$ liegt dicht in $\hat{M}$. Der Kern $\ker i$ von i ist gleich $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, die Abbildung i ist also genau dann injektiv, wenn die lineare Topologie auf M hausdorffsch ist.

Ein Modul M heißt **vollständig in der linearen Topologie bezüglich $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$** , wenn die Abbildung i ein Isomorphismus der topologischen Moduln M (lineare Topologie, siehe Definition II.(1.1)) und $\hat{M}$ ist. Also ist $\hat{M}$ selbst vollständig.

Ist $M = \mathcal{H}$ und sind die M_λ zweiseitige Ideale, dann ist die Vervollständigung $\hat{\mathcal{H}}$ ein Ring, da dann alle M/M_λ Ringe sind und $\hat{M}$ der inverse Limes von Ringen ist.

Beweis: Vergleiche [Mat86, Kapitel 8]. Der Kern der Projektion p_μ besteht aus allen Elementen $\hat{x} = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \varprojlim M/M_\lambda$, für die $x_\mu \in M_\mu$ ist, ist also ein $\mathcal{H}$ -Untermodul. Ist $\lambda \leq \mu$, dann ist $M_\lambda \supseteq M_\mu$, und da $\hat{x}$ im inversen Limes $\hat{M}$ liegt, folgt aus $x_\mu \in M_\mu$ sofort $x_\lambda \in M_\lambda$, da $x_\lambda + M_\lambda$ das Bild von $x_\mu + M_\mu$ unter der Restklassenvergrößerung $M/M_\mu \rightarrow M/M_\lambda$ ist. Also ist durch das System $\{\ker p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine lineare Topologie auf $\varprojlim M/M_\lambda$ definiert.

Da jeder Faktor im direkten Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} M/M_\lambda$ mit der diskreten Topologie versehen ist, ist das System der Mengen

$$N_{x,\mu} := \prod_{\lambda \neq \mu} M/M_\lambda \times \{x + M_\mu\} = \left\{ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M/M_\lambda \mid x_\mu = x \right\},$$

wobei x durch M läuft und μ durch Λ , eine Subbasis der Produkttopologie. Also sind die Schnitte $N_{x,\mu} \cap \hat{M}$ eine Subbasis der Teilraumtopologie auf $\hat{M}$.

Für ein $\hat{x} = (x_\lambda + M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \hat{M}$ gilt nun

$$\hat{x} + \ker p_\mu = N_{x,\mu} \cap \hat{M}.$$

Da aber die Mengen $\hat{x} + \ker p_\mu$ für $\hat{x} \in \hat{M}$ und $\mu \in \Lambda$ eine Basis der linearen Topologie auf $\hat{M}$ bilden, stimmen beide Topologien überein.

Da die Projektion p_μ surjektiv ist, ist der Quotient $\hat{M}/\ker p_\mu$ isomorph zu M/M_μ . Konstruiert man also die Vervollständigung von $\hat{M}$ bezüglich der linearen Topologie, dann erhält man wieder $\hat{M}$. Also ist $\hat{M}$ als topologischer $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zu seiner Vervollständigung bezüglich der linearen Topologie.

Die kanonische lineare Abbildung $i : M \rightarrow \hat{M}$, die also $m \in M$ als $i(m) = (m + M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ einbettet, ist stetig, da die Verkettung $p_\mu \circ j \circ i$ von i mit der Inklusion $j : \hat{M} \rightarrow \prod M/M_\lambda$ der Vervollständigung ins direkte Produkt gefolgt von der Projektion p_μ auf den Faktor M/M_μ stetig ist für alle μ (hier benutzen wir wie in II.(3.4) die universellen Eigenschaften der Teilraum- bzw. der Produkttopologie). Das Bild $i(M)$ von i liegt dicht in $\hat{M}$. Sind nämlich $\hat{x} = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \hat{M}$ und eine Umgebung $\hat{x} + \ker p_\mu$ gegeben, dann liegt $i(x_\mu)$ in dieser Umgebung von $\hat{x}$.

Alle anderen Aussagen folgen direkt. $\square$

(1.4) Proposition (Vervollständigung und Teilmoduln, vgl. [Mat86, Kapitel 8])

Die Bezeichnungen seien wie in Definition II.(3.1). Ist $N \subseteq M$ ein Teilmodul, dann sind die Teilraumtopologie von N in M und die Quotiententopologie auf M/N lineare Topologien, gegeben durch die Systeme $\{N \cap M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ bzw. $\{(M_\lambda + N)/N \mid \lambda \in \Lambda\}$. Die folgenden Vervollständigungen sind jeweils mit diesen Topologien zu verstehen.

Die kurze, exakte Sequenz $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$ induziert im inversen Limes die exakte Sequenz $0 \rightarrow \hat{N} \rightarrow \hat{M} \rightarrow \widehat{M/N}$, wobei die letzte Abbildung surjektiv ist, wenn die Topologie eine I -adische ist (I ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$). Wir können also $\hat{N}$ als Untermodul von $\hat{M}$ auffassen. Es ist $\hat{N}$ genau der topologische Abschluss von $i(N)$ in $\hat{M}$.

Außerdem ist **Vervollständigen ein Funktor**: Sind M und M' mit linearen Topologien versehen, dann gibt es zu jedem stetigen Homomorphismus $f : M \rightarrow M'$ genau einen stetigen Homomorphismus $\hat{f} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}'$, der mit den kanonischen Abbildungen $M \rightarrow \hat{M}$ und $M' \rightarrow \hat{M}'$ insofern verträglich ist, als das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ \hat{M} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{M}' \end{array}$$

kommutativ ist. Sind M und M' Ringe (und die Nullumgebungen für die lineare Topologie zweiseitige Ideale, so dass $\hat{M}$ und $\hat{M}'$ ebenfalls Ringe sind) und ist f ein stetiger Ringhomomorphismus, dann ist auch $\hat{f}$ ein stetiger Ringhomomorphismus.

Beweis: Vgl. [Mat86, Kapitel 8]. Bereits in A.(1.2) wurde bewiesen, dass die lineare Topologie auf N aus Proposition A.(1.4) gleich der Teilraumtopologie und die lineare Topologie auf M/N gleich der Quotiententopologie ist.

Wir setzen $N_\lambda := N \cap M_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ ist N/N_λ ein Untermodul von M/M_λ , also bettet das direkte Produkt $\prod N/N_\lambda$ in das direkte Produkt $\prod M/M_\lambda$ ein und die Bedingung, im inversen Limes $\varprojlim N/N_\lambda$ bzw. $\varprojlim M/M_\lambda$ zu sein, passt zusammen, so dass die Inklusion $N \subseteq M$ also eine Inklusion $\hat{N} \subseteq \hat{M}$ induziert. Beide Vervollständigungen sind nach A.(1.2) mit linearen Topologien versehen. Da der Kern der Projektion $\hat{N} \rightarrow N/N_\lambda$ für alle λ jeweils gleich dem Schnitt des Kerns der Projektion $\hat{M} \rightarrow M/M_\lambda$ mit N ist, ist die lineare Topologie von $\hat{N}$ gleich der Teilraumtopologie, die von der linearen Topologie auf $\hat{M}$ her kommt (man benutze wieder A.(1.2)). Insbesondere ist also die Inklusionsabbildung $\hat{N} \hookrightarrow \hat{M}$ stetig.

Ein Element $(x_\lambda + M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ liegt genau dann in $\hat{N}$, wenn es zu jedem x_λ ein $m_\lambda \in M_\lambda$ gibt mit $x_\lambda + m_\lambda \in N$. Zusammen mit den Argumenten in A.(1.2) zum topologischen Abschluss bei linearen Topologien folgt deswegen, dass $\hat{N}$ gleich dem topologischen Abschluss $\bar{N} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (N + \ker p_\lambda)$ von N in $\hat{M}$ ist, wobei p_λ die Projektion von $\hat{M}$ auf M/M_λ ist.

Für M/N und seine Vervollständigung seien die Mengen $(M_\lambda + N)$ jeweils mit L_λ bezeichnet. Die Vervollständigung von M/N ist also eine Teilmenge des direkten Produkts $\prod M/L_\lambda$, da jeweils $(M/N)/(L_\lambda/N) \cong M/L_\lambda$ gilt. Die kanonische Abbildung $M \twoheadrightarrow M/N$ induziert nun auf jeder Komponente M/M_λ des direkten Produkts $\prod_{\lambda \in \Lambda} M/M_\lambda$ eine surjektive Abbildung nach M/L_λ . Setzt man diese Abbildungen alle zusammen und schränkt auf $\hat{M}$ ein, erhält man eine Abbildung π von $\hat{M}$ nach $\widehat{M/N}$, da die Bedingung, im inversen Limes $\varprojlim M/L_\lambda$ zu liegen, für Bilder von Elementen aus $\hat{M}$ automatisch erfüllt ist. Der Kern von π ist genau das Bild der Inklusion $\hat{N} \subseteq \hat{M}$, so dass also die Sequenz aus der Proposition exakt ist. Die Abbildung π ist allerdings nicht unbedingt surjektiv.

Ist andererseits die Indexmenge Λ gleich $\mathbb{N}$, dann ist π surjektiv: Ist nämlich $\hat{x} = (x_i + L_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \widehat{M/N}$, dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, dass $x_{i+1} - x_i \in L_i = N + M_i$ ist. Also können wir induktiv durch $y_1 := x_1$ und $y_i := x_i + n_i$ für gewisse $n_i \in N$ ein $\hat{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \hat{M}$ finden, das ein Urbild von $\hat{x}$ unter der kanonischen Abbildung $\hat{M} \twoheadrightarrow \widehat{M/N}$ ist.

Es sei nun M' ein zweiter $\mathcal{H}$ -Modul, der seinerseits mit einer linearen Topologie bezüglich des Systems $\{M'_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ von Untermoduln versehen ist. Weiter sei $f : M \rightarrow M'$ ein stetiger $\mathcal{H}$ -Modulhomomorphismus. Dann existiert zu jedem $\gamma \in \Gamma$ ein $\lambda \in \Lambda$, so dass $M_\lambda \subseteq f^{-1}(M'_\gamma)$ ist. Wir setzen $\varphi_\gamma : \hat{M} \rightarrow M'/M'_\gamma$ als Verkettung der kanonischen Abbildung $\hat{M} \twoheadrightarrow \hat{M}/\ker p_\lambda \cong M/M_\lambda$ mit der Abbildung $M/M_\lambda \rightarrow M'/M'_\gamma$, die durch f induziert ist. Die Abbildung φ_γ hängt nicht von der Wahl von λ ab (solange $M_\lambda \subseteq f^{-1}(M'_\gamma)$ ist, also λ „groß genug“). Außerdem passen die φ_γ mit den Restklassenvergrößerungen zusammen, für $\gamma < \delta$ kann man nämlich λ so groß wählen dass $M_\lambda \subseteq f^{-1}(M'_\gamma) \cap f^{-1}(M'_\delta) = f^{-1}(M'_\delta)$ ist. Dann folgt, dass $\varphi_\gamma = \pi \circ \varphi_\delta$ ist, wobei π die Restklassenvergrößerung $M'/M'_\delta \twoheadrightarrow M'/M'_\gamma$ ist. Das System $\{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ induziert dann eine eindeutige stetige Abbildung $\hat{f} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}'$, für die $q_\gamma \circ \hat{f} = \varphi_\gamma$ für alle γ ist, wobei $q_\gamma : \hat{M}' \twoheadrightarrow M'/M'_\gamma$ die Projektion ist. Nach Konstruktion gilt $i \circ f = \hat{f} \circ i$, wobei i für die beiden kanonischen Abbildungen $M \rightarrow \hat{M}$ und $M' \rightarrow \hat{M}'$ steht. Da das Bild $i(M)$ in $\hat{M}$ dicht liegt, ist $\hat{f}$ durch $i \circ f = \hat{f} \circ i$ und Stetigkeit eindeutig bestimmt.

Sind M und M' Ringe, die Nullumgebungen M_λ und M'_γ zweiseitige Ideale und f ein stetiger Ringhomomorphismus, dann sind alle vorkommenden Abbildungen Ringhomomorphismen. $\square$

Bemerkung: Was hier quasi „zu Fuß“ gezeigt wurde, entspricht der Tatsache, dass der inverse Limes ein links-exakter Funktor von der Kategorie der inversen Systeme von $\mathcal{H}$ -Moduln in eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist, in der die Objekte „ $\mathcal{H}$ -Moduln über inversen Systemen“ sind. Ein solches Objekt ist ein $\mathcal{H}$ -Modul M zusammen mit einem inversen System von $\mathcal{H}$ -Moduln I_λ und Abbildungen $p_\lambda : M \rightarrow I_\lambda$. Die Morphismen in dieser Kategorie sind Abbildungen zwischen den Moduln, die die Projektionen in die inversen Systeme respektieren.

Wir wollen eine andere Möglichkeit präsentieren, mit der man die Vervollständigung konstruieren kann. Dazu benötigen wir das Konzept des „Netzes“. Diese Definition und die Aussagen danach stehen hier im Anhang, da sie für den weiteren Verlauf der Arbeit nicht benötigt werden.

(1.5) Definition (Netz, vgl. [vQ76, 5B])

Es sei X ein topologischer Raum. Ein **Netz in X** ist dann eine gerichtete Menge Γ zusammen mit einer Abbildung $\Gamma \rightarrow X$. In Analogie zu Folgen bezeichnen wir ein solches Netz x dann mit $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Folgen sind spezielle Netze mit $\Gamma = \mathbb{N}$.

Ein Netz $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ **konvergiert gegen einen Punkt $x \in X$** , wenn für jede Umgebung U von x ein $\delta \in \Gamma$ existiert, so dass $x_\gamma \in U$ ist für alle $\gamma \geq \delta$.

(1.6) Definition (Cauchy-Netz)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring, M ein $\mathcal{H}$ -Modul, Λ eine gerichtete Menge und $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein System von Untermoduln von M mit $M_\lambda \supseteq M_\mu$, wenn $\lambda \leq \mu$ ist. Ein Netz $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ in M heißt **Cauchy-Netz**, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein $\delta \in \Gamma$ existiert, so dass $x_\gamma - x_{\gamma'} \in M_\lambda$ ist für alle $\gamma, \gamma' \geq \delta$.

Bemerkung: Ist $\Gamma = \mathbb{N}$, dann entspricht diese Definition der einer Cauchy-Folge in der linearen Topologie.

(1.7) Proposition (Vollständigkeit mit Cauchy-Netzen)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring, M ein $\mathcal{H}$ -Modul, Λ eine gerichtete Menge und $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein System von Untermoduln von M mit $M_\lambda \supseteq M_\mu$, wenn $\lambda \leq \mu$ ist. Weiter sei $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{0\}$, so dass also die lineare Topologie auf M bezüglich $\{M_\lambda\}$ hausdorffsch ist.

Dann ist M genau dann vollständig im Sinne von II.(3.1), wenn jedes Cauchy-Netz in M gegen ein Element von M konvergiert. Die Vervollständigung $\hat{M}$ von M ist als $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zum Raum der Cauchy-Netze in M mit Indexmenge Λ modulo der Cauchy-Netze in M mit Indexmenge Λ , die gegen 0 konvergieren.

Beweis: Es sei zunächst die kanonische Inklusion $i : M \rightarrow \hat{M}$ ein Isomorphismus topologischer $\mathcal{H}$ -Moduln, also M vollständig im Sinne von Definition II.(3.1), und $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ein Cauchy-Netz in M . Zu zeigen ist, dass $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ einen Grenzwert $m \in M$ hat. Dazu betrachten wir folgendes Element $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$: Da $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ein Cauchy-Netz ist, gibt es zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein $\delta \in \Gamma$, so dass $x_\gamma - x_{\gamma'} \in M_\lambda$ ist für alle $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ mit $\gamma, \gamma' \geq \delta$. Wir setzen $m_\lambda := x_\gamma + M_\lambda$ für ein (und damit jedes) $\gamma \geq \delta$. Dadurch ist $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Element von $\hat{M}$: Sind nämlich $\lambda, \mu \in \Lambda$ beliebig mit $\lambda \leq \mu$ (also $M_\lambda \supseteq M_\mu$) und $\pi : M/M_\mu \rightarrow M/M_\lambda$ die Restklassenvergrößerung, so ist $\pi(m_\mu) = m_\lambda$, denn $\pi(m_\mu) = \pi(x_\gamma + M_\mu) = x_\gamma + M_\lambda = m_\lambda$ für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \geq \delta$ und $\gamma \geq \delta(\mu)$. Da i ein Isomorphismus ist, gibt es ein $m \in M$ mit $i(m) = (m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Also gilt für jedes $\lambda \in \Lambda$, dass $m + M_\lambda = m_\lambda = x_\gamma + M_\lambda$ für alle $\gamma \geq \delta(\lambda)$ ist. Damit ist gezeigt, dass $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ in M gegen m konvergiert.

Es gelte nun in M , dass jedes Cauchy-Netz einen Grenzwert hat. Zu zeigen ist, dass die Inklusion $i : M \rightarrow \hat{M}$ (beachte $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{0\}$) surjektiv ist. Sei also $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \hat{M}$ beliebig. Dann wählen wir ein Netz mit Indexmenge Λ , indem wir für jedes λ einen beliebigen Nebenklassenvertreter $y_\lambda \in M$ mit $y_\lambda + M_\lambda = m_\lambda$ (Auswahlaxiom!) wählen. Dann ist $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Cauchy-Netz: Für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt nämlich für $\mu, \mu' \in \Lambda$ mit $\mu, \mu' \geq \lambda$, dass $y_\mu - y_{\mu'} \in M_\lambda$, weil $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \hat{M}$ ist. Also

hat $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ einen Grenzwert $m \in M$. Für diesen gilt: Für jedes $\lambda \in \Lambda$ existiert ein $\mu \in \Lambda$, so dass $y_\nu \in m + M_\lambda$ ist für alle $\nu \in \Lambda$ mit $\nu \geq \mu$. Wir wählen ohne Einschränkung $\mu \geq \lambda$ und bezeichnen die Restklassenvergrößerung $M/M_\mu \rightarrow M/M_\lambda$ mit π . Dann ist aber $m + M_\lambda = y_\mu + M_\lambda = \pi(y_\mu + M_\mu) = \pi(m_\mu) = m_\lambda$. Also ist m ein Urbild von $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ unter i . Damit haben wir die Surjektivität von i gezeigt.

Das direkte Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} M$ ist ein $\mathcal{H}$ -Modul. Wir betrachten darin den Untermodul C der Cauchy-Netze in M mit Indexmenge Λ und darin den Untermodul N der Netze in M , die gegen 0 konvergieren. Es ist zu zeigen, dass der Quotient C/N als $\mathcal{H}$ -Modul isomorph zu $\hat{M}$ ist. Wir verzichten absichtlich auf die Angabe einer Topologie auf C/N , siehe dazu die Bemerkung im Anschluss an diesen Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung $\varphi : \hat{M} \rightarrow C/N$: Ist $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein beliebiges Element in $\hat{M}$, dann können wir wie oben für jedes $\lambda \in \Lambda$ zu $m_\lambda \in M/M_\lambda$ ein $y_\lambda \in M$ wählen mit $y_\lambda + M_\lambda = m_\lambda$. Wir setzen dann

$$\varphi((m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) := (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} + N \in C/N.$$

Offenbar ist $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Cauchy-Netz, da für $\mu, \mu' \in \Lambda$ mit $\mu, \mu' \geq \lambda$ gilt, dass $y_\mu - y_{\mu'} \in M_\lambda$ ist. Dies ergibt eine wohldefinierte Abbildung: Ist nämlich $(y'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine andere Wahl mit $y'_\lambda + M_\lambda = m_\lambda$, dann ist $(y_\lambda - y'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz, das gegen Null konvergiert, also in N liegt. Offenbar ist φ ein $\mathcal{H}$ -Modul-Homomorphismus.

Wir zeigen nun, dass φ injektiv ist: Sei nämlich $\varphi((m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in M , das gegen Null konvergiert. Das bedeutet, dass für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein $\mu \in \Lambda$ existiert, so dass für alle $\nu \geq \mu \in \Lambda$ gilt, dass $y_\nu \in M_\lambda$ ist. Wählen wir $\nu > \lambda$, dann ist $m_\nu \in M_\lambda/M_\nu$ und damit $m_\lambda = 0 \in M/M_\lambda$ als homomorphes Bild von $m_\nu + M_\nu$ unter Restklassenvergrößerung. Da diese Argumentation für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt, ist $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = 0$.

Wir zeigen nun, dass φ surjektiv ist: Dazu konstruieren wir eine Abbildung $\psi : C \rightarrow \hat{M}$, so dass ψ auf den Nebenklassen von N konstant ist. Sei nämlich $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Cauchy-Netz in M . Wie oben (Beginn des Beweises) finden wir ein $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, indem wir zu $\lambda \in \Lambda$ ein $\mu(\lambda) \in \Lambda$ wählen (ohne Einschränkung sei $\mu(\lambda) \geq \lambda$), so dass für alle $\nu, \nu' \geq \mu(\lambda)$ gilt, dass $y_\nu - y_{\nu'} \in M_\lambda$ ist, und setzen $m_\lambda := y_{\mu(\lambda)} + M_\lambda$ und $\psi((y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) := (m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Diese Abbildung ist auf den Nebenklassen von N in C konstant: Konvergiert nämlich die Differenz zweier Netze gegen 0, dann bekommt man für jedes von beiden für alle λ auf diese Weise jeweils dasselbe m_λ . Ist nun $\varphi((m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (y'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} + N$, also $y'_\lambda + M_\lambda = m_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, dann konvergiert das Netz $(y'_\lambda - y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ gegen Null: Zu $\lambda \in \Lambda$ wählen wir $\mu(\lambda) \in \Lambda$ wie oben. Dann gilt für alle $\nu \geq \mu(\lambda) \geq \lambda$, dass $y'_\nu - y_\nu = (y'_\nu - y_{\mu(\lambda)}) - (y_\nu - y_{\mu(\lambda)}) \in M_\lambda$ liegt, denn m_λ ist nach Konstruktion gleich $y_{\mu(\lambda)} + M_\lambda$ und $y'_\lambda + M_\lambda$ ist gleich m_λ . Der andere Summand $y'_\lambda - y_{\mu(\lambda)}$ liegt in M_λ , da $(y'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ Bild unter φ des Elements $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von $\hat{M}$ ist. Also ist $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Urbild von $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ unter φ . $\square$

Bemerkungen:

- Versieht man das direkte Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} M$ mit der Produkttopologie, C mit der Teilraumtopologie darin und C/N mit der Quotiententopologie, dann ist φ nicht offen! Die Offenheit von φ ist nämlich äquivalent zur Stetigkeit der Umkehrabbildung von φ . Da C/N aber die Quotiententopologie hat, ist diese genau dann stetig, wenn ψ stetig ist. Um die Stetigkeit von ψ zu betrachten, verwenden wir die universelle Eigenschaft der Topologie von $\hat{M}$ (siehe Proposition II.(3.4)). Demnach ist ψ genau dann stetig, wenn für alle $\lambda \in \Lambda$ die Abbildung $p_\lambda \circ j \circ \psi : C \rightarrow M/M_\lambda$ stetig ist (wir verwenden die Bezeichnungen aus II.(3.4)), wobei M/M_λ die diskrete Topologie hat. Es reicht zu untersuchen, ob das Urbild von $\{0\} \subseteq M/M_\lambda$ offen in C ist. Dieses besteht aus allen Cauchy-Netzen, die „schließlich in M_λ “ liegen. Es gibt aber keine offene Menge in der Produkttopologie von $\prod_{\lambda \in \Lambda} M$, deren Schnitt mit C komplett im Urbild von $\{0\} \subseteq M/M_\lambda$ liegt, da offene Mengen im Produkt immer nur Vereinigungen von Mengen sind, die kartesische Produkte sind, in denen fast alle Faktoren ganz M sind. Also ist ψ nicht stetig und damit ist φ nicht offen. Diese Topologie auf C/N ist also offenbar nicht „die richtige“!

- In dieser Proposition kommt man in Wirklichkeit mit Folgen statt Netzen aus, solange jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis hat. Erst wenn die Indexmenge Λ keine kofinale Teilfolge besitzt (das ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\lambda \in \Lambda$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $f(n) \geq \lambda$), hat in der linearen Topologie auf M nicht mehr jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis.

(1.8) Korollar (Vollständigkeit bei der I -adischen Topologie)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Ring, M ein $\mathcal{H}$ -Modul und I ein echtes, zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n = \{0\}$. Dann spezialisiert die Vervollständigung $\hat{M}$ aus Proposition II.(3.1) laut Proposition A.(1.7) zum Raum der Cauchy-Folgen in M modulo der Nullfolgen. $\square$

A.2 Nicht-diskrete Bewertungen auf $\mathbb{Z}[v]$

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einem Teil der Fälle aus Abschnitt III.(2.3), nämlich denjenigen, in denen das Höhe-2-Primideal von der Primzahl ℓ und dem Erzeuger von $\mathfrak{q}$ erzeugt wird. In diesen Fällen sind andere Beweise möglich, die ein anderes Licht auf die Situation werfen. Deswegen ist dieser Abschnitt für sich interessant, obgleich er für den weiteren Fortgang der Arbeit entbehrlich wäre.

(2.1) Definition (Additive Bewertungen auf $\mathbb{Q}$, vgl. [Mül80, 10.1])

Es sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Jedes Element $0 \neq z \in \mathbb{Q}$ kann eindeutig in der Form

$$z = \ell^k \cdot \frac{s}{t} \quad \text{mit} \quad k, s \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad \ell, s, t \text{ paarweise teilerfremd}$$

geschrieben werden. Wir definieren damit die ℓ -adische Bewertung:

$$\begin{aligned} v_\ell : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ z &\mapsto k, \text{ falls } z = \ell^k \cdot \frac{s}{t} \text{ wie oben} \\ 0 &\mapsto \infty \end{aligned}$$

Wir nennen v_ℓ die ℓ -adische Bewertung von $\mathbb{Q}$.

(2.2) Proposition (Eindeutige Fortsetzung von v_ℓ auf $\mathbb{Q}[v]/f\mathbb{Q}[v]$, vgl. [Mül80, 10.4 und 10.5])

Es sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und v eine Unbestimmte. Weiter sei f ein normiertes, irreduzibles Polynom vom Grad n aus $\mathbb{Z}[v]$, dessen Bild unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z}[v] \rightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ irreduzibel in $\mathbb{F}_\ell[v]$ ist. Der Erweiterungskörper $\mathbb{Q}[v]/f\mathbb{Q}[v]$ von $\mathbb{Q}$ sei mit K bezeichnet.

Dann gibt es genau eine Bewertung $\tilde{v}_\ell : K \rightarrow \mathbb{Z}$, die die ℓ -adische Bewertung v_ℓ von $\mathbb{Q}$ fortsetzt. Diese ist durch die Formel

$$\tilde{v}_\ell(g + f\mathbb{Z}[v]) := \min \{v_\ell(g_0), \dots, v_\ell(g_{n-1})\} \quad \text{mit } g = \sum_{i=0}^{n-1} g_i v^i \text{ und } g_i \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.1})$$

zunächst als Bewertung auf $R := \mathbb{Z}[v]/f\mathbb{Z}[v]$ gegeben. Der Ring R ist aber ein Teilring von K mit Quotientenkörper K , so dass $\tilde{v}_\ell$ vermöge Lemma II.(1.6).(v) auf K definiert ist.

Beweis: Da f als in $\mathbb{Z}[v]$ irreduzibles Polynom auch über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist (Gaußsches Lemma, siehe z.B. [Jac74, 2.16, Lemma 2]), ist K ein Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Die Menge

$$M := \{g + f\mathbb{Q}[v] \in \mathbb{Q}[v]/f\mathbb{Q}[v] \mid g \in \mathbb{Z}[v]\}$$

ist ein Teilring von $\mathbb{Q}[v]/f\mathbb{Q}[v]$. Er ist isomorph zu $R = \mathbb{Z}[v]/f\mathbb{Z}[v]$, da die Verkettung der Inklusion $\mathbb{Z}[v] \hookrightarrow \mathbb{Q}[v]$ mit der kanonischen Projektion $\mathbb{Q}[v] \twoheadrightarrow \mathbb{Q}[v]/f\mathbb{Q}[v]$ als Kern $f\mathbb{Z}[v]$ hat (ein ganzzahliges Polynom g lässt sich ganzzahlig mit Rest durch f teilen, weil f normiert ist). Damit ist R ein Integritätsbereich.

Wir definieren nun $\tilde{v}_\ell$ zunächst auf $R \cong \mathbb{Z}[v]/f\mathbb{Z}[v]$ durch Gleichung A.1. Dies geht, da jede Nebenklasse $g + f\mathbb{Z}[v]$ ein eindeutiges $g \in \mathbb{Z}[v]$ vom Grad kleiner als n enthält. Wir haben dadurch zunächst eine Funktion auf R mit Werten in $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiert, die v_ℓ fortsetzt (ganze Zahlen werden als konstante Polynome eingebettet).

Offenbar ist $\tilde{v}_\ell(g + f\mathbb{Z}[v])$ genau dann gleich ∞ , wenn $g + f\mathbb{Z}[v] = 0 + f\mathbb{Z}[v]$ ist. Außerdem erbt $\tilde{v}_\ell$ die Minimumungleichung von v_ℓ :

$$\tilde{v}_\ell((g + f\mathbb{Z}[v]) + (g' + f\mathbb{Z}[v])) \geq \min\{\tilde{v}_\ell(g + f\mathbb{Z}[v]), \tilde{v}_\ell(g' + f\mathbb{Z}[v])\}.$$

Es bleibt die Multiplikativität zu zeigen. Dazu betrachten wir zunächst zwei Polynome $g, g' \in \mathbb{Z}[v]$ vom Grad kleiner n mit $\tilde{v}_\ell(g + f\mathbb{Z}[v]) = 0 = \tilde{v}_\ell(g' + f\mathbb{Z}[v])$ bei denen also jeweils mindestens ein Koeffizient nicht durch ℓ teilbar ist. Wir wollen $\tilde{v}_\ell(g \cdot g' + f\mathbb{Z}[v]) = 0$ zeigen. Da aber R isomorph zu $\mathbb{Z}[v]/f\mathbb{Z}[v]$ ist und $\ell + f\mathbb{Z}[v]$ in diesem Ring ein Primideal erzeugt (vergleiche Proposition III.(1.2)), folgt, dass $\tilde{v}_\ell(g \cdot g' + f\mathbb{Z}[v])$ nicht größer als 0 ist, da sonst $g + f\mathbb{Z}[v]$ und $g' + f\mathbb{Z}[v]$ zwei Elemente in $R \setminus \ell R$ wären, deren Produkt in ℓR wäre. Man beachte, dass man hier nicht direkt das Gaußsche Lemma benutzen kann, da $\tilde{v}(g \cdot g' + f\mathbb{Z}[v])$ definiert ist, indem man $g \cdot g'$ mit Rest durch f teilt und auf den Rest Gleichung A.1 anwendet.

Damit folgt: Wenn $\tilde{v}_\ell(g + f\mathbb{Z}[v]) = i$ und $\tilde{v}_\ell(g' + f\mathbb{Z}[v]) = j$ ist, dann gilt $\tilde{v}_\ell(\ell^{-i}g + f\mathbb{Z}[v]) = 0$ und $\tilde{v}_\ell(\ell^{-j}g' + f\mathbb{Z}[v]) = 0$ und deswegen ist $\tilde{v}_\ell(g \cdot g' + f\mathbb{Z}[v]) = i + j$. Also ist $\tilde{v}_\ell$ eine Bewertung auf R , die $v_\ell|_{\mathbb{Z}}$ fortsetzt. Da man aber jedes Polynom aus $\mathbb{Q}[v]$ als Quotient eines Polynoms aus $\mathbb{Z}[v]$ und einer ganzen Zahl schreiben kann, ist der Quotientenkörper von R gleich K . Also können wir $\tilde{v}_\ell$ mit Lemma II.(1.6).(v) auf K fortsetzen.

Die Eindeutigkeit wird im Folgenden nicht verwendet, so dass wir hier nur die Beweisidee angeben. Da f bei Reduktion modulo ℓ irreduzibel bleibt, ist f auch über der ℓ -adischen Vervollständigung $\mathbb{Q}_\ell$ irreduzibel (der Restklassenkörper bleibt bei Vervollständigung gleich und man kann das Henselsche Lemma benutzen). Deswegen gibt es nach [Jac89, Theorem 9.14] genau eine Fortsetzung von v_ℓ auf $\mathbb{Q}[v]/f\mathbb{Q}[v]$. $\square$

Bemerkung: Im Weiteren schreiben wir $\tilde{v}(h + f\mathbb{Z}[v])$ auch für Polynome $h \in \mathbb{Z}[v]$, deren Grad größer als der von f ist. Deren Wert ist dann zu bestimmen, indem man h mit Rest durch f dividiert und Gleichung A.1 auf den Rest anwendet. Nichtsdestotrotz ist hiermit bewiesen, dass $\tilde{v}$ eine Bewertung auf $\mathbb{Q}[v]/f\mathbb{Q}[v]$ ist.

(2.3) Theorem (Fortsetzung von v_ℓ auf $\mathbb{Q}(v)$)

Es sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und v eine Unbestimmte. Weiter sei $\mathfrak{p} = \ell\mathbb{Z}[v] + f\mathbb{Z}[v]$ das von f und ℓ erzeugte Höhe-2-Primideal von $\mathbb{Z}[v]$, wobei f ein normiertes, irreduzibles Polynom aus $\mathbb{Z}[v]$ vom Grad n ist, dessen Bild unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z}[v] \rightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ irreduzibel in $\mathbb{F}_\ell[v]$ ist.

Dann gibt es eine (nicht-diskrete) Bewertung $v : \mathbb{Q}(v) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ auf $\mathbb{Q}(v)$, die die ℓ -adische Bewertung v_ℓ auf $\mathbb{Q}$ fortsetzt, so dass das maximale Ideal des Bewertungsringes über $\mathfrak{p}$ liegt.

Bemerkungen:

- Die abelsche Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei lexikographisch geordnet: $(a, b) > (a', b')$, wenn entweder $a > a'$ ist oder $a = a'$ und $b > b'$ gilt.
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ seien als Konstanten in $\mathbb{Q}(v)$ eingebettet.
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ seien durch $z \mapsto (0, z)$ nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (als geordnete Gruppe) eingebettet.
- „Fortsetzung“ von v_ℓ ist im Sinne dieser beiden Einbettungen zu verstehen.
- Der Bewertungsring von v sei mit $\mathcal{O} := \{x \in \mathbb{Q}(v) \mid v(x) \geq 0\}$ bezeichnet und sein maximales Ideal mit $\mathfrak{m} := \{x \in \mathbb{Q}(v) \mid v(x) > 0\}$.
- Der Ausdruck „ $\mathfrak{m}$ liegt über $\mathfrak{p}$ “ bedeutet, dass $\mathbb{Z}[v] \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ ist.

Beweis: Wegen Lemma II.(1.6).(v) reicht es, v auf $\mathbb{Z}[v]$ festzulegen. Sei also $0 \neq g \in \mathbb{Z}[v]$. Dann kann man g durch Division mit Rest (beachte, dass f normiert ist!) eindeutig in der folgenden Form schreiben: $g(v) = f^k \cdot (g_0 + g_1 f)$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $g_i \in \mathbb{Z}[v]$ mit $g_0 \neq 0$ und $\deg(g_0) < \deg(f)$. Wir setzen $v(g) := (k, \tilde{v}_\ell(g_0 + f\mathbb{Z}[v]))$ und $v(0) := \infty$, wobei $\tilde{v}_\ell$ die Fortsetzung von v_ℓ auf $\mathbb{Q}[v]/f\mathbb{Q}[v]$ aus Lemma A.(2.2) ist. Dies setzt v_ℓ im obigen Sinne fort.

Offenbar ist $v(g) = \infty$ dann und nur dann, wenn $g = 0$ ist. Zum Beweis der anderen beiden Eigenschaften einer Bewertung sei g wie oben und $h = f^j \cdot (h_0 + h_1 f)$ mit $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $h_i \in \mathbb{Z}[v]$ mit $h_0 \neq 0$ und $\deg(h_0) < \deg(f)$ geschrieben.

Da f normiert und irreduzibel ist, ist das von f erzeugte Ideal ein Primideal und damit f ein Primelement in $\mathbb{Z}[v]$. Also ist das Produkt zweier Polynome g_0 und h_0 , die vom Grad kleiner als f sind, nicht durch f teilbar. Dies beweist, dass die erste Komponente von $v(gh)$ gleich derjenigen von $v(g) + v(h)$ ist. Für die zweite Komponente verwendet man, dass $\tilde{v}_\ell$ nach Lemma A.(2.2) eine Bewertung auf $\mathbb{Z}[v]/f\mathbb{Z}[v]$ ist, dass also $\tilde{v}_\ell(g_0 h_0 + f\mathbb{Z}[v]) = \tilde{v}_\ell(g_0 + f\mathbb{Z}[v]) + \tilde{v}_\ell(h_0 + f\mathbb{Z}[v])$ ist.

Wir zeigen nun $v(g + h) \geq \min\{v(g), v(h)\}$:

Es ist $v(g) = (k, \tilde{v}_\ell(g_0 + f\mathbb{Z}[v]))$ und $v(h) = (j, \tilde{v}_\ell(h_0 + f\mathbb{Z}[v]))$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $v(g) \geq v(h)$, also entweder $k > j$, oder $k = j$ und $\tilde{v}_\ell(g_0 + f\mathbb{Z}[v]) \geq \tilde{v}_\ell(h_0 + f\mathbb{Z}[v])$. Im ersten Fall ist $v(g + h) = (j, \tilde{v}_\ell(h_0 + f\mathbb{Z}[v])) = v(h)$. Im zweiten Fall ist entweder $g + h$ durch f^{k+1} teilbar (wenn $g_0 = -h_0$ ist), oder es gilt

$$\begin{aligned} v(g + h) &= (j, \tilde{v}_\ell(g_0 + h_0 + f\mathbb{Z}[v])) \geq (j, \min\{\tilde{v}_\ell(g_0 + f\mathbb{Z}[v]), \tilde{v}_\ell(h_0 + f\mathbb{Z}[v])\}) \\ &= (j, \tilde{v}_\ell(h_0 + f\mathbb{Z}[v])) = v(h). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass v eine Bewertung auf $\mathbb{Z}[v]$ ist und somit nach Lemma II.(1.6).(v) eine eindeutige Fortsetzung auf $\mathbb{Q}(v)$ besitzt. Die Wertegruppe von v ist offenbar nicht zyklisch, also ist v nicht diskret.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{m}$ über $\mathfrak{p}$ liegt: Es gilt für jedes Element $g = \ell \cdot x + f \cdot y \in \mathfrak{p}$ mit $x, y \in \mathbb{Z}[v]$, dass $v(g) \geq \min\{v(\ell x), v(fy)\} \geq \min\{v(x) + (0, 1), v(y) + (1, 0)\} > (0, 0)$ ist, da $\mathbb{Z}[v]$ im Bewertungsring $\mathcal{O}$ liegt. Also gilt $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{Z}[v] \cap \mathfrak{m}$. Andererseits ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}[v]$ und $1 \notin \mathbb{Z}[v] \cap \mathfrak{m}$ wegen $v_\ell(1) = 0$. Also ist das Primideal $\mathbb{Z}[v] \cap \mathfrak{m}$ gleich $\mathfrak{p}$. $\square$

Wir wollen in dieser Situation Aussagen über den Restklassenkörper des Bewertungsring treffen. Sie sind im folgenden Lemma enthalten:

(2.4) Lemma (Isomorphie von Restklassenkörpern)

Es sei $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ der Ring der Laurent-Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und $\mathfrak{p} := \ell A + f A$ ein Primideal der Höhe zwei, wobei $\ell \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und f ein normiertes, irreduzibles Polynom ungleich v vom Grad n mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ ist, dessen Bild unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{Z}[v] \rightarrow \mathbb{F}_\ell[v]$ irreduzibel in $\mathbb{F}_\ell[v]$ ist (siehe Korollar III.(1.3)). Die Lokalisierung $A_{\mathfrak{p}}$ von A bei $\mathfrak{p}$ sei mit $\mathcal{O}$, das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ ebenfalls mit $\mathfrak{p}$ und der Restklassenkörper mit k bezeichnet.

Es sei $K := \mathbb{Q}(v)$ der Quotientenkörper von A und $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die nicht-diskrete Bewertung auf K , die in Theorem A.(2.3) definiert wurde. Es sei $\tilde{\mathcal{O}}$ der zugehörige Bewertungsring. Es ist dann $v(x) \geq (0, 0)$ für alle $x \in \mathcal{O}$ und $\mathfrak{p} = \text{rad } \mathcal{O} = \{x \in \mathcal{O} \mid v(x) > (0, 0)\}$, da $v(f) = (1, 0)$ und $v(\ell) = (0, 1)$ ist.

Weiter induziert die Inklusion $i : \mathcal{O} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ einen Isomorphismus der Restklassenkörper $k = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ und $\tilde{\mathcal{O}}/\text{rad } \tilde{\mathcal{O}}$.

Beweis: Nach Konstruktion in Theorem A.(2.3) nimmt v auf $\mathbb{Z}[v]$ und damit auf A nur Werte größer oder gleich $(0, 0)$ an, da $v(v) = (0, 0)$ ist, und es ist $\ell A + f A = \{x \in A \mid v(x) > (0, 0)\}$. Da $\mathcal{O}$ die Lokalisierung von A bei diesem Primideal ist, folgt sofort, dass $v(x) \geq (0, 0)$ ist für alle $x \in \mathcal{O}$ und dass $\mathfrak{p} = \{x \in \mathcal{O} \mid v(x) > (0, 0)\}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ ist.

Aus $\mathfrak{p} = \text{rad } \mathcal{O} = \{x \in \mathcal{O} \mid v(x) > (0, 0)\}$ folgt, dass i einen injektiven Homomorphismus des Restklassenkörpers $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ nach $\tilde{\mathcal{O}}/\text{rad } \tilde{\mathcal{O}}$ induziert. Um zu zeigen, dass dieser surjektiv ist, müssen wir

zu jedem Element $x \in \tilde{\mathcal{O}}$ mit $v(x) = (0, 0)$ ein Element $y \in \mathcal{O}$ angeben, so dass $v(x - y) > (0, 0)$ ist. Das Element x lässt sich, wie jedes Element von $K = \mathbb{Q}(v) = \text{Quot}(\mathbb{Z}[v])$, als ein Quotient zweier Polynome g und h aus $\mathbb{Z}[v]$ schreiben, wobei wir annehmen können, dass x „vollständig gekürzt“ ist, dass also insbesondere nicht sowohl g als auch h durch f teilbar sind. Wegen $v(g/h) = (0, 0)$ ist $v(g) = v(h)$, also sind g und h beide nicht durch f teilbar.

Es ist $\tilde{v}_\ell(v + f\mathbb{Z}[v]) = 0$ (siehe Proposition A.(2.2)) und damit gilt auch für jedes ganzzahlige Polynom q in v , dass $\tilde{v}_\ell(q + f\mathbb{Z}[v]) \geq (0, 0)$ ist. Deswegen ist $v(g) = v(h)$ von der Form $(0, z)$ mit einem $0 \leq z \in \mathbb{Z}$, für das $z = \tilde{v}_\ell(h + f\mathbb{Z}[v])$ ist (Erinnerung: dies ist definiert, indem man den Rest von h bei Division durch f betrachtet). Wenn h nicht im von f und ℓ erzeugten Primideal von $\mathbb{Z}[v]$ liegt, dann ist g/h in $\mathcal{O}$, und wir sind fertig mit $y = x$. Sonst ist h von der Form $h = \ell a + fb$ mit zwei Polynomen $a, b \in \mathbb{Z}[v]$, wobei a ohne Beschränkung der Allgemeinheit nicht durch f teilbar ist. In diesem Fall ersetzen wir g/h durch $g/(\ell a)$, was möglich ist, da

$$\begin{aligned} v\left(\frac{g}{h} - \frac{g}{\ell a}\right) &= v\left(\frac{g}{h} - \frac{g}{h - fb}\right) = v\left(\frac{g(h - fb) - gh}{h(h - fb)}\right) = v\left(\frac{gfb}{h\ell a}\right) \\ &= v(g) + v(f) + v(b) - v(h) - v(\ell a) = v(f) + v(b) - v(\ell a) > (0, 0) \end{aligned}$$

ist (man beachte, dass $v(\ell a) < (1, 0)$ ist, da a nicht durch f teilbar ist, und damit $v(f) > v(\ell a)$) ist. Es folgt, dass $v(g/(\ell a)) = (0, 0)$ ist, da $v(g/h) = (0, 0)$ ist (vgl. Lemma II.(1.6).(iii)).

Teilt man g mit Rest durch f , kann man es in der Form $c + fd$ schreiben mit ganzzahligen Polynomen c und d mit $\deg(c) < \deg(f)$. Hier kann man wieder $g/\ell a$ durch $c/\ell a$ ersetzen, da

$$v(g/(\ell a) - c/(\ell a)) = v((fd)/(\ell a)) > (0, 0)$$

ist.

Wieder ist $v(g) = v(c) = v(\ell a)$, weil $v(g/(\ell a)) = v(c/(\ell a)) = (0, 0)$ ist. Deswegen ist das ganzzahlige Polynom c durch ℓ teilbar und man kann kürzen. Dies funktioniert, bis alle Faktoren ℓ gekürzt sind. Dann ist der entstehende Bruch in $\mathcal{O}$. Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

A.3 Existenz von ganzzahligen Darstellungen

Dieser Abschnitt diskutiert Resultate, die für die Darstellungstheorie von Ordnungen über dem Ring $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ relevant sind. Etwas allgemeiner wird die Existenz von „ganzzahligen“ Darstellungen für Ordnungen über regulären, lokalen Ringen der Dimension kleiner oder gleich 2 behandelt. Dabei kommen homologische Methoden und Begriffe aus der kommutativen Algebra bzw. algebraischen Geometrie zum Einsatz. Die grundlegenden Definitionen werden kurz wiederholt.

In diesem Abschnitt lassen wir im Symbol für Homomorphismen-Mengen den Index durchgängig weg, wenn klar ist, welcher Grundring benutzt wird.

(3.1) Lemma ($\text{Hom}(M, N)$ ist endlich erzeugt)

Ist $\mathcal{O}$ ein kommutativer, noetherscher Ring und sind M und N endlich erzeugte $\mathcal{O}$ -Moduln, dann ist $\text{Hom}(M, N)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$ -Modul.

Beweis: Es sei $\pi_M : F_M \rightarrow M$ ein surjektiver Homomorphismus eines freien $\mathcal{O}$ -Moduls F_M auf M , wobei F_M den endlichen Rang m habe. Weiter sei $\pi_N : F_N \rightarrow N$ ein ebensolcher für N , wobei F_N den endlichen Rang n habe. Dann ist $\text{Hom}(F_M, F_N) \cong M_{m \times n}(\mathcal{O})$ endlich erzeugt.

Da F_M projektiv und π_N surjektiv ist, gibt es zu jedem $\varphi : M \rightarrow N$ ein $\tilde{\varphi} : F_M \rightarrow F_N$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_M & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & F_N \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

kommutativ ist und $\pi_N \circ \tilde{\varphi}$ auf $\ker \pi_M$ verschwindet. Umgekehrt induziert jedes $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}(F_M, F_N)$, für das $\pi_N \circ \tilde{\varphi}$ auf $\ker \pi_M$ verschwindet, einen Homomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$. Dies definiert einen $\mathcal{O}$ -Modulhomomorphismus von

$$\left\{ \tilde{\varphi} \in \text{Hom}(F_M, F_N) \mid \pi_N \circ \tilde{\varphi}|_{\ker \pi_M} = 0 \right\}$$

auf $\text{Hom}(M, N)$. Also ist $\text{Hom}(M, N)$ als Faktormodul eines Untermoduls des endlich erzeugten Moduls $\text{Hom}(F_M, F_N)$ selbst endlich erzeugt, da $\mathcal{O}$ noethersch ist. $\square$

(3.2) Definition (M -reguläre Folge vgl. [Mat86, Kapitel 6])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring und M ein $\mathcal{O}$ -Modul. Ein Element $a \in \mathcal{O}$ heißt **M -regulär**, wenn $ma \neq 0$ für alle $0 \neq m \in M$ gilt. Eine Folge $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ von Elementen von $\mathcal{O}$ heißt **M -regulär**, wenn gilt:

- (i) a_1 ist M -regulär, a_2 ist M/Ma_1 -regulär, $\dots$ und a_n ist $M/\sum_{i=1}^{n-1} Ma_i$ -regulär, und
- (ii) $M \neq \sum_{i=1}^n Ma_i$.

Eine M -reguläre Folge $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ heißt **maximal**, wenn kein Element $b \in \mathcal{O}$ existiert, so dass die Folge $(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ auch noch M -regulär ist.

(3.3) Definition (Tiefe, vgl. [Mat86, 16.7])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer, noetherscher Ring, I ein Ideal in $\mathcal{O}$ und M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$ -Modul mit $M \neq MI$. Dann heißt

$$\text{depth}(I, M) := n, \text{ mit } \text{Ext}_{\mathcal{O}}^i(\mathcal{O}/I, M) = 0 \text{ für } i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ und } \text{Ext}_{\mathcal{O}}^n(\mathcal{O}/I, M) \neq 0$$

die **I -Tiefe von M** . Ist $M = MI$, dann setzen wir $\text{depth}(I, M) := \infty$. Ist $\mathcal{O}$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, dann ist $\text{depth } \mathcal{O} := \text{depth}(\mathfrak{m}, \mathcal{O})$ und $\text{depth } M := \text{depth}(\mathfrak{m}, M)$ die **Tiefe** von M .

(3.4) Theorem (Tiefe und maximale reguläre Folgen vgl. [Mat86, 16.7])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer, noetherscher Ring, I ein Ideal von $\mathcal{O}$ und M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$ -Modul mit $M \neq MI$. Es sei $n := \text{depth}(I, M)$. Dann ist jede maximale M -reguläre Folge von Elementen aus I von der Länge n .

Beweis: Siehe [Mat86, 16.7]. $\square$

Bemerkung: Damit hätte man die Tiefe $\text{depth}(I, M)$ auch als maximale Länge einer M -regulären Folge von Elementen aus I definieren können.

(3.5) Theorem (Auslander-Buchsbaum, vgl. [Mat86, 19.1])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer, noetherscher, lokaler Ring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$ -Modul. Weiter sei die projektive Dimension $\text{proj dim } M$ endlich. Dann gilt:

$$\text{proj dim } M + \text{depth } M = \text{depth } \mathcal{O}.$$

Beweis: Siehe [Mat86, 19.1]. $\square$

(3.6) Proposition (Auslander-Goldman, vgl. [AG60, 4.7])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer, noetherscher, lokaler Ring und M und N endlich erzeugte $\mathcal{O}$ -Moduln, so dass $\text{Hom}(M, N) \neq 0$ ist.

Für $i = 1, 2$ gilt dann: Ist $\text{depth } N \geq i$, dann ist auch $\text{depth } \text{Hom}(M, N) \geq i$.

Beweis: Es sei $x \in \mathcal{O}$ keine Einheit und N -regulär. Dann ist

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\cdot x} N \longrightarrow N/Nx \longrightarrow 0$$

eine kurze, exakte Sequenz mit $N/Nx \neq 0$, da mit dem Nakayama-Lemma aus $x \in \text{rad } \mathcal{O}$ und $Nx = N$ (und damit $N \cdot \text{rad}(\mathcal{O}) = N$) folgen würde, dass $N = 0$ ist. Wendet man den links-exakten, kovarianten Hom-Funktor $\text{Hom}(M, -)$ an, so erhält man daraus die kurze, exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\cdot x} \text{Hom}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}(M, N/Nx) . \quad (*)$$

Das Element x ist also $\text{Hom}(M, N)$ -regulär. Es bleibt zu zeigen, dass $\text{Hom}(M, N) \cdot x \neq \text{Hom}(M, N)$ ist. Da aber $\text{Hom}(M, N)$ nach Lemma A.(3.1) mit M und N endlich erzeugt ist, kann man wie oben schließen:

Wenn $\text{Hom}(M, N) \cdot x = \text{Hom}(M, N)$ wäre, dann folgte wegen $x \in \text{rad } \mathcal{O}$ aus dem Nakayama-Lemma, dass $\text{Hom}(M, N) = 0$ wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\text{depth } \text{Hom}(M, N) \geq 1$.

Im Fall $\text{depth } N \geq 2$ sei nun zusätzlich y ein N/Nx -reguläres Element, das keine Einheit ist. Dann folgt genau wie oben, dass y auch $\text{Hom}(M, N/Nx)$ -regulär ist.

An der Sequenz (*) sieht man aber, dass $\text{Hom}(M, N)/(\text{Hom}(M, N) \cdot x)$ ein nicht-verschwindender Untermodul von $\text{Hom}(M, N/Nx)$ ist. Damit ist y erst recht $\text{Hom}(M, N)/(\text{Hom}(M, N) \cdot x)$ -regulär und für $\text{depth } \text{Hom}(M, N) \geq 2$ bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\text{Hom}(M, N) \cdot x + \text{Hom}(M, N) \cdot y \neq \text{Hom}(M, N)$$

ist: Da aber x und y in $\text{rad } \mathcal{O}$ liegen, greift wieder dasselbe Argument mit dem Nakayama-Lemma. $\square$

Bemerkung: Für höhere Tiefen von N funktioniert diese Beweisidee nicht mehr, da man zwar noch zeigen könnte, dass ein Element $z \in \mathcal{O}$, das kein Nullteiler von $N/(Nx + Ny)$ ist, auch kein Nullteiler von $\text{Hom}(M, N/(Nx + Ny))$ ist, aber $\text{Hom}(M, N)/(\text{Hom}(M, N)x + \text{Hom}(M, N)y)$ darin im Allgemeinen kein Teilmodul mehr ist.

(3.7) Korollar (Projektivität dualer Moduln, vgl. [AG60, Korollar zu Proposition 4.7])

Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer, regulärer, lokaler Ring der Dimension kleiner oder gleich 2 und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$ -Modul, für den der duale Modul $M^* := \text{Hom}(M, \mathcal{O}) \neq 0$ ist. Dann ist M^* ein $\mathcal{O}$ -projektiver Modul. Wenn M also reflexiv ist ($M = M^{**}$), dann ist M selbst projektiv.

Bemerkung: Ist M projektiv, dann ist M auch frei ($\mathcal{O}$ ist lokal, siehe z.B. [Mat86, 2.5]), also folgt $M = M^{**}$. Ein $\mathcal{O}$ -Modul M wie oben ist demnach genau dann reflexiv, wenn er projektiv ist.

Beweis: Da $\mathcal{O}$ regulärer, lokaler Ring ist, ist $\mathcal{O}$ per definitionem noethersch. Außerdem folgt mit [Kun85, V.5.15] die Gleichung $\text{depth } \mathcal{O} = \dim \mathcal{O}$. Dann ist nach Proposition A.(3.6) auch

$$\text{depth } \text{Hom}(M, \mathcal{O}) \geq \text{depth } \mathcal{O} .$$

Mit [Mat86, 19.2] folgt, dass $\text{proj dim } M < \infty$ ist, also gilt nach dem Theorem von Auslander und Buchsbaum (siehe Theorem A.(3.5)), dass

$$\text{proj dim } \text{Hom}(M, \mathcal{O}) = 0$$

und damit $\text{Hom}(M, \mathcal{O})$ projektiv ist. $\square$

(3.8) Lemma (Kern der Evaluationsabbildung $N \rightarrow N^{**}$)

Es sei $\mathcal{O}$ ein noetherscher Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und N ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$ -Modul. Dann definiert

$$\begin{aligned} e : N &\longrightarrow N^{**} = \text{Hom}(\text{Hom}(N, \mathcal{O}), \mathcal{O}) \\ n &\longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(n)) \end{aligned}$$

die sogenannte **Evaluationsabbildung** e . Der Kern von e ist der Torsionsmodul von N . Ist N also torsionsfrei, dann ist e injektiv und geht bei Konstantenerweiterung zu K in einen Isomorphismus über.

Beweis: Es sei j der $\mathcal{O}$ -Modulhomomorphismus $j : N \rightarrow K \otimes_{\mathcal{O}} N, n \mapsto 1_K \otimes n$. Jedes Torsionselement $n \in N$ wird offenbar unter e auf 0 abgebildet: Aus $nx = 0$ mit $x \neq 0$ folgt $0 = \varphi(nx) = \varphi(n)x$ und damit $\varphi(n) = 0$ für alle φ . Ist $n \in N$ kein Torsionselement, dann ist $j(n) = 1_K \otimes n \neq 0$ im K -Vektorraum $K \otimes_{\mathcal{O}} N$. Also gibt es eine K -Linearform von $K \otimes_{\mathcal{O}} N$ nach K , die auf $1_K \otimes n$ nicht verschwindet. Diese kann man mit einem Element von $\mathcal{O}$ multiplizieren, so dass sie auf den j -Bildern eines (endlichen) Erzeugendensystems von N Werte in $\mathcal{O}$ annimmt. Die Verkettung dieses Vielfachen mit j ist also ein $\mathcal{O}$ -Modulhomomorphismus $\varphi \in \text{Hom}(N, \mathcal{O})$, der auf n nicht verschwindet, und $e(n)$ ist ungleich 0. Ist N torsionsfrei, dann ist e also injektiv. Erweitert man die Konstanten zu K , dann erhält man $K \otimes_{\mathcal{O}} N$ und $K \otimes_{\mathcal{O}} N^{**} \cong \text{Hom}_K(\text{Hom}_K(K \otimes_{\mathcal{O}} N, K), K)$ und e wird zu $\text{id}_K \otimes e$, der Evaluationsabbildung des K -Vektorraums $K \otimes_{\mathcal{O}} N$. Also ist $\text{id}_K \otimes e$ ein Isomorphismus. $\square$

(3.9) Proposition (Existenz von $\mathcal{O}$ -Formen, vgl. [DPS98, Proposition (1.1.1)])

Es sei $\mathcal{O}$ ein regulärer, lokaler Ring der Dimension kleiner oder gleich 2 mit Quotientenkörper K und $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{O}$ -Ordnung mit Konstantenerweiterung $K\mathcal{H}$. Weiter sei M ein endlich erzeugter $K\mathcal{H}$ -Modul. Dann gibt es ein $\mathcal{H}$ -Gitter $\tilde{M} \subseteq M$, so dass $M = K \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{M}$ ist.

Beweis: Es sei $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ ein Erzeugendensystem von M und $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ eine Basis von $\mathcal{H}$. Dann ist das $\mathcal{O}$ -Erzeugnis N von $\{m_i b_j \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ und } j \in \{1, \dots, m\}\}$ ein $\mathcal{H}$ -Untermodul von M , dessen Konstantenerweiterung zu K ganz M ist.

Der $\mathcal{O}$ -Teilmodul N des K -Vektorraums M (aufgefasst als $\mathcal{O}$ -Modul) ist $\mathcal{O}$ -torsionsfrei, also ist die natürliche Einbettung von N in sein Bidual N^{**} durch die Evaluationsabbildung injektiv und nach Konstantenerweiterung zu K ein Isomorphismus (siehe Lemma A.(3.8), nach [Mat86, 14.3] ist $\mathcal{O}$ ein Integritätsbereich). Deswegen können wir den $\mathcal{O}$ -Modul $N^{**} \subseteq K \otimes_{\mathcal{O}} N^{**} \cong K \otimes_{\mathcal{O}} N = M$ mit einem $\mathcal{O}$ -Untermodul $\tilde{M}$ von M identifizieren und es gilt $K \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{M} = M$.

Wegen Korollar A.(3.7) ist $N^{**} \cong \tilde{M}$ ein $\mathcal{O}$ -projektiver (also $\mathcal{O}$ -freier) $\mathcal{H}$ -Modul. $\square$

Anhang B

Bezeichnungsindex

Die folgenden Buchstaben werden in der Regel so verwendet:		
A, R	Ringe	
$\mathcal{B}$	Basen	
χ, ρ	Charaktere	
e, f	Idempotente	
G	Gruppe	
$\mathcal{H}, \mathcal{H}'$	A -Algebra oder $\mathcal{O}$ -Algebra	
I	Ideal in einer Algebra	
K	Quotientenkörper von A bzw. $\mathcal{O}$	
k	Restklassenkörper	
ℓ	rationale Primzahl	
λ	Partitionen	VI.(3.2)
M, N	(Rechts-)Moduln	
$\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$	Ideale in kommutativen Ringen	
v	Bewertung	II.(1.5)
$\mathcal{O}, \mathcal{O}'$	lokale Ringe, häufig Bewertungsringe	
π	surjektiver Homomorphismus, Projektion	
S	Coxeter-Erzeugendensystem	
τ	Spurform	IV.(1.3)
φ, ψ	Homomorphismen	
v	Unbestimmte	
W	Coxetergruppe	
Symbole:		
$\emptyset$	leere Menge	
$\subseteq$	ist enthalten in	
$\supseteq$	enthält	
$\subsetneq$	ist echt enthalten in	
$\supsetneq$	enthält echt	
$\circ$	Verkettung von Abbildungen	I.(1.1)
$\circlearrowright$	kommutatives Diagramm	
$\hookrightarrow$	injektive Abbildung	
$\otimes_{\mathcal{O}}$	Tensorprodukt über $\mathcal{O}$	
$\twoheadrightarrow$	surjektive Abbildung	
$\cong$	Isomorphie	
$\equiv$	Kongruenz	
$\ - \ $	Norm	II.(2.1)
$(- -)$	Bilinearform	

$\langle - - \rangle$	Paarung zwischen $K_0(\mathcal{H})$ und $R_0(\mathcal{H})$	V.(1.12)
$\prod$	Produkt, bei Moduln direktes Produkt	
$\coprod$	Koprodukt, bei Moduln direkte Summe	
$\bigoplus$	direkte Summe von Moduln	
$\langle - \rangle_A$	A-Erzeugnis	
∞	Wert „unendlich“ bei Bewertungen	II.(1.5)
$\oplus$	direkte Summe	
$\triangleleft$	ist Ideal in	
$1_{\mathcal{H}}$	Einselement der Algebra $\mathcal{H}$	
$\varphi^{-1}(N)$	volles Urbild der Menge N unter φ	
$(A, K, G, \nu, \mathcal{O})$	Bewertungssystem	II.(1.8)
$A_{\mathfrak{p}}$	Lokalisierung des Rings A beim Primideal $\mathfrak{p}$	
$a(w)$	a-Wert des Elements w	VI.(5.3)
$(B_w)_{w \in W}$	Basis, indiziert durch W	
$(B_w^\vee)_{w \in W}$	duale Basis zur Basis $(B_w)_{w \in W}$	IV.(1.2)
bzw.	beziehungsweise	
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	
c_χ	Schur-Element zum Charakter χ	VI.(4.1)
$(C_w)_{w \in W}$	Kazhdan-Lusztig-Basis	VI.(5.1)
$(C'_w)_{w \in W}$	gestrichene Kazhdan-Lusztig-Basis	VI.(2.4)
$C(i, j, s, t)$	Siehe Kapitel IV	IV.(3.7)
$\mathcal{D}$	Menge der Duflo-Involutionen	VI.(5.3)
$(D_w)_{w \in W}$	duale Basis der Kazhdan-Lusztig-Basis	VI.(5.2)
$(D'_w)_{w \in W}$	duale Basis der gestrichenen Kazhdan-Lusztig-Basis	VI.(2.14)
D^λ	einfacher Modul für Iwahori-Hecke-Algebra Typ A	VI.(3.4)
$\mathcal{D}_L(s, t)$	Definitionsbereich der Links-Sternoperation zu $\{s, t\}$	VI.(3.16)
$\mathcal{D}_R(s, t)$	Definitionsbereich der Rechts-Sternoperation zu $\{s, t\}$	VI.(3.16)
$d_F^{F'}$	Konstantenerweiterung $R_0(\mathcal{H}) \rightarrow R_0(F'\mathcal{H})$	V.(1.16)
d_θ	Zerlegungsabbildung zur Spezialisierung θ	V.(2.2)
$\text{depth}(I, M)$	Tiefe eines Moduls M bezüglich eines Ideals I	A.(3.3)
$\det M$	Determinante der Matrix M	
$\delta_{x,y}$	Kronecker-Symbol	
E_d	d -reihige Einheitsmatrix	
$e_F^{F'}$	Konstantenerweiterung $K_0(\mathcal{H}) \rightarrow K_0(F'\mathcal{H})$	V.(1.17)
e_θ	Klebeabbildung zur Spezialisierung θ	V.(3.1)
$\text{emb dim } A$	Einbettungsdimension	II.(1.17)
$\text{End}_{\mathcal{H}}(M)$	Endomorphismen des $\mathcal{H}$ -Moduls M	
$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^i(M, N)$	Ext-Gruppe	A.(3.3)
$\varepsilon(h)$	Signumsdarstellung einer Iwahori-Hecke-Algebra	VI.(1.6)
$\mathbb{F}_\ell$	Körper mit ℓ Elementen	
$\text{GL}_n(q)$	Gruppe der invertierbaren Matrizen über $\mathbb{F}_q$	
$\text{gr}_m(A)$	graduierter Ring	II.(1.18)
$h_{x,y,z}$	Strukturkonstanten bezüglich der C-Basis	VI.(5.1)
$h'_{x,y,z}$	Strukturkonstanten bezüglich der C'-Basis	VI.(5.1)
$\mathcal{H}_{\mathcal{H}}$	regulärer Rechts- $\mathcal{H}$ -Modul	
$\mathcal{H}^*$	Dualraum von $\mathcal{H}$	IV.(1.4)
$\mathcal{H}_J$	parabolische Unteralgebra	VI.(6.1)
$\mathcal{H}_A(W, S, (a_s)_{s \in S})$	Iwahori-Hecke-Algebra zum Coxetersystem (W, S)	VI.(1.4)
$\mathcal{H}_A(W, S, v)$	generische Ein-Parameter-Iwahori-Hecke-Algebra	VI.(1.7)

$\text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N)$	Menge der $\mathcal{H}$ -Homomorphismen von M nach N	I.(1.1)
$I_T^{\mathcal{O}}$	Ideal zu Bewertung	II.(1.15)
$I_T^{\mathcal{H}}$	Ideal zu Norm	II.(2.6)
$I(\varphi)$	Mittelung von φ	IV.(1.6)
id_M	identische Abbildung $M \rightarrow M$	
$\text{Im } f$	Bild von f	
$\text{Ind}_{\mathcal{H}_J}^{\mathcal{H}} M$	induzierter Modul	VI.(6.5)
$\text{ind}(h)$	Indexdarstellung einer Iwahori-Hecke-Algebra	VI.(1.6)
$\text{Irr}(\mathcal{H})$	Menge der irreduziblen Charaktere von $\mathcal{H}$	
$\mathcal{J}$	Lusztigs asymptotische Algebra	VI.(5.3)
j	Involution auf $\mathcal{H}$	VI.(5.1)
$K\mathcal{H}$	Konstantenerweiterung	I.(3.2)
$\ker f$	Kern von f	
$K_0(\mathcal{H})$	Grothendieck-Gruppe der Kategorie $\text{proj-}\mathcal{H}$	V.(1.1)
$K_0^+(\mathcal{H})$	Teilmonoid der Klassen von Moduln in $K_0(\mathcal{H})$	V.(1.1)
Kopf	Kopf eines Moduls ist gleich dem Radikalfaktor	I.(1.1)
$\leq_L$	Links-Zellordnung	VI.(2.9)
$\sim_L$	Links-Zelleinteilung	VI.(2.9)
$\leq_{LR}$	zweiseitige Zellordnung	VI.(2.16)
$\sim_{LR}$	zweiseitige Zelleinteilung	VI.(2.16)
$l(w)$	(Coxeter-)Länge von w	VI.(1.4)
$\mathcal{L}(w)$	Links-Abstiegsmenge von w	VI.(3.14)
$\text{LC}^{(\Lambda)}$	Links-Zellmodul	VI.(2.12)
$\varprojlim M/M_\lambda$	inverser Limes	II.(3.1)
$\overline{M}_d(F)$	voller d -reihiger Matrixring über F	
$\hat{M}$	Vervollständigung von M	II.(3.1)
$M^\perp$	Orthogonalraum	IV.(2.3)
$\text{Maps}(\mathcal{H}, F[X])$	Halbgruppe der Abbildungen $\mathcal{H} \rightarrow F[X]$	V.(1.14)
$\max\{x, y\}$	Maximum der Menge $\{x, y\}$	
$\min\{x, y\}$	Minimum der Menge $\{x, y\}$	
$\text{mod-}\mathcal{H}$	Kategorie der endlich erzeugten Rechts- $\mathcal{H}$ -Moduln	I.(1.1)
$\mu(y, w)$	Koeffizient bei $v^{-1/2}$ in $P_{y,w}^*$	VI.(2.7)
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, $0 \notin \mathbb{N}$	
v_ℓ	ℓ -adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$	A.(2.1)
φ_e	e -tes Kreisteilungspolynom	
ϕ	Lusztig-Homomorphismus	VI.(5.4)
$P(\pi)$	linker Teil der Robinson-Schensted-Abbildung	VI.(3.5)
$P_{y,w}^*$	Kazhdan-Lusztig-Polynom	VI.(2.4)
$\text{Prod}(a, b; n)$	alternierendes Produkt	VI.(1.3)
$\text{proj-}\mathcal{H}$	Kategorie der projektiven Rechts- $\mathcal{H}$ -Moduln	I.(1.1)
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	
$\text{Quot}(A)$	Quotientenkörper des kommutativen Rings A	
$\leq_R$	Rechts-Zellordnung	VI.(2.9)
$\sim_R$	Rechts-Zelleinteilung	VI.(2.9)
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$R_0(\mathcal{H})$	Grothendieck-Gruppe der Kategorie $\text{mod-}\mathcal{H}$	V.(1.1)
$R_0^+(\mathcal{H})$	Teilmonoid der Klassen von Moduln in $R_0(\mathcal{H})$	V.(1.1)
$\mathcal{R}(w)$	Rechts-Abstiegsmenge von w	VI.(3.14)
$\text{rad}(\mathcal{O}), \text{rad}(M)$	Jacobson-Radikal eines Rings oder Moduls	I.(1.1)
$\text{RC}^{(\Gamma)}$	Rechts-Zellmodul	VI.(2.12)

ρ	regulärer Charakter einer Algebra	
S_n	symmetrische Gruppe auf n Punkten	
S^λ	Specht-Modul für Iwahori-Hecke-Algebra Typ A	VI.(3.4)
$\text{soc}(M)$	Sockel eines Moduls	
τ	Spurform einer Iwahori-Hecke-Algebra	VI.(1.5)
$(T_w)_{w \in W}$	T-Basis einer Iwahori-Hecke-Algebra	VI.(1.4)
$(\tilde{T}_w)_{w \in W}$	$\tilde{T}$ -Basis einer Iwahori-Hecke-Algebra	VI.(2.2)
$(t_w)_{w \in W}$	t-Basis der asymptotischen Algebra	VI.(5.3)
$\text{Tr}(\varphi)$	Spur eines Endomorphismus	
$[V]$	Isomorphieklasse des Moduls V	V.(1.1)
vgl.	vergleiche	
W_J	parabolische Untergruppe von W zu $J \subseteq S$	VI.(3.11)
$*w$	Bild von w unter Links-Sternoperation	VI.(3.16)
w^*	Bild von w unter Rechts-Sternoperation	VI.(3.16)
X_J	ausgezeichnete Rechts-Nebenklassenvertreter	VI.(3.12)
z_χ	zentrales Element zum Charakter χ	IV.(4.1)
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	
$\mathbb{Z}[v]$	Polynomring in einer Unbestimmten über $\mathbb{Z}$	
$\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$	Laurent-Polynomring in einer Unbestimmten	
$Z(\mathcal{H})$	Zentrum der Algebra $\mathcal{H}$	
ζ_e	primitive, e -te Einheitswurzel in C'	

Anhang C

Abbildungsverzeichnis

IV.1	Matrizen von Endomorphismen bezüglich der Basis (b_i) in Spaltenkonvention	57
VI.1	Rechtszellen-Poset für Typ A_3	84
VI.2	Mögliche Posets der Bruhat-Ordnung auf einer S_3 -Nebenklasse	91
VI.3	Poset der Rechtszellen für Typ A_4	109

Anhang D

Tabellenverzeichnis

VI.1	Verteilung der Gruppenelemente von $W = S_4$ auf die Rechtszellen	84
VI.2	Identifikation der Rechtszellen beim Typ A_4	108
VI.3	Zerlegungsmatrix für Typ A, $e = 3$, $\ell = 7$	109

Anhang E

Literaturverzeichnis

- [AG60] Maurice Auslander und Oscar Goldman. Maximal Orders. *Transactions of the American Mathematical Society*, 97:1–24, 1960. [A.\(3.6\)](#), [A.\(3.7\)](#)
- [AM69] Michael F. Atiyah und Ian G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusett, 1969. [III.\(1.2\)](#)
- [Ari96] Susumu Ariki. On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$. *J. Math. Kyoto Univ.*, 36(4):789–808, 1996. [VII.\(2.2\)](#), [VII.\(3.3\)](#), [VII.4](#)
- [BB81] Alexandre Beilinson und Joseph Bernstein. Localisation de g -modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(1):15–18, 1981. [VI.\(6.4\)](#)
- [BK81] Jean-Luc Brylinski und Masaki Kashiwara. Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. *Invent. Math.*, 64(3):387–410, 1981. [VI.\(6.4\)](#)
- [Bou64] Nicolas Bourbaki. *Algèbre Commutative*. Éléments de Mathématique. Hermann, 115, Boulevard Saint-Germain, Paris VI, 1964. [II.\(1.11\)](#), [II.\(1.13\)](#)
- [Bou70] Nicolas Bourbaki. *Algèbre 1–3*. Éléments de Mathématique. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970. [I.\(3.6\)](#)
- [Bra45] Richard Brauer. On hypercomplex arithmetic and a theorem of Speiser. In *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser*, Seiten 233–245. Füssli, Zürich, 1945. [IV.\(4.4\)](#)
- [BV82] Dan Barbasch und David Vogan. Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups. *Math. Ann.*, 259:153–199, 1982. [VI.\(3.7\)](#)
- [BV83] Dan Barbasch und David Vogan. Primitive ideals and orbital integrals in complex exceptional groups. *J. Algebra*, 80(2):350–382, 1983. [VI.\(6.4\)](#), [VI.\(6.5\)](#), [VI.\(6.6\)](#)
- [CN99] Frank Celler und Max Neunhöffer. *The XGAP 4 Manual*, 1999. (<http://www.gap-system.org/Share/xgap.html>). [VI.\(2.13\)](#), [VI.\(7.1\)](#)
- [CR62] Charles W. Curtis und Irving Reiner. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1962. [II.\(6.1\)](#)
- [CR81] Charles W. Curtis und Irving Reiner. *Methods of Representation Theory*, Band I. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1981. [I.\(1.3\)](#), [I.\(2.1\)](#), [I.\(2.4\)](#), [I.\(2.5\)](#), [I.\(2.6\)](#), [I.\(3.6\)](#), [I.\(3.6\)](#), [I.\(3.9\)](#), [I.\(3.10\)](#), [I.\(3.11\)](#), [II.\(3.11\)](#), [II.\(3.12\)](#), [II.\(4.1\)](#), [II.\(4.2\)](#), [II.\(4.3\)](#), [II.\(4.3\)](#), [II.\(5.1\)](#), [II.\(5.2\)](#), [II.\(5.3\)](#), [II.\(5.4\)](#), [II.\(5.5\)](#), [II.\(5.6\)](#), [II.\(5.7\)](#),

II.(5.9), II.(6.1), III.(2.6), III.3, IV.(1.4), IV.(1.5), IV.(2.1), IV.(2.3), IV.(2.4), IV.(2.4), IV.(3.1), IV.(3.3), IV.(3.4), IV.(3.6), IV.(4.1), IV.(4.3), V.(1.1), V.(1.2), V.(1.6), V.(1.7), V.(1.15), V.(5.3), VI.(6.6), VII.(1.4), VII.(2.2), VII.(2.3), VII.3

- [Cur88] Charles W. Curtis. Representations of Hecke algebras. *Astérisque*, 9(168):13–60, 1988. Orbites unipotentes et représentations, I. VI.(2.8)
- [dC91] Fokko du Cloux. *Coxeter, Version 1.01*, 1991.
(<http://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/ducloux/coxeter/coxeter.html>). VI.(7.4)
- [dC99] Fokko du Cloux. A transducer approach to Coxeter groups. *J. Symbolic Comput.*, 27(3):311–324, 1999. VI.(7.4)
- [DJ86] Richard Dipper und Gordon James. Representations of Hecke algebras of general linear groups. *Proc. London Math. Soc.* (3), 52:20–52, 1986. VI.3, VI.(3.1), VI.(3.3), VI.(3.4), VII.(2.7)
- [DPS98] Jie Du, Brian Parshall und Leonard Scott. Stratifying Endomorphism Algebras Associated to Hecke Algebras. *Journal of Algebra*, 203:169–210, 1998. A.(3.9)
- [Erd97] Karin Erdmann. Representations of $GL_n(K)$ and symmetric groups. In *Representation theory of finite groups (Columbus, OH, 1995)*, Band 6 aus *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, Seiten 67–84. de Gruyter, Berlin, 1997. Einleitung
- [Fei82] Walter Feit. *The Representation Theory of Finite Groups*, Band 25 aus *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1982. IV.(3.3), IV.(4.3), V.(3.3)
- [Fle93] Peter Fleischmann. On Lusztig’s isomorphism theorems for Hecke algebras and representation theory. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 47(3):450–472, 1993. VII.(3.6)
- [GAP02] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.3*, 2002.
(<http://www.gap-system.org>). VI.(2.13), VI.(7.1)
- [Gec] Meinolf Geck. On the Induction of Kazhdan-Lusztig Cells. To appear in *Bull. London Math. Soc.* VI.(6.4)
- [Gec98] Meinolf Geck. Representations of Hecke Algebras at Roots of Unity. *Asterisque*, Séminaire Bourbaki (1997/98), Exp. 836, 252:33–55, 1998. Einleitung, Einleitung, V.(5.2), VII, VII.(1.3), VII.(1.5), VII.(1.6), VII.(2.1), VII.(2.5), VII.(3.2), VII.(3.4)
- [Gec99] Meinolf Geck. The character table of the Iwahori-Hecke algebra of the symmetric group: Starkey’s rule. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(5):361–366, 1999. VII.(3.3)
- [Gec01] Meinolf Geck. Kazhdan-Lusztig cells, q -Schur algebras and James’ conjecture. *J. London Math. Soc.* (2), 63(2):336–352, 2001. VII.(3.3), VII.4
- [GHL⁺96] Meinolf Geck, Gerhard Hiss, Frank Lübeck, Gunter Malle und Götz Pfeiffer. CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 7:175–210, 1996. VI.(2.13), VI.(7.1)
- [Gol80] David M. Goldschmidt. *Lectures on Character Theory*, Band 8 aus *Mathematics Lectures Series*. Publish or Perish, Berkeley, 1980. V.(1.19), VII.(3.3)

- [GP00] Meinolf Geck und Götz Pfeiffer. *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras*, Band 21 aus *London Mathematic Society, New Series*. Oxford University Press, Oxford, 2000. [Einleitung](#), [IV.\(1.1\)](#), [IV.\(1.3\)](#), [IV.\(1.6\)](#), [IV.\(1.7\)](#), [IV.\(2.2\)](#), [IV.\(3.6\)](#), [IV.\(3.7\)](#), [IV.\(3.10\)](#), [V.\(1.14\)](#), [V.\(1.15\)](#), [V.\(1.16\)](#), [V.\(2.2\)](#), [V.\(2.5\)](#), [VI](#), [VI.1](#), [VI.\(1.1\)](#), [VI.\(1.2\)](#), [VI.\(1.4\)](#), [VI.\(1.5\)](#), [VI.\(1.6\)](#), [VI.\(1.7\)](#), [VI.\(1.8\)](#), [VI.2](#), [VI.\(2.1\)](#), [VI.\(2.2\)](#), [VI.\(2.3\)](#), [VI.\(2.4\)](#), [VI.\(2.4\)](#), [VI.\(2.5\)](#), [VI.\(2.6\)](#), [VI.\(2.8\)](#), [VI.\(2.10\)](#), [VI.\(3.11\)](#), [VI.\(3.12\)](#), [VI.\(4.1\)](#), [VI.\(5.1\)](#), [VI.\(6.1\)](#), [VI.\(6.2\)](#), [VI.\(6.5\)](#), [VI.\(6.6\)](#), [VII.\(1.1\)](#), [VII.\(3.6\)](#)
- [GR97] Meinolf Geck und Raphaël Rouquier. Centers and Simple Modules for Iwahori-Hecke algebras. In Marc Cabane, Herausgeber, *Finite Reductive Groups: Related Structures and Representations*, Band 141 aus *Progress in Mathematics*, Seiten 251–272, Boston, Basel, Berlin, 1997. Birkhäuser Verlag. [Einleitung](#), [V.\(1.12\)](#), [V.\(4.1\)](#)
- [GR01] Meinolf Geck und Raphaël Rouquier. Filtrations on projective modules for Iwahori-Hecke algebras. In *Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998)*, Seiten 211–221. de Gruyter, Berlin, 2001. [VI.5](#), [VI.\(5.6\)](#)
- [Gyo96] Akihiko Gyoja. Cells and modular representations of Hecke algebras. *Osaka J. Math.*, 33(2):307–341, 1996. [VI.\(3.22\)](#)
- [Iwa64] Nagayoshi Iwahori. On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 10:215–236 (1964), 1964. [Einleitung](#)
- [Jac74] Nathan Jacobson. *Basic Algebra*, Band I. W. H. Freeman and Company, New York, 1974. [III.\(1.1\)](#), [III.\(1.2\)](#), [A.\(2.2\)](#)
- [Jac89] Nathan Jacobson. *Basic Algebra*, Band II. W. H. Freeman and Company, New York, 1989. [I.\(3.6\)](#), [II.\(1.5\)](#), [A.\(2.2\)](#)
- [Jam90] Gordon James. The Decomposition Matrices of $GL_n(q)$ for $n \leq 10$. *Proc. London Math. Soc.* (3), 60:225–265, 1990. [Einleitung](#), [VII](#), [VII.\(1.2\)](#), [VII.\(1.3\)](#), [VII.\(1.6\)](#)
- [KL79] David Kazhdan und George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 53(2):165–184, 1979. [Einleitung](#), [VI.\(2.5\)](#), [VI.\(2.9\)](#), [VI.\(2.10\)](#), [VI.\(3.7\)](#), [VI.\(3.7\)](#), [VI.\(3.9\)](#), [VI.\(3.15\)](#), [VI.\(3.16\)](#), [VI.\(3.18\)](#), [VI.\(3.19\)](#), [VI.\(3.21\)](#), [VI.\(3.22\)](#)
- [KL80] David Kazhdan und George Lusztig. Schubert varieties and Poincaré duality. In *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*, Seiten 185–203. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980. [VI.\(2.8\)](#)
- [Knu98] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume 3*. Addison-Wesley Publishing Co., zweite Auflage, 1998. Sorting and searching, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing. [VI.\(3.5\)](#), [VI.\(3.5\)](#)
- [Kun85] Ernst Kunz. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1985. [II.\(1.17\)](#), [V.\(1.19\)](#), [V.\(5.1\)](#), [VII.\(1.4\)](#), [A.\(3.7\)](#)
- [Lan75] Saunders Mac Lane. *Homology*, Band 114 aus *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, dritte korrigierte Auflage, 1975. [I.\(1.2\)](#)
- [LLT95] Alain Lascoux, Bernard Leclerc und Jean-Yves Thibon. Une conjecture pour le calcul des matrices de décomposition des algèbres de Hecke de type A aux racines de l'unité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 321(5):511–516, 1995. [VII.\(2.2\)](#), [VII.\(3.3\)](#)

- [LLT96] Alain Lascoux, Bernard Leclerc und Jean-Yves Thibon. Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 181(1):205–263, 1996. [VII.\(2.2\)](#), [VII.\(3.3\)](#)
- [Lus81] George Lusztig. On a theorem of Benson and Curtis. *J. Algebra*, 71(2):490–498, 1981. [VI.\(2.17\)](#)
- [Lus84] George Lusztig. *Characters of reductive groups over a finite field*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984. [VI.\(2.5\)](#), [VI.\(2.7\)](#), [VI.\(2.7\)](#), [VI.\(2.8\)](#), [VI.\(2.9\)](#), [VI.\(2.10\)](#), [VI.\(2.14\)](#), [VI.\(2.15\)](#), [VI.\(2.16\)](#), [VI.\(2.17\)](#), [VI.\(5.4\)](#), [VI.\(6.4\)](#), [VI.\(6.5\)](#), [VI.\(6.6\)](#)
- [Lus85] George Lusztig. Cells in affine Weyl groups. In *Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983)*, Seiten 255–287. North-Holland, Amsterdam, 1985. [Einleitung](#), [VI.\(2.8\)](#), [VI.\(5.4\)](#)
- [Lus87a] G. Lusztig. Leading coefficients of character values of Hecke algebras. In *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986)*, Seiten 235–262. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. [Einleitung](#), [VI.5](#), [VI.\(5.4\)](#), [VI.\(5.6\)](#)
- [Lus87b] George Lusztig. Cells in affine Weyl groups. II. *J. Algebra*, 109(2):536–548, 1987. [Einleitung](#), [VI.5](#), [VI.\(5.3\)](#), [VI.\(5.4\)](#), [VI.\(5.6\)](#)
- [Lus87c] George Lusztig. Cells in affine Weyl groups. III. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(2):223–243, 1987. [Einleitung](#), [VI.5](#), [VI.\(5.6\)](#)
- [Mat86] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, 1986. [II](#), [II.1](#), [II.\(1.1\)](#), [II.\(1.2\)](#), [II.\(1.4\)](#), [II.\(1.7\)](#), [II.\(1.9\)](#), [II.\(1.17\)](#), [II.\(1.18\)](#), [II.\(2.2\)](#), [II.\(3.1\)](#), [II.\(3.2\)](#), [II.\(3.9\)](#), [II.\(3.10\)](#), [III.\(2.1\)](#), [III.\(2.5\)](#), [III.\(3.2\)](#), [V.\(1.21\)](#), [V.\(2.5\)](#), [V.\(3.3\)](#), [VII.\(2.3\)](#), [VII.\(2.4\)](#), [VII.\(2.7\)](#), [A.1](#), [A.\(1.1\)](#), [A.\(1.2\)](#), [A.\(1.3\)](#), [A.\(1.4\)](#), [A.\(3.2\)](#), [A.\(3.3\)](#), [A.\(3.4\)](#), [A.\(3.5\)](#), [A.\(3.7\)](#), [A.\(3.9\)](#)
- [Mat97] Andrew Mathas. *Specht*, Version 2.4, 1997. (<http://www.maths.usyd.edu.au:8000/u/mathas/specht>). [VI.\(7.2\)](#)
- [Mül80] Wolfgang Müller. *Darstellungstheorie von endlichen Gruppen*. Teubner Studienbücher Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, 1980. [A.\(2.1\)](#), [A.\(2.2\)](#)
- [Mül95] Jürgen Müller. *Zerlegungszahlen für generische Iwahori-Hecke-Algebren von exzeptionellem Typ*. PhD thesis, RWTH-Aachen, 1995. [II.\(6.1\)](#), [III.3](#), [VI.\(3.9\)](#)
- [Ram91] Arun Ram. A Frobenius formula for the characters of the Hecke algebras. *Invent. Math.*, 106:461–488, 1991. [VII.\(3.3\)](#)
- [Rin00] Michael Ringe. *The C-MeatAxe*, Version 2.4.0, 2000. (<http://www.math.rwth-aachen.de/LDFM/homes/MTX/>). [VI.\(7.4\)](#)
- [S⁺95] Martin Schönert et al. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, fünfte Auflage, 1995. [VI.\(2.13\)](#), [VI.\(7.1\)](#)
- [Shi86] Jian-Yi Shi. *The Kazhdan-Lusztig Cells in Certain Affine Weyl Groups*, Band 1179 aus *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986. [VI.\(3.7\)](#), [VI.\(3.13\)](#), [VI.\(3.15\)](#), [VI.\(3.16\)](#), [VI.\(3.17\)](#), [VI.\(3.18\)](#), [VI.\(3.19\)](#), [VI.\(3.20\)](#), [VI.\(3.21\)](#), [VI.\(3.22\)](#)

-
- [Spr83] Tonny A. Springer. Séries de Poincaré dans la théorie des invariants. In *Paul Dubreil and Marie-Paule Malliavin algebra seminar, 35th year (Paris, 1982)*, Seiten 37–54. Springer, Berlin, 1983. [VI.\(2.8\)](#)
- [Sta75] A. J. Starkey. *Characters of the generic Hecke algebra of a system BN-pairs*. PhD thesis, University of Warwick, 1975. [VII.\(3.3\)](#)
- [Szö98] Magdolna Szőke. *Examining Green Correspondents of Weight Modules*. PhD thesis, RWTH-Aachen, 1998. [VI.\(7.4\)](#)
- [vQ76] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. [A.\(1.1\)](#), [A.\(1.5\)](#)

Anhang F

Index

- abgeschlossen
 - nach oben, 22
 - nach unten, 83
- Abschluss nach oben, 22
- absolut einfach, 17
- Abstiegsmenge, 92
- additive Bewertung, 20
- additive Norm, 25
- Algebra, 12
 - asymptotische, 101
 - symmetrische, 53
- $\mathcal{O}$ -Algebra, 12
- alternierendes Produkt, 78
- archimedisch, 23
- archimedische Teilmenge, 23
- asymptotische Algebra, 101
- Ausdruck
 - reduzierter, 77
- ausgeartet
 - nicht, 52
- ausgezeichnete Nebenklassenvertreter, 91
- Auslander-Buchsbaum, 133, 134
- Auslander-Goldman, 133
- Azumaya, 40, 41, 55, 71

- basic set, 110, 111
- Basis
 - duale, 52
 - Kazhdan-Lusztig-, 80
- Beilinson, 105
- Bernstein, 105
- Bewertung, 20
 - additive, 20
 - diskrete, 20
 - zweistufige, 48
- Bewertungs-Topologie, 21
- Bewertungsring, 21
 - diskreter, 21
- Bewertungssystem, 21

- Bilinearform
 - nicht ausgeartete, 52
- Blöcke, 111
- Brauer-Nesbitt, 67
- Brauer-Reziprozität, 8, 39, 64, 73, 110, 112, 115, 116, 118
- Brauer-Reziprozität (Def.), 72
- Bruhat-Ordnung, 82, 91–93, 106
- Bruhat-Ordnung (Def.), 78
- Brylinski, 105
- Buchsbaum, 133, 134

- C-Basis, 81, 82, 85, 100, 103
- C-MeatAxe, 110
- C'-Basis, 80
- Cauchy-Netz, 127
- Change of Rings, 15, 68, 71
- charakteristisches Polynom, 67
- Chevalley-Gruppen, 82
- CHEVIE, 84, 109, 110
- Coxeter, 110
- c_V , 55

- Deformationssatz
 - von Tits, 112
- Deodhars Lemma, 104–106
- Diagrammjagd, 11
- Dipper
 - Richard, 86
- diskrete Bewertung, 20
- diskreter Bewertungsring, 21
- distinguierte Involutionen, 101
- $\mathcal{D}_L(s, t)$, 92
- $\mathcal{D}_R(s, t)$, 92
- Du-Lusztig-Homomorphismus, 120
- duale Basis, 52
 - der Kazhdan-Lusztig-Basis, 85
 - der T-Basis, 79
- Dualraum, 53, 54

- Duflo-Involution, 101, 102, 108
 Duflo-Involution (Def.), 101
 Durchschnittssatz
 Krullscher, 20, 24

 Ein-Parameter-Hecke-Algebra
 generische, 79
 Einbettungsdimension, 24
 einfach
 absolut, 17
 Einzeller, 83
 Einzellmodul, 83
 endlich präsentierter Modul, 12
 Evaluationsabbildung, 134, 135

 Fünfer-Lemma, 11
 Faktorisierung
 von Zerlegungsabbildungen, 64, 73, 114
 Folge
 maximale reguläre, 133
 reguläre, 133
 $\mathcal{O}$ -Form, 68
 Freiheit von Tensorprodukten, 12
 Frobenius-Algebra, 55
 Frobenius-Schur-Relationen, 9, 52, 58, 60
 Funktorialität, 32, 65

 GAP3, 84, 109, 110
 GAP4, 84, 109
 Gaschütz-Ikeda, 54, 60
 Geck
 Meinolf, 6, 8, 39, 112–115, 117, 119, 120
 generische Ein-Parameter-Hecke-Algebra, 79
 generische Iwahori-Hecke-Algebra, 79
 Gestalt, 87
 $\mathcal{H}$ -Gitter, 13
 $\mathcal{O}$ -Gitter, 13
 Glocke, 10
 Goldman, 133
 Gordon James, 86, 112
 Gram-Matrix, 9, 52, 53, 75, 76, 112, 119–121
 Grothendieck-Gruppe, 64
 projektive, 65
 Grundring
 Wechsel des, 14–17

 Hülle
 projektive, 39
 Hasse-Diagramm, 84, 91, 108
 Hauptidealsatz
 Krulls, 24
 hausdorffsch, 19–22, 25, 29, 32, 123–125, 127

 Heben von Idempotenten, 8, 18, 25, 36, 38–42, 50, 51, 63, 64, 71, 116, 118
 Heben von Idempotenten (Theorem), 36
 Hecke-Algebra, 78
 Hilfsring, 69
 $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N)$, 11
 Homomorphismus, 11

 I , 54
 i-Induktion, 111
 I -adische Topologie, 19
 Ideale
 primitive, 105
 Ideale in Bewertungsringen, 23
 Idempotent, 13
 primitives, 13
 zentral-primitives, 97
 Idempotente
 orthogonale, 13
 Idempotente-Verbesserungssatz, 41
 Ikeda, 54, 60
 Indexdarstellung, 79
 Induktion von Zellmoduln, 105, 107
 Inhalt
 eines Polynoms, 43
 Insassen, 84, 108
 Integritätsbereich, 11
 inverser Limes, 29–34, 37, 124–127
 Involution, 80, 100
 Involutionen
 distinguierte, 101
 Iwahori-Hecke-Algebra, 78
 generische, 79

 $\mathcal{J}$, 101
 j , 100
 James
 Gordon, 86, 112
 James-Geck-Vermutung, 7–9, 39, 114, 115, 117, 119, 120
 James-Vermutung, 6, 7, 9, 10, 43, 49, 64, 113, 119

 Kashiwara, 105
 Kazhdan-Lusztig-Basis, 80
 Kazhdan-Lusztig-Vermutung, 105
 KL-Basis, 80
 Klebeabbildung, 70
 Klebstoff, 111
 Konstantenerweiterung, 14
 Konstantenreduktion, 14
 Konventionen, 11
 $\leq_{\mathbb{L}}$ -konvex, 83

- $\leq_{\mathbb{R}}$ -konvex, 83
- kristallographisch, 81
- Krull-Schmidt-Azumaya, 40, 41, 55, 71
- Krulls Hauptidealsatz, 24
- Krullscher Durchschnittssatz, 20, 24
- Kugel, 20, 25
- ℓ -adische Bewertung, 129
- Länge, 77
- Längenfunktion, 77
- $LC^{(\Lambda)}$, 83
- Lehrstuhl D, 10
- lexikographisch, 23, 46, 86, 87, 130
- Limes
 - inverser, 29–34, 37, 124–127
- lineare Topologie, 18, 123
- Links-Abstiegsmenge, 92
- Links-Sternoperation, 92
- Linkszelle, 82
- Lusztig-Homomorphismus, 10, 77, 100–103, 120
- Lusztig-Homomorphismus (Def.), 101
- Maschke
 - Satz von, 54
- Matrix-Einheit, 99, 121
- Matrix-Einheits-Relationen, 99
- Matsumoto, 78, 79
- maximale reguläre Folge, 133
- Meinolf Geck, 6, 8, 39, 112–115, 117, 119, 120
- Mittelungsoperator, 54
- mod- $\mathcal{H}$, 11
- Modul, 11
 - endlich präsentierter, 12
- $\mu(y, w)$, 80
- Multiplikationsformeln, 81
- nach oben abgeschlossen, 22
- nach unten abgeschlossen, 83
- Nachfolger, 81
- Nakayama-Lemma, 41, 134
- Nebenklassenvertreter
 - ausgezeichnete, 91
- Nesbitt, 67
- Netz, 31, 127
- nicht ausgeartet, 52
- nicht ausgeartete Bilinearform, 52
- Norm
 - additive, 25
- Normtopologie, 25
- ν -adische Topologie, 21
- $\mathcal{O}$ -Ordnung, 13
- orthogonal, 13
- Orthogonalitätsrelation, 60
- Orthogonalraum, 55
- Paarung, 66
- parabolische Unteralgebra, 104
- parabolische Untergruppe, 90
- Partition, 86
 - e -reguläre, 86
- Polynom
 - charakteristisches, 67
 - primitives, 43
- Poset der Rechtszellen, 84, 109
- Positivität, 81
- Präsentation, 12
- Primidealkette, 8, 43–48, 51, 118
- primitiv, 13, 43
- primitive Ideale, 105
- primitives Idempotent, 13
- primitives Polynom, 43
- $\text{Prod}(a, b; n)$, 78
- Produkt
 - alternierendes, 78
- Projektion vom Kopf auf den Sockel, 56
- projektive Grothendieck-Gruppe, 65
- projektive Hülle, 39
- projektive Zellmoduln, 108
- Projektivität von Tensorprodukten, 12
- $\text{proj-}\mathcal{H}$, 11
- q -Schur-Algebra, 112, 113, 120
- quasi-Frobenius, 55
- $RC^{(\Gamma)}$, 83
- Rechts-Abstiegsmenge, 92
- Rechts-Modul, 11
- Rechts-Sternoperation, 92
- Rechtszelle, 82
- reduzierter Ausdruck, 77
- reflexiv, 134
- reguläre Folge, 133
- regulärer, lokaler Ring, 23, 24, 134, 135
- regulärer, lokaler Ring (Def.), 23
- regulär, 23
- Richard Dipper, 86
- Ring, 11
 - regulärer, lokaler, 23, 24, 134, 135
 - regulärer, lokaler (Def.), 23
 - semilokaler, 39
 - semiperfekter, 39
- Rng, 11
- Robinson-Schensted-Abbildung, 88

- S_3 -Sechsecke, 91
- Satz
 - von Matsumoto, 78, 79
- Satz von Maschke, 54
- Schensted, 88
- Schmidt, 40, 41, 55, 71
- Schreier-Transversale, 104
- Schur-Element, 55
- selbst-injektiv, 55
- semilokal, 39
- semilokaler Ring, 39
- semiperfekt, 39
- semiperfekter Ring, 39
- Signumsdarstellung, 79
- Specht-Modul, 86
- Spektrum, 43
- Spezialisierung, 68
 - einer Hecke-Algebra, 79
- Spurform, 53
- Standardtableau, 87
- Sternoperation, 92
- Struktur von $\text{End}_{\mathcal{H}}(P)$, 56
- symmetrische Algebra, 53
- symmetrisierend, 53

- T-Basis, 78
- $\tilde{T}$ -Basis, 80
- t-Basis, 101
 - Urbilder, 101
- τ -Invariante
 - verallgemeinerte, 89
- Teil, 86
- Teilmenge
 - archimedische, 23
- Tensorprodukte
 - Freiheit von, 12
 - Projektivität von, 12
- Tiefe, 133
- Tits' Deformationssatz, 112
- Topologie
 - Bewertungs-, 21
 - I -adische, 19
 - lineare, 18, 123
 - Norm-, 25
 - ν -adische, 21

- Umformulierung, 115, 117, 119
- Unteralgebra
 - parabolische, 104
- Untergruppe
 - parabolische, 90

- verallgemeinerte τ -Invariante, 89
- Verbesserung von Idempotenten, 41
- verblüffend, 82, 102, 111, 122
- Vertex-Operator-Algebra, 10
- Vervollständigung, 29, 124
- vollständig, 29, 125

- W-Graph, 82, 95
- Wechsel des Grundrings, 14–17
- Wedderburn-Basis, 99, 103
- Wedderburn-Zerlegung, 10, 96–103, 121
- Wertegruppe, 20

- XGAP4, 84, 109

- Young-Diagramm, 108

- Zelle
 - Links-, 82
 - Rechts-, 82
 - zweiseitige, 86
- Zellmodul, 83
- Zellmoduln
 - projektive, 108
- zentral-primitives Idempotent, 97
- Zerfallungskörper, 17
 - für Hecke-Algebren, 86
- Zerlegung in Blöcke, 111
- Zerlegungsabbildung, 69
- Zerlegungsabbildungen
 - Faktorisierung von, 64, 73, 114
- Zerlegungsmatrix, 73, 88, 109, 110, 113, 120
- z_ρ , 53
- zweiseitige Zelle, 86
- zweistufige Bewertung, 48

Lebenslauf Max Neunhöffer

15.9.1969	Geboren als 1. Kind von Gudrun und Helmut Neunhöffer in Heidelberg
27.5.1971	Geburt meines Bruders Till
1976–80	Besuch der Theodor–Heuß–Grundschule in Eppelheim
1980–89	Besuch des Dietrich–Bonhoeffer–Gymnasiums in Eppelheim
Oktober 1989	Beginn des Mathematik–Studiums in Heidelberg
1989	Aufnahme in die Studienstiftung des Deutschen Volkes
März 1992	Vordiplom in Mathematik
März 1997	Diplom in Mathematik
seit Sept. 1997	Wissenschaftlicher Angestellter an der RWTH Aachen
April 2003	Promotion in Mathematik an der RWTH Aachen