Oliver Braun Sommersemester 2015

Vorkurs zur linearen Algebra

1. Übungsblatt

Aufgabe 1. (Mengen) Es seien $A := \underline{6} - \{5\}$, $B := \{1,2,4,4,1,2,1\}$, $C := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade und } x \leq 8\}$.
Berechnen Sie

1. $|A|$, $|B|$, $|C|$.
2. $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ und $A \cup B \cup C$.
3. $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ und $A \cap B \cap C$.
4. $A - B$, $B - A$, $B - C$, $C - B$.
5. Es sei $D := A \cap C$. Berechnen Sie $B \times D$ und $(D \times B) - (B \times D)$.

Aufgabe 2. (Potenzmenge) Berechnen Sie die Mengen $\operatorname{Pot}(\emptyset)$, $\operatorname{Pot}(\operatorname{Pot}(\emptyset))$ sowie $\operatorname{Pot}(\operatorname{Pot}(\operatorname{Pot}(\emptyset)))$.

Aufgabe 3. (Binomialkoeffizient und Teilmengen) Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$. Zeigen Sie $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
Listen Sie alle zweielementigen Teilmengen von $\underline{4}$ auf.

Aufgabe 4. (Summen- und Produktzeichen) Es sei I eine endliche Menge und zu jedem $i \in I$ ein $a_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren die folgenden Schreibweisen.

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i := 0, \quad \sum_{i \in I} a_i := a_j + \sum_{i \in I - \{j\}} a_i$$

Wir nennen $\sum$ das Summenzeichen. Die Bezeichnung des Indizes i ist frei wählbar, es ist also $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in I} a_j$.
Mit dem Summenzeichen lassen sich Summen kompakt notieren. Es ist zum Beispiel

$$\sum_{i \in \underline{4}} i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \qquad \sum_{i \in \{1,3,5\}} i^2 = 1 + 9 + 25 = 35.$$

Die folgenden Kurzschreibweisen sind üblich:

$$\sum_{i \text{ erfüllt eine Eigenschaft } X} a_i := \sum_{i \in \{x \mid x \text{ erfüllt } X\}} a_i,$$

sowie

$$\sum_{k=\ell}^{n} a_k := \sum_{\ell \leq k \leq n} a_k.$$

Zum Beispiel ist $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \sum_{1 \leq j \leq 4} \frac{1}{j} = \sum_{\ell \in \underline{4}} \frac{1}{\ell} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$ und $\sum_{2 \leq j \leq 5} 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 60$.

Genauso definiert man (mit analogen Konventionen und Kurzschreibweisen) das Produktzeichen $\prod$:

$$\prod_{i\in\emptyset} a_i := 1,\ \prod_{i\in I} a_i := a_j \cdot \prod_{i\in I-\{j\}} a_i$$

Berechnen Sie

1. $\sum_{\ell=1}^{4} \ell$, $\sum_{\ell=1}^{400} 3$ und $\displaystyle\sum_{\substack{i\in\underline{7}\\ i \text{ ungerade}}} \frac{1}{i}$.

2. $\prod_{1\leq n\leq 5} n^2$, $\prod_{i=1}^{6} \frac{i+1}{i}$ und $\prod_{k=0}^{100}(k-50)^2$.

3. $\sum_{k=3}^{0} k$ und $\sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j}$.

Zusatzaufgabe 5. (Teilmengen) Seien A und B Mengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) $A \cap B = A$ (ii) $A \cup B = B$ (iii) $A \subseteq B$.
Hinweis: Um (i)$\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) zu zeigen, genügt es, (i)$\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen.