

Vorkurs zur linearen Algebra

2. Übungsblatt

Aufgabe 6. (Abbildungen) (a) Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen f von $\underline{3} \times \underline{3}$ Funktionen von $\underline{3}$ nach $\underline{3}$ sind.

1. $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

2. $f = \{(1, 1), (1, 3)\}$

3. $f = \{(3, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

(b) Ist $f = \{(x, x^2 + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$?

(c) Ist $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}, \frac{a}{b} \mapsto a$ eine Funktion?

Aufgabe 7. (inverse Abbildung) Zeigen Sie, dass

$$F : \{0, 1\}^{\{0, 1\}} \rightarrow \{0, 1\} \times \{0, 1\}, f \mapsto (f(0), f(1))$$

und

$$G : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}^{\{0, 1\}}, (a, b) \mapsto (\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}, 0 \mapsto a, 1 \mapsto b)$$

zu einander inverse Abbildungen sind.

Aufgabe 8. (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität) Prüfen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

2. $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, a \mapsto (a, -a)$

3. $h : \underline{5} \rightarrow \underline{3}, n \mapsto \begin{cases} n-2 & n \in \{3, 4, 5\} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

4. $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto 2z + 1$

Berechnen Sie alle Fasern von f und h .

Aufgabe 9. (Fasern) Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung und $M, N \subseteq B$. Zeigen Sie $f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) = f^{-1}(M \cap N)$ und $f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) = f^{-1}(M \cup N)$.

Zusatzaufgabe 10. (charakteristische Funktion) Es sei M eine Menge und $A \subseteq M$. Dann definieren wir die charakteristische Funktion χ_A von A durch

$$\chi_A : M \rightarrow \{0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\chi : \text{Pot}(M) \rightarrow \{0, 1\}^M, A \mapsto \chi_A$ eine Bijektion ist.