

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Sudokus und Symmetrie

Max Neunhöffer

Lehrstuhl D für Mathematik
RWTH Aachen

Computeralgebra-Symposium Konstanz

16.3.2007

Sudokus und Symmetrie

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 |
| 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 |
| 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 |
| 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 |

Ein (gefülltes) Sudoku-Feld:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 |
| 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 |
| 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 |
| 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 |

- In jeder Zeile kommen alle Ziffern genau einmal vor.
- In jeder Spalte kommen alle Ziffern genau einmal vor.
- In jedem Block kommen alle Ziffern genau einmal vor.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Ein Sudoku-Rätsel:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|-----|
| | | | 4 | 7 | | |
| | 8 | | | | | |
| | 1 | | | | 2 | |
| | | | 8 | 5 | | 6 |
| 7 | | | | | | |
| 4 | | | | 2 | | |
| 3 | | 2 | | 7 | | |
| | | | | | | |
| | | | | 6 | | 1 8 |

Aufgabe: Fülle Raster zu Sudoku-Feld.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | 7 | | | 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 | | |
| | 8 | | | | | | | 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 | |
| | 1 | | | | | 2 | | | 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| | | | 8 | 5 | | | | | 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 7 | | | | | | | | | 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 |
| 4 | | | | | | 2 | | | 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 |
| 3 | | 2 | | 7 | | | | | 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 |
| | | | | | | | | | 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 |
| | | | | 6 | | 1 | 8 | | 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 |

Aufgabe: Fülle Raster zu Sudoku-Feld.

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | 7 | | | 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 | | |
| | 8 | | | | | | | 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 | |
| | 1 | | | | | 2 | | | 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| | | | 8 | 5 | | | | 6 | 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 7 | | | | | | | | | 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 |
| 4 | | | | | | 2 | | | 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 |
| 3 | | 2 | | 7 | | | | | 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 |
| | | | | | | | | | 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 |
| | | | | 6 | | 1 | 8 | | 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 |

Aufgabe: Fülle Raster zu Sudoku-Feld.

Versprechen: Es gibt nur genau eine Möglichkeit!

Was hat das mit Computeralgebra und Mathematik zu tun?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was hat das mit Computeralgebra und Mathematik zu tun?

Man kommt sehr schnell auf interessante Probleme:

- Wie löst man Sudoku-Rätsel?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentliche verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was hat das mit Computeralgebra und Mathematik zu tun?

Man kommt sehr schnell auf interessante Probleme:

- Wie löst man Sudoku-Rätsel?
- Wie schwer ist ein Sudoku-Rätsel?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentliche verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was hat das mit Computeralgebra und Mathematik zu tun?

Man kommt sehr schnell auf interessante Probleme:

- Wie löst man Sudoku-Rätsel?
- Wie schwer ist ein Sudoku-Rätsel?
- Wieviele Lösungen gibt es zu einem Satz von Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was hat das mit Computeralgebra und Mathematik zu tun?

Man kommt sehr schnell auf interessante Probleme:

- Wie löst man Sudoku-Rätsel?
- Wie schwer ist ein Sudoku-Rätsel?
- Wieviele Lösungen gibt es zu einem Satz von Hinweisen?
- Wieviele verschiedene Sudoku-Felder gibt es?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was hat das mit Computeralgebra und Mathematik zu tun?

Man kommt sehr schnell auf interessante Probleme:

- Wie löst man Sudoku-Rätsel?
- Wie schwer ist ein Sudoku-Rätsel?
- Wieviele Lösungen gibt es zu einem Satz von Hinweisen?
- Wieviele verschiedene Sudoku-Felder gibt es?
- Wieviele „wesentlich verschiedene“ gibt es?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was hat das mit Computeralgebra und Mathematik zu tun?

Man kommt sehr schnell auf interessante Probleme:

- Wie löst man Sudoku-Rätsel?
- Wie schwer ist ein Sudoku-Rätsel?
- Wieviele Lösungen gibt es zu einem Satz von Hinweisen?
- Wieviele verschiedene Sudoku-Felder gibt es?
- Wieviele „wesentlich verschiedene“ gibt es?
- Wieviele Hinweise muss man geben, damit die Lösung eindeutig ist?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was hat das mit Computeralgebra und Mathematik zu tun?

Man kommt sehr schnell auf interessante Probleme:

- Wie löst man Sudoku-Rätsel?
- Wie schwer ist ein Sudoku-Rätsel?
- Wieviele Lösungen gibt es zu einem Satz von Hinweisen?
- Wieviele verschiedene Sudoku-Felder gibt es?
- Wieviele „wesentlich verschiedene“ gibt es?
- Wieviele Hinweise muss man geben, damit die Lösung eindeutig ist?

Diese Probleme sind verschieden schwer.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was hat das mit Computeralgebra und Mathematik zu tun?

Man kommt sehr schnell auf interessante Probleme:

- Wie löst man Sudoku-Rätsel?
- Wie schwer ist ein Sudoku-Rätsel?
- Wieviele Lösungen gibt es zu einem Satz von Hinweisen?
- Wieviele verschiedene Sudoku-Felder gibt es?
- Wieviele „wesentlich verschiedene“ gibt es?
- Wieviele Hinweise muss man geben, damit die Lösung eindeutig ist?

Diese Probleme sind verschieden schwer.

Wenn gelöst, dann durch eine **Kombination** aus
Mathematik und Computeralgebra.

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

[1] Bertram Felgenhauer und Frazer Jarvis:
„Mathematics of Sudoku I“, 2006.

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

[1] Bertram Felgenhauer und Frazer Jarvis:
„Mathematics of Sudoku I“, 2006.

[2] Ed Russell und Frazer Jarvis:
„Mathematics of Sudoku II“, 2006.

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

[1] Bertram Felgenhauer und Frazer Jarvis:
„Mathematics of Sudoku I“, 2006.

[2] Ed Russell und Frazer Jarvis:
„Mathematics of Sudoku II“, 2006.

Alles kann unter:

<http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/>
abgerufen werden.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder gibt es?

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Jedes Sudoku-Feld ist ein lateinisches Quadrat.

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Jedes Sudoku-Feld ist ein **lateinisches Quadrat**.

Es gibt

- 2 lateinsche Quadrate der Größe 2×2 ,

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Lateinische Quadrate

Jedes Sudoku-Feld ist ein **lateinisches Quadrat**.

Es gibt

- 2 lateinsche Quadrate der Größe 2×2 ,
- 24 lateinische Quadrate der Größe 3×3 ,

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Jedes Sudoku-Feld ist ein **lateinisches Quadrat**.

Es gibt

- 2 lateinsche Quadrate der Größe 2×2 ,
- 24 lateinische Quadrate der Größe 3×3 ,
- $5\,524\,751\,496\,156\,892\,842\,531\,225\,600 \approx 5.525 \cdot 10^{27}$
lateinische Quadrate der Größe 9×9 ,

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Lateinische Quadrate

Jedes Sudoku-Feld ist ein **lateinisches Quadrat**.

Es gibt

- 2 lateinsche Quadrate der Größe 2×2 ,
- 24 lateinische Quadrate der Größe 3×3 ,
- $5\,524\,751\,496\,156\,892\,842\,531\,225\,600 \approx 5.525 \cdot 10^{27}$ lateinische Quadrate der Größe 9×9 ,
- Die Anzahlen für 10×10 und 11×11 sind noch bekannt.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Lateinische Quadrate

Jedes Sudoku-Feld ist ein **lateinisches Quadrat**.

Es gibt

- 2 lateinische Quadrate der Größe 2×2 ,
- 24 lateinische Quadrate der Größe 3×3 ,
- $5\,524\,751\,496\,156\,892\,842\,531\,225\,600 \approx 5.525 \cdot 10^{27}$ lateinische Quadrate der Größe 9×9 ,
- Die Anzahlen für 10×10 und 11×11 sind noch bekannt.

⇒ **Es gibt weniger Sudokus, aber doch sehr viele.**

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 |
| 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 |
| 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 |
| 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 |

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 |
| 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 |
| 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 |
| 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 |

Wenn wir die Ziffern **umnummerieren**, entsteht wieder ein Sudoku-Feld.

Max Neunhöffer

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 |
| 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 |
| 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 |
| 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 |

Wenn wir die Ziffern **umnummerieren**, entsteht wieder ein Sudoku-Feld. Etwa so:

| | | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| von | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| nach | 8 | 4 | 2 | 6 | 7 | 1 | 9 | 5 | 3 |

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 | 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 | 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 | 8 | 4 | 2 | 5 | 7 | 9 | 3 | 6 | 1 |
| 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 | 9 | 3 | 1 | 6 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 | 6 | 7 | 5 | 1 | 8 | 3 | 4 | 2 | 9 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 | 2 | 6 | 4 | 8 | 9 | 5 | 7 | 1 | 3 |
| 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 | 5 | 1 | 8 | 7 | 3 | 6 | 2 | 9 | 4 |
| 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 | 3 | 9 | 7 | 2 | 4 | 1 | 6 | 8 | 5 |

Wenn wir die Ziffern **umnummerieren**, entsteht wieder ein
Sudoku-Feld. Etwa so:

| | | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| von | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| nach | 8 | 4 | 2 | 6 | 7 | 1 | 9 | 5 | 3 |

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 | 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 | 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 | 8 | 4 | 2 | 5 | 7 | 9 | 3 | 6 | 1 |
| 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 | 9 | 3 | 1 | 6 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 | 6 | 7 | 5 | 1 | 8 | 3 | 4 | 2 | 9 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 | 2 | 6 | 4 | 8 | 9 | 5 | 7 | 1 | 3 |
| 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 | 5 | 1 | 8 | 7 | 3 | 6 | 2 | 9 | 4 |
| 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 | 3 | 9 | 7 | 2 | 4 | 1 | 6 | 8 | 5 |

Wenn wir die Ziffern **umnummerieren**, entsteht wieder ein Sudoku-Feld. Etwa so:

| | | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| von | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| nach | 8 | 4 | 2 | 6 | 7 | 1 | 9 | 5 | 3 |

Sparfaktor: $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$

Die obere Blockzeile

Wir betrachten zunächst nur die oberen drei 3×3 -Blöcke:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die obere Blockzeile

Wir betrachten zunächst nur die oberen drei 3×3 -Blöcke:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

Welche Möglichkeiten bleiben für die rechten 2 Blöcke?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die obere Blockzeile

Wir betrachten zunächst nur die oberen drei 3×3 -Blöcke:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

Welche Möglichkeiten bleiben für die rechten 2 Blöcke?

(Typ I)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,6} | {7,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | | |
| 7 | 8 | 9 | | |

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die obere Blockzeile

Wir betrachten zunächst nur die oberen drei 3×3 -Blöcke:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

Welche Möglichkeiten bleiben für die rechten 2 Blöcke?

(Typ I)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,6} | {7,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {7,8,9} | {1,2,3} |
| 7 | 8 | 9 | {1,2,3} | {4,5,6} |

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die obere Blockzeile

Wir betrachten zunächst nur die oberen drei 3×3 -Blöcke:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

Welche Möglichkeiten bleiben für die rechten 2 Blöcke?

(Typ I)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,6} | {7,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {7,8,9} | {1,2,3} |
| 7 | 8 | 9 | {1,2,3} | {4,5,6} |

(Typ II)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,7} | {6,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | | |
| 7 | 8 | 9 | | |

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?Wie viele Hinweise braucht
man?Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die obere Blockzeile

Wir betrachten zunächst nur die oberen drei 3×3 -Blöcke:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

Welche Möglichkeiten bleiben für die rechten 2 Blöcke?

(Typ I)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,6} | {7,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {7,8,9} | {1,2,3} |
| 7 | 8 | 9 | {1,2,3} | {4,5,6} |

(Typ II)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,7} | {6,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {8,9,a} | {7,b,c} |
| 7 | 8 | 9 | {6,b,c} | {4,5,a} |

wobei $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ ist.

Anzahlen für erste Blockzeile

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

(Typ I)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,6} | {7,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {7,8,9} | {1,2,3} |
| 7 | 8 | 9 | {1,2,3} | {4,5,6} |

- 2 mal Typ I:
 $\{4, 5, 6\} \mid \{7, 8, 9\}$ und $\{7, 8, 9\} \mid \{4, 5, 6\}$,

Anzahlen für erste Blockzeile

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

(Typ I)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,6} | {7,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {7,8,9} | {1,2,3} |
| 7 | 8 | 9 | {1,2,3} | {4,5,6} |

- 2 mal Typ I:
 $\{4, 5, 6\} \mid \{7, 8, 9\}$ und $\{7, 8, 9\} \mid \{4, 5, 6\}$,
→ jeweils $(3!)^6$ verschiedene Konfigurationen

Anzahlen für erste Blockzeile

(Typ II)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,7} | {6,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {8,9,a} | {7,b,c} |
| 7 | 8 | 9 | {6,b,c} | {4,5,a} |

- 2 mal Typ I:
 $\{4, 5, 6\} \mid \{7, 8, 9\}$ und $\{7, 8, 9\} \mid \{4, 5, 6\}$,
→ jeweils $(3!)^6$ verschiedene Konfigurationen
- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$ mal Typ II

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Anzahlen für erste Blockzeile

(Typ II)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,7} | {6,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {8,9,a} | {7,b,c} |
| 7 | 8 | 9 | {6,b,c} | {4,5,a} |

- 2 mal Typ I:
 $\{4, 5, 6\} \mid \{7, 8, 9\}$ und $\{7, 8, 9\} \mid \{4, 5, 6\}$,
→ jeweils $(3!)^6$ verschiedene Konfigurationen
- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$ mal Typ II
(greife **zwei** aus $\{4, 5, 6\}$, **eine** aus $\{7, 8, 9\}$ und **eine** aus $\{1, 2, 3\}$ (wähle a) heraus bzw. andersherum)

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Anzahlen für erste Blockzeile

(Typ II)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,7} | {6,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {8,9,a} | {7,b,c} |
| 7 | 8 | 9 | {6,b,c} | {4,5,a} |

- 2 mal Typ I:
 $\{4, 5, 6\} \mid \{7, 8, 9\}$ und $\{7, 8, 9\} \mid \{4, 5, 6\}$,
→ jeweils $(3!)^6$ verschiedene Konfigurationen
- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$ mal Typ II
(greife **zwei** aus $\{4, 5, 6\}$, **eine** aus $\{7, 8, 9\}$ und **eine**
aus $\{1, 2, 3\}$ (wähle a) heraus bzw. andersherum)
→ jeweils $(3!)^6$ verschiedene Konfigurationen

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Anzahlen für erste Blockzeile

(Typ II)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,7} | {6,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {8,9,a} | {7,b,c} |
| 7 | 8 | 9 | {6,b,c} | {4,5,a} |

- 2 mal Typ I:
 $\{4, 5, 6\} \mid \{7, 8, 9\}$ und $\{7, 8, 9\} \mid \{4, 5, 6\}$,
 \rightarrow jeweils $(3!)^6$ verschiedene Konfigurationen
- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$ mal Typ II
 (greife **zwei** aus $\{4, 5, 6\}$, **eine** aus $\{7, 8, 9\}$ und **eine**
 aus $\{1, 2, 3\}$ (wähle a) heraus bzw. andersherum)
 \rightarrow jeweils $(3!)^6$ verschiedene Konfigurationen

\Rightarrow macht insgesamt $2 \cdot (3!)^6 + 54 \cdot (3!)^6 = 2612736$

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Anzahlen für erste Blockzeile

(Typ II)

| | | | | |
|---|---|---|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | {4,5,7} | {6,8,9} |
| 4 | 5 | 6 | {8,9,a} | {7,b,c} |
| 7 | 8 | 9 | {6,b,c} | {4,5,a} |

- 2 mal Typ I:

$\{4, 5, 6\} \mid \{7, 8, 9\}$ und $\{7, 8, 9\} \mid \{4, 5, 6\}$,

→ jeweils $(3!)^6$ verschiedene Konfigurationen

- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$ mal Typ II

(greife **zwei** aus $\{4, 5, 6\}$, **eine** aus $\{7, 8, 9\}$ und **eine** aus $\{1, 2, 3\}$ (wähle a) heraus bzw. andersherum)

→ jeweils $(3!)^6$ verschiedene Konfigurationen

⇒ macht insgesamt $2 \cdot (3!)^6 + 54 \cdot (3!)^6 = 2612736$

⇒ ohne Umnummerieren: $9! \cdot 2612736 = 948109639680$

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Idee: Finde Gruppen von Konfigurationen mit gleicher Fortsetzungsanzahl.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

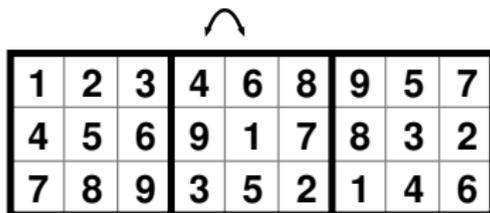
Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

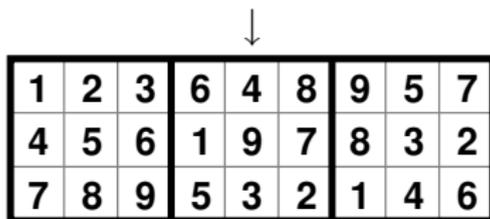
Reduktion durch Spaltenvertauschung

Idee: Finde Gruppen von Konfigurationen mit gleicher Fortsetzungsanzahl.

Beispiel:



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 6 | 4 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 9 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 2 | 1 | 4 | 6 |

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Reduktion durch Spaltenvertauschung

Idee: Finde Gruppen von Konfigurationen mit gleicher
Fortsetzungsanzahl.

Beispiel:

↷

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

↓

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 6 | 4 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 9 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 2 | 1 | 4 | 6 |

⇒ gleiche Anzahl von Fortsetzungen zu vollen Sudokus

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Reduktion durch Spaltenvertauschung

Idee: Finde Gruppen von Konfigurationen mit gleicher Fortsetzungsanzahl.

Beispiel:

↷

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

↓

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 6 | 4 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 9 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 2 | 1 | 4 | 6 |

⇒ gleiche Anzahl von Fortsetzungen zu vollen Sudokus

(permutiere Spalten in den Fortsetzungen genauso)

Max Neunhöffer

Insgesamt gehen noch wesentlich mehr Operationen:

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

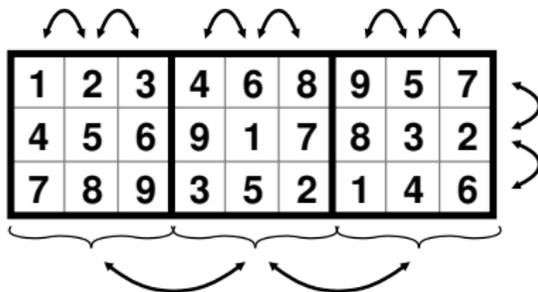
Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Reduktion durch Spaltenvertauschung

Insgesamt gehen noch wesentlich mehr Operationen:



plus Umnummerierung.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

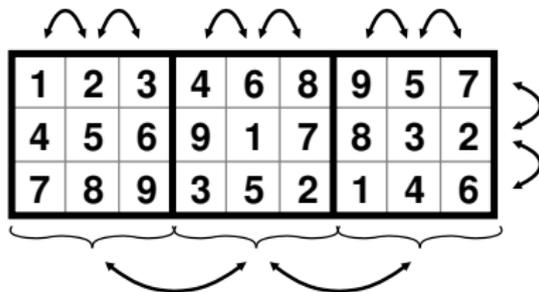
Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Reduktion durch Spaltenvertauschung

Insgesamt gehen noch wesentlich mehr Operationen:



plus Umnummerierung.

Zwei Konfigurationen, die durch diese Operationen
auseinander hervorgehen, haben die gleiche Anzahl
Fortsetzungen.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

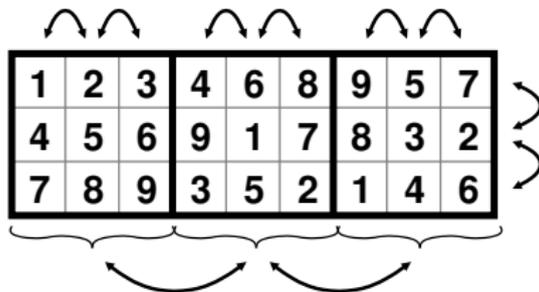
Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Reduktion durch Spaltenvertauschung

Insgesamt gehen noch wesentlich mehr Operationen:



plus Umnummerierung.

Zwei Konfigurationen, die durch diese Operationen
auseinander hervorgehen, haben die gleiche Anzahl
Fortsetzungen.

⇒ Berechne Klasseneinteilung durch Vergrößerung.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

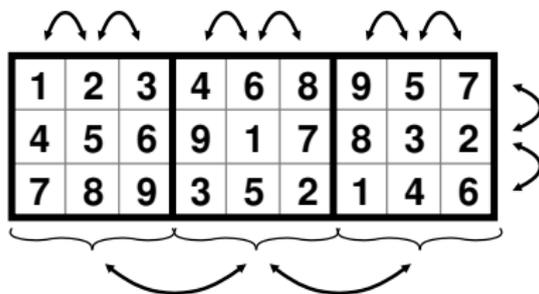
Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Reduktion durch Spaltenvertauschung

Insgesamt gehen noch wesentlich mehr Operationen:



plus Umnummerierung.

Zwei Konfigurationen, die durch diese Operationen
auseinander hervorgehen, haben die gleiche Anzahl
Fortsetzungen.

⇒ Berechne Klasseneinteilung durch Vergrößerung.

⇒ Liefert 416 Klassen, zähle jeweils Elemente.

Vertauschung in den Spalten

Für die Frage, wie zum Beispiel

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

zu einem Sudoku-Feld fortgesetzt werden kann, spielt

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Vertauschung in den Spalten

Für die Frage, wie zum Beispiel

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

zu einem Sudoku-Feld fortgesetzt werden kann, spielt
die Reihenfolge der Zahlen in jeder Spalte **keine Rolle**.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Vertauschung in den Spalten

Für die Frage, wie zum Beispiel

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

zu einem Sudoku-Feld fortgesetzt werden kann, spielt
die Reihenfolge der Zahlen in jeder Spalte **keine Rolle**.

Dies interferiert aber mit der Umnummerierung!

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Vertauschung in den Spalten

Für die Frage, wie zum Beispiel

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

zu einem Sudoku-Feld fortgesetzt werden kann, spielt
die Reihenfolge der Zahlen in jeder Spalte **keine Rolle**.

Dies interferiert aber mit der Umnummerierung!

⇒ schwieriger zu rechnen:

- naiver Ansatz: Reduktion auf **101** Klassen
- Felgenhauer/Jarvis/Russel: Reduktion auf **44**

Der Rest ist Brute Force

Für je eine Konfiguration aus den 101 Klassen C_i berechnet man

- mit einem **Backtrack-Suchalgorithmus** die **Anzahl aller Fortsetzungen eines $c \in C_i$,**

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Der Rest ist Brute Force

Für je eine Konfiguration aus den 101 Klassen C_i berechnet man

- mit einem **Backtrack-Suchalgorithmus** die **Anzahl aller Fortsetzungen eines $c \in C_i$** ,
- multipliziert jeweils mit $|C_i|$ und addiert, und

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Der Rest ist Brute Force

Für je eine Konfiguration aus den 101 Klassen C_i berechnet man

- mit einem **Backtrack-Suchalgorithmus** die **Anzahl aller Fortsetzungen eines $c \in C_i$** ,
- multipliziert jeweils mit $|C_i|$ und addiert, und
- spart noch einen Faktor 72 durch erste Spalte:

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Der Rest ist Brute Force

Für je eine Konfiguration aus den 101 Klassen C_i berechnet man

- mit einem **Backtrack-Suchalgorithmus** die **Anzahl aller Fortsetzungen eines $c \in C_i$** ,
- multipliziert jeweils mit $|C_i|$ und addiert, und
- spart noch einen Faktor 72 durch erste Spalte:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |
| 8 | 4 | 2 | 5 | 7 | 9 | 3 | 6 | 1 |
| 9 | 3 | 1 | 6 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| 6 | 7 | 5 | 1 | 8 | 3 | 4 | 2 | 9 |
| 2 | 6 | 4 | 8 | 9 | 5 | 7 | 1 | 3 |
| 5 | 1 | 8 | 7 | 3 | 6 | 2 | 9 | 4 |
| 3 | 9 | 7 | 2 | 4 | 1 | 6 | 8 | 5 |

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Der Rest ist Brute Force

Für je eine Konfiguration aus den 101 Klassen C_i berechnet man

- mit einem **Backtrack-Suchalgorithmus** die **Anzahl aller Fortsetzungen eines $c \in C_i$** ,
- multipliziert jeweils mit $|C_i|$ und addiert, und
- spart noch einen Faktor 72 durch erste Spalte:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 | 4 | 5 | 6 | 9 | 1 | 7 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |
| 8 | 4 | 2 | 5 | 7 | 9 | 3 | 6 | 1 | 2 | 6 | 4 | 8 | 9 | 5 | 7 | 1 | 3 |
| 9 | 3 | 1 | 6 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 | 3 | 9 | 7 | 2 | 4 | 1 | 6 | 8 | 5 |
| 6 | 7 | 5 | 1 | 8 | 3 | 4 | 2 | 9 | 5 | 1 | 8 | 7 | 3 | 6 | 2 | 9 | 4 |
| 2 | 6 | 4 | 8 | 9 | 5 | 7 | 1 | 3 | 6 | 7 | 5 | 1 | 8 | 3 | 4 | 2 | 9 |
| 5 | 1 | 8 | 7 | 3 | 6 | 2 | 9 | 4 | 8 | 4 | 2 | 5 | 7 | 9 | 3 | 6 | 1 |
| 3 | 9 | 7 | 2 | 4 | 1 | 6 | 8 | 5 | 9 | 3 | 1 | 6 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 |

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

$$6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,960 \approx 6.671 \cdot 10^{21},$$

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

$$6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,960 \approx 6.671 \cdot 10^{21},$$

also etwa 1 unter 828 000 lateinischen Quadraten.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wieviele „wesentlich verschiedene“
Sudoku-Felder gibt es?

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wir kennen schon Operationen, die ein Sudoku in ein
anderes überführen:

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wir kennen schon Operationen, die ein Sudoku in ein
anderes überführen:

- Umnummerieren

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wir kennen schon Operationen, die ein Sudoku in ein
anderes überführen:

- Umnummerieren
- Vertauschung von Zeilen in den Blockzeilen

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wir kennen schon Operationen, die ein Sudoku in ein
anderes überführen:

- Umnummerieren
- Vertauschung von Zeilen in den Blockzeilen
- Vertauschung von Blockzeilen

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wir kennen schon Operationen, die ein Sudoku in ein
anderes überführen:

- Umnummerieren
- Vertauschung von Zeilen in den Blockzeilen
- Vertauschung von Blockzeilen
- Vertauschung von Spalten in den Blockspalten

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wir kennen schon Operationen, die ein Sudoku in ein
anderes überführen:

- Umnummerieren
- Vertauschung von Zeilen in den Blockzeilen
- Vertauschung von Blockzeilen
- Vertauschung von Spalten in den Blockspalten
- Vertauschung von Blockspalten

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wir kennen schon Operationen, die ein Sudoku in ein anderes überführen:

- Ummummerieren
- Vertauschung von Zeilen in den Blockzeilen
- Vertauschung von Blockzeilen
- Vertauschung von Spalten in den Blockspalten
- Vertauschung von Blockspalten
- Transponieren

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wir kennen schon Operationen, die ein Sudoku in ein anderes überführen:

- Umnummerieren
- Vertauschung von Zeilen in den Blockzeilen
- Vertauschung von Blockzeilen
- Vertauschung von Spalten in den Blockspalten
- Vertauschung von Blockspalten
- Transponieren
- (Drehungen und Spiegelungen dadurch erreichbar)

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wir kennen schon Operationen, die ein Sudoku in ein anderes überführen:

- Ummummerieren
- Vertauschung von Zeilen in den Blockzeilen
- Vertauschung von Blockzeilen
- Vertauschung von Spalten in den Blockspalten
- Vertauschung von Blockspalten
- Transponieren
- (Drehungen und Spiegelungen dadurch erreichbar)

Zwei Sudoku-Felder heißen „im Wesentlichen“ gleich,

wenn Sie durch eine Folge dieser Operationen ineinander übergeführt werden können.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Operationen von Gruppen auf Mengen

Es sei G eine Gruppe und Ω eine (nichtleere) Menge.

„ G operiert auf Ω “, falls eine Abbildung

$$G \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad (g, \omega) \mapsto g \cdot \omega$$

existiert mit

- $(gh) \cdot \omega = g \cdot (h \cdot \omega)$ für alle $g, h \in G$ und $\omega \in \Omega$,
- $1 \cdot \omega = \omega$ für alle $\omega \in \Omega$.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Operationen von Gruppen auf Mengen

Es sei G eine Gruppe und Ω eine (nichtleere) Menge.

„ G operiert auf Ω “, falls eine Abbildung

$$G \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad (g, \omega) \mapsto g \cdot \omega$$

existiert mit

- $(gh) \cdot \omega = g \cdot (h \cdot \omega)$ für alle $g, h \in G$ und $\omega \in \Omega$,
- $1 \cdot \omega = \omega$ für alle $\omega \in \Omega$.

Operiert G auf Ω , so heißt für ein $\omega \in \Omega$

- $G \cdot \omega := \{g \cdot \omega \mid g \in G\} \subseteq \Omega$ die **G -Bahn von ω** .

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Operationen von Gruppen auf Mengen

Es sei G eine Gruppe und Ω eine (nichtleere) Menge.

„ G operiert auf Ω “, falls eine Abbildung

$$G \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad (g, \omega) \mapsto g \cdot \omega$$

existiert mit

- $(gh) \cdot \omega = g \cdot (h \cdot \omega)$ für alle $g, h \in G$ und $\omega \in \Omega$,
- $1 \cdot \omega = \omega$ für alle $\omega \in \Omega$.

Operiert G auf Ω , so heißt für ein $\omega \in \Omega$

- $G \cdot \omega := \{g \cdot \omega \mid g \in G\} \subseteq \Omega$ die **G -Bahn von ω** .
- $G_\omega := \{g \in G \mid g \cdot \omega = \omega\} \leq G$ der **Stabilisator von ω** .

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Operationen von Gruppen auf Mengen

Es sei G eine Gruppe und Ω eine (nichtleere) Menge.

„ G operiert auf Ω “, falls eine Abbildung

$$G \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad (g, \omega) \mapsto g \cdot \omega$$

existiert mit

- $(gh) \cdot \omega = g \cdot (h \cdot \omega)$ für alle $g, h \in G$ und $\omega \in \Omega$,
- $1 \cdot \omega = \omega$ für alle $\omega \in \Omega$.

Operiert G auf Ω , so heißt für ein $\omega \in \Omega$

- $G \cdot \omega := \{g \cdot \omega \mid g \in G\} \subseteq \Omega$ die **G -Bahn von ω** .
- $G_\omega := \{g \in G \mid g \cdot \omega = \omega\} \leq G$ der **Stabilisator von ω** .

Es gilt

- $|G\omega| = [G : G_\omega] = \frac{|G|}{|G_\omega|}$, d.h. die Länge der Bahn ist der **Index des Stabilisators** in G .

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Operationen von Gruppen auf Mengen

Es sei G eine Gruppe und Ω eine (nichtleere) Menge.

„ G operiert auf Ω “, falls eine Abbildung

$$G \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad (g, \omega) \mapsto g \cdot \omega$$

existiert mit

- $(gh) \cdot \omega = g \cdot (h \cdot \omega)$ für alle $g, h \in G$ und $\omega \in \Omega$,
- $1 \cdot \omega = \omega$ für alle $\omega \in \Omega$.

Operiert G auf Ω , so heißt für ein $\omega \in \Omega$

- $G \cdot \omega := \{g \cdot \omega \mid g \in G\} \subseteq \Omega$ die **G -Bahn von ω** .
- $G_\omega := \{g \in G \mid g \cdot \omega = \omega\} \leq G$ der **Stabilisator von ω** .

Es gilt

- $|G\omega| = [G : G_\omega] = \frac{|G|}{|G_\omega|}$, d.h. die Länge der Bahn ist der **Index des Stabilisators** in G .

Wie kann man die **Anzahl** der G -Bahnen auf Ω bestimmen?

Nicht Burnsidese Lemma

Es sei Ω/G die Menge der G -Bahnen auf Ω .

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidese
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Nicht Burnsides Lemma

Es sei Ω/G die Menge der G -Bahnen auf Ω .

Lemma (Cauchy-Frobenius-Burnside)

Die Anzahl der Bahnen $|\Omega/G|$ von G auf Ω ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)|,$$

wobei $\text{Fix}_{\Omega}(g) := \{\omega \in \Omega \mid g \cdot \omega = \omega\}$ ist.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Nicht Burnsides Lemma

Es sei Ω/G die Menge der G -Bahnen auf Ω .

Lemma (Cauchy-Frobenius-Burnside)

Die Anzahl der Bahnen $|\Omega/G|$ von G auf Ω ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)|,$$

wobei $\text{Fix}_{\Omega}(g) := \{\omega \in \Omega \mid g \cdot \omega = \omega\}$ ist.

Beweis:

$$\sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)| = |\{(g, \omega) \in G \times \Omega \mid g \cdot \omega = \omega\}|$$

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Nicht Burnsides Lemma

Es sei Ω/G die Menge der G -Bahnen auf Ω .

Lemma (Cauchy-Frobenius-Burnside)

Die Anzahl der Bahnen $|\Omega/G|$ von G auf Ω ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)|,$$

wobei $\text{Fix}_{\Omega}(g) := \{\omega \in \Omega \mid g \cdot \omega = \omega\}$ ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)| &= |\{(g, \omega) \in G \times \Omega \mid g \cdot \omega = \omega\}| \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} |G_{\omega}| = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|G \cdot \omega|} \end{aligned}$$

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Nicht Burnsides Lemma

Es sei Ω/G die Menge der G -Bahnen auf Ω .

Lemma (Cauchy-Frobenius-Burnside)

Die Anzahl der Bahnen $|\Omega/G|$ von G auf Ω ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)|,$$

wobei $\text{Fix}_{\Omega}(g) := \{\omega \in \Omega \mid g \cdot \omega = \omega\}$ ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)| &= |\{(g, \omega) \in G \times \Omega \mid g \cdot \omega = \omega\}| \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} |G_{\omega}| = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|G \cdot \omega|} \\ &= |G| \sum_{B \in \Omega/G} \sum_{\omega \in B} \frac{1}{|B|} = |G| \sum_{B \in \Omega/G} 1 \end{aligned}$$

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Nicht Burnsides Lemma

Es sei Ω/G die Menge der G -Bahnen auf Ω .

Lemma (Cauchy-Frobenius-Burnside)

Die Anzahl der Bahnen $|\Omega/G|$ von G auf Ω ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)|,$$

wobei $\text{Fix}_{\Omega}(g) := \{\omega \in \Omega \mid g \cdot \omega = \omega\}$ ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\Omega}(g)| &= |\{(g, \omega) \in G \times \Omega \mid g \cdot \omega = \omega\}| \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} |G_{\omega}| = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|G \cdot \omega|} \\ &= |G| \sum_{B \in \Omega/G} \sum_{\omega \in B} \frac{1}{|B|} = |G| \sum_{B \in \Omega/G} 1 \\ &= |G| \cdot |\Omega/G|. \end{aligned}$$

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die Sudoku-Gruppe G hat $(3!)^8 \cdot 2 \cdot 9! = 1218998108160$
Elemente.

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die Sudoku-Gruppe G hat $(3!)^8 \cdot 2 \cdot 9! = 1218998108160$
Elemente.

Das Ummummerieren vertauscht mit den anderen
Operationen:

$$G = U \times H.$$

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die Sudoku-Gruppe G hat $(3!)^8 \cdot 2 \cdot 9! = 1218998108160$
Elemente.

Das Umnummerieren vertauscht mit den anderen
Operationen:

$$G = U \times H.$$

Bezeichnung:

Wir nennen zwei Sudoku-Felder „äquivalent“, wenn sie
durch Umnummerieren auseinander hervorgehen.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die Sudoku-Gruppe G hat $(3!)^8 \cdot 2 \cdot 9! = 1218998108160$
Elemente.

Das Umnummerieren vertauscht mit den anderen
Operationen:

$$G = U \times H.$$

Bezeichnung:

Wir nennen zwei Sudoku-Felder „äquivalent“, wenn sie
durch Umnummerieren auseinander hervorgehen.

H operiert auf den **Äquivalenzklassen** von Sudokus.

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die Sudoku-Gruppe G hat $(3!)^8 \cdot 2 \cdot 9! = 1218998108160$ Elemente.

Das Umnummerieren vertauscht mit den anderen Operationen:

$$G = U \times H.$$

Bezeichnung:

Wir nennen zwei Sudoku-Felder „äquivalent“, wenn sie durch Umnummerieren auseinander hervorgehen.

H operiert auf den **Äquivalenzklassen** von Sudokus.

Idee: Benutze Cauchy-Frobenius-Burnside-Lemma.

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Die Sudoku-Gruppe G hat $(3!)^8 \cdot 2 \cdot 9! = 1218998108160$ Elemente.

Das Umnummerieren vertauscht mit den anderen Operationen:

$$G = U \times H.$$

Bezeichnung:

Wir nennen zwei Sudoku-Felder „äquivalent“, wenn sie durch Umnummerieren auseinander hervorgehen.

H operiert auf den **Äquivalenzklassen** von Sudokus.

Idee: Benutze Cauchy-Frobenius-Burnside-Lemma.

Problem: $|H| = 3359232$ immer noch ziemlich groß.

Lemma

Operiert H auf Ω und sind $h, k \in H$, dann ist

$$\text{Fix}_\Omega(khk^{-1}) = k \cdot \text{Fix}_\Omega(h), \text{ also } |\text{Fix}_\Omega(h)| = |\text{Fix}_\Omega(khk^{-1})|.$$

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Lemma

Operiert H auf Ω und sind $h, k \in H$, dann ist

$$\text{Fix}_\Omega(khk^{-1}) = k \cdot \text{Fix}_\Omega(h), \text{ also } |\text{Fix}_\Omega(h)| = |\text{Fix}_\Omega(khk^{-1})|.$$

Benutze das Computeralgebrasystem **GAP**, um die Konjugiertenklassen von H zu bestimmen.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Lemma

Operiert H auf Ω und sind $h, k \in H$, dann ist

$$\text{Fix}_\Omega(khk^{-1}) = k \cdot \text{Fix}_\Omega(h), \text{ also } |\text{Fix}_\Omega(h)| = |\text{Fix}_\Omega(khk^{-1})|.$$

Benutze das Computeralgebrasystem **GAP**, um die **Konjugiertenklassen** von H zu bestimmen.

Es sind 275.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Gruppentheorie

Lemma

Operiert H auf Ω und sind $h, k \in H$, dann ist

$$\text{Fix}_\Omega(khk^{-1}) = k \cdot \text{Fix}_\Omega(h), \text{ also } |\text{Fix}_\Omega(h)| = |\text{Fix}_\Omega(khk^{-1})|.$$

Benutze das Computeralgebrasystem **GAP**, um die **Konjugiertenklassen** von H zu bestimmen.

Es sind 275.

Suche für jede von diesen durch Backtracksuche alle Äquivalenzklassen von Sudoku-Feldern, die von einem Klassenvertreter in auf sich abgebildet wird.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Gruppentheorie

Lemma

Operiert H auf Ω und sind $h, k \in H$, dann ist

$$\text{Fix}_\Omega(khk^{-1}) = k \cdot \text{Fix}_\Omega(h), \text{ also } |\text{Fix}_\Omega(h)| = |\text{Fix}_\Omega(khk^{-1})|.$$

Benutze das Computeralgebrasystem **GAP**, um die **Konjugiertenklassen** von H zu bestimmen.

Es sind 275.

Suche für jede von diesen durch Backtracksuche alle Äquivalenzklassen von Sudoku-Feldern, die von einem Klassenvertreter in auf sich abgebildet wird.

Es gibt 5472730538 wesentlich verschiedene Sudokus.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wieviele Sudoku-Rätsel gibt es?

Wie macht man Sudoku-Rätsel?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

**Wie viele Hinweise braucht
man?**

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Unzählige

Wie macht man Sudoku-Rätsel?

- 1 Nimm eines der 5472730538 Sudoku-Felder.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Unzählige

Wie macht man Sudoku-Rätsel?

- 1 Nimm eines der 5472730538 Sudoku-Felder.
- 2 Trage so lange Hinweise ein, bis es eindeutig wird.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?
Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?
Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Unzählige

Wie macht man Sudoku-Rätsel?

- 1 Nimm eines der 5472730538 Sudoku-Felder.
- 2 Trage so lange Hinweise ein, bis es eindeutig wird.

Wieviele braucht man?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?
Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Unzählige

Wie macht man Sudoku-Rätsel?

- 1 Nimm eines der 5472730538 Sudoku-Felder.
- 2 Trage so lange Hinweise ein, bis es eindeutig wird.

Wieviele braucht man?

Typisch sind etwa 20–24, wobei „weniger“ nicht unbedingt „schwerer zu lösen“ bedeutet!

Unzählige

Wie macht man Sudoku-Rätsel?

- 1 Nimm eines der 5472730538 Sudoku-Felder.
- 2 Trage so lange Hinweise ein, bis es eindeutig wird.

Wieviele braucht man?

Typisch sind etwa 20–24, wobei „weniger“ nicht unbedingt „schwerer zu lösen“ bedeutet!

Es gibt schon $\binom{81}{22} = 37189689288205989600$

Möglichkeiten, 22 Hinweise für **ein einziges** Sudoku-Feld auszusuchen,

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Wie macht man Sudoku-Rätsel?

- 1 Nimm eines der 5472730538 Sudoku-Felder.
- 2 Trage so lange Hinweise ein, bis es eindeutig wird.

Wieviele braucht man?

Typisch sind etwa 20–24, wobei „weniger“ nicht unbedingt „schwerer zu lösen“ bedeutet!

Es gibt schon $\binom{81}{22} = 37189689288205989600$

Möglichkeiten, 22 Hinweise für **ein einziges** Sudoku-Feld auszusuchen, etliche werden zu Sudoku-Rätseln führen.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?
Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Unzählige

Wie macht man Sudoku-Rätsel?

- 1 Nimm eines der 5472730538 Sudoku-Felder.
- 2 Trage so lange Hinweise ein, bis es eindeutig wird.

Wieviele braucht man?

Typisch sind etwa 20–24, wobei „weniger“ nicht unbedingt „schwerer zu lösen“ bedeutet!

Es gibt schon $\binom{81}{22} = 37189689288205989600$

Möglichkeiten, 22 Hinweise für **ein einziges** Sudoku-Feld auszusuchen, etliche werden zu Sudoku-Rätseln führen.

Eine solche Auswahl von 22 liefert

$2^{(81-22)} = 576460752303423488$ Rätsel.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Unzählige

Wie macht man Sudoku-Rätsel?

- 1 Nimm eines der 5472730538 Sudoku-Felder.
- 2 Trage so lange Hinweise ein, bis es eindeutig wird.

Wieviele braucht man?

Typisch sind etwa 20–24, wobei „weniger“ nicht unbedingt „schwerer zu lösen“ bedeutet!

Es gibt schon $\binom{81}{22} = 37189689288205989600$

Möglichkeiten, 22 Hinweise für **ein einziges** Sudoku-Feld auszusuchen, etliche werden zu Sudoku-Rätseln führen.

Eine solche Auswahl von 22 liefert

$2^{(81-22)} = 576460752303423488$ Rätsel.

⇒ Anzahl der Sudokurätsel **astronomisch** und **unbekannt**.

Frage

Gibt es Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Umnummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Offenes Problem

Frage

Gibt es Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen?

Derzeitige Lage:

- Es gibt Sudoku-Rätsel mit 17 Hinweisen.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Offenes Problem

Frage

Gibt es Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen?

Derzeitige Lage:

- Es gibt Sudoku-Rätsel mit 17 Hinweisen.
- Es ist kein Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen bekannt.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Offenes Problem

Frage

Gibt es Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen?

Derzeitige Lage:

- Es gibt Sudoku-Rätsel mit 17 Hinweisen.
- Es ist kein Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen bekannt.
- Gordon Royle an der University of Western Australia hat derzeit 36628 Sudoku-Rätsel mit 17 Hinweisen:

<http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/sudokumin.php>

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Offenes Problem

Frage

Gibt es Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen?

Derzeitige Lage:

- Es gibt Sudoku-Rätsel mit 17 Hinweisen.
- Es ist kein Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen bekannt.
- Gordon Royle an der University of Western Australia hat derzeit 36628 Sudoku-Rätsel mit 17 Hinweisen:

<http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/sudokumin.php>

- Es wird vermutet, dass es nicht sehr viel mehr gibt.

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte
Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

Wieviele
„wesentlich
verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche
Lemma

Zählen

Wieviele
Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?

Offenes Problem

Frage

Gibt es Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen?

Derzeitige Lage:

- Es gibt Sudoku-Rätsel mit 17 Hinweisen.
- Es ist kein Sudoku-Rätsel mit 16 Hinweisen bekannt.
- Gordon Royle an der University of Western Australia hat derzeit 36628 Sudoku-Rätsel mit 17 Hinweisen:

<http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/sudokumin.php>

- Es wird vermutet, dass es nicht sehr viel mehr gibt.
- Bei keinem der bekannten 17er kann man einen Hinweis weglassen.

Max Neunhöffer

Was ist Sudoku?

Sudoku?!

Was hat das mit
Computeralgebra zu tun?

Quellen

Wieviele gefüllte Sudoku-Felder?

Erste Schätzung

Reduktion durch
Ummummerierung

Die obere Blockzeile

Reduktionen

Brute Force

http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_Sudoku

<http://www.math.ie/checker.html>

<http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/sudokupat.php?cn=3>

<http://www.stolaf.edu/people/hansonr/sudoku/exactcovermatrix.htm>

<http://magictour.free.fr/sudoku.htm>

Wieviele „wesentlich verschiedene“?

Symmetrie

Das Nicht-Burnsidesche

Lemma

Zählen

Wieviele Sudoku-Rätsel?

Wie viele Hinweise braucht
man?

Gibt es Sudoku-Rätsel mit
16 Hinweisen?