Oliver Braun Sommersemester 2015

Vorkurs zur linearen Algebra

4. Übungsblatt

Aufgabe 16. (Nullring) Es sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $|R| = 1$,

(ii) $0 = 1$,

(iii) $0 \in R^*$.

Aufgabe 17. (Ringe) Es sei $[0,1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Zeigen Sie, dass die Menge R der Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

einen Ring bildet. Verwenden Sie ohne Beweis, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Ring ist.

Aufgabe 18. (größter gemeinsamer Teiler) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(72, 25)$ und $\mathrm{ggT}(212, 73)$ sowie jeweils Bézout-Identitäten.

Aufgabe 19. ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

1. Berechnen Sie $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$.

2. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ genau dann $n-1$ Elemente hat, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 20. (Verknüpfungen)

1. Betrachten Sie $\circ$, die Hintereinanderausführung von Funktionen, als Verknüpfung auf M^M, für eine beliebige Menge M. Zeigen Sie, dass $\circ$ stets ein neutrales Element auf M^M besitzt. Sei nun speziell $M = \underline{3}$. Zeigen Sie, dass $\circ$ nicht kommutativ ist.

2. Es sei M eine Menge mit Verknüpfung und $x \in M$ invertierbar. Zeigen Sie $(x^{-1})^{-1} = x$.