

Direkte Summen von Ringen und Homomorphismen

Oliver Braun

8. April 2015

In diesem zusätzlichen Abschnitt arbeiten wir weiter mit Ringen, indem wir uns hauptsächlich mit strukturerhaltenden Abbildungen zwischen ihnen befassen.

1 Die ringdirekte Summe

Definition 1.1 Seien R und S Ringe. Dann definieren die folgenden zwei Verknüpfungen eine Ringstruktur auf $R \times S$:

$$+ : R \times S \rightarrow R \times S, \left((r, s), (r', s') \right) \mapsto (r + r', s + s')$$

als Addition und

$$\cdot : R \times S \rightarrow R \times S, \left((r, s), (r', s') \right) \mapsto (r \cdot r', s \cdot s')$$

als Multiplikation. Das heißt die Verknüpfungen sind eintragsweise definiert. Die neutralen Elemente sind $(0_R, 0_S)$ (für die Addition) und $(1_R, 1_S)$ (für die Multiplikation).

Diesen Ring bezeichnen wir als ringdirekte Summe von R und S , in Symbolen $R \oplus S$.

Damit haben wir nun eine Möglichkeit zur Verfügung, aus Ringen, die wir schon kennen, neue Ringe zu konstruieren.

Bemerkung 1.2 Seien R und S Ringe. Dann ist $(R \oplus S)^* = R^* \times S^*$. Dies mache man sich als Übung klar.

2 Homomorphismen von Ringen

Homomorphismen sind strukturerhaltende Abbildungen zwischen algebraischen Strukturen, in unserem Fall werden wir Homomorphismen zwischen Ringen betrachten.

Definition 2.1 Seien R und S Ringe. Ein Homomorphismus von R nach S ist eine Abbildung $f : R \rightarrow S$, welche alle wesentlichen Bestandteile der Ringstruktur erhält, das heißt

1. $f(r + r') = f(r) + f(r')$ für alle $r, r' \in R$,
2. $f(r \cdot r') = f(r) \cdot f(r')$ für alle $r, r' \in R$,
3. $f(0_R) = 0_S$,
4. $f(-r) = -f(r)$ f.a. $r \in R$,
5. $f(1_R) = 1_S$.

Es werden also die zwei Verknüpfungen, die neutralen und die inversen Elemente von einem Homomorphismus “übertragen”.

Bemerkung 2.2 Häufig findet man die Definition eines Ringhomomorphismus nur mit den drei Bedingungen 1, 2 und 5 vor. In der Tat folgen die anderen Bedingungen aus diesen dreien. Allerdings ist die Forderung “Ein Homomorphismus muss alle Bestandteile der algebraischen Struktur respektieren” eine allgemeine Formulierung, die sich so auf andere Strukturen übertragen lässt.

Beweis: Es ist $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ nach Bedingung 1, woraus 3 folgt. $f(r) + f(-r) = f(r + (-r)) = f(0) = 0$ zeigt Bedingung 4. $\square$

Man zeige als Übung, um sich mit diesem Begriff vertraut zu machen, dass es für jeden beliebigen Ring R genau einen Homomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow R$ gibt.

Lemma 2.3 Seien R und S Ringe und $f : R \rightarrow S$ ein Homomorphismus. Ist $r \in R$ invertierbar, so ist auch $f(r) \in S$ invertierbar und es gilt $f(r)^{-1} = f(r^{-1})$.

Beweis: $f(r) \cdot f(r^{-1}) = f(rr^{-1}) = f(1) = 1$. $\square$

Definition 2.4 Seien R und S Ringe. Wir nennen einen Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ einen

- **Monomorphismus**, falls f injektiv ist,

- **Epimorphismus**, falls f surjektiv ist,
- **Isomorphismus**, falls f bijektiv ist.

Monomorphismen werden gelegentlich auch als Einbettungen bezeichnet.
Gibt es einen Isomorphismus zwischen R und S , so schreiben wir auch $R \cong S$.

Bemerkung 2.5 Im letzten Fall ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Homomorphismus von Ringen.

Ein Isomorphismus erlaubt es uns, Ringstrukturen auf verschiedenen Mengen als “strukturell gleich” zu erkennen. So kann man die Ringstruktur von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf der zweielementigen Menge $\{0, 1\}$ genau so gut definieren wie auf der zweielementigen Menge $\{x, y\}$.

Mit Hilfe dieses Konzepts kann man zudem Ringe durch andere Ringe, die man bereits kennt, besser verstehen. Wie dies gemeint ist, wird in dem folgenden Beispiel deutlich.

Beispiel 2.6 Sei R der Ring $(\text{Pot}(\{a, b\}), \Delta, \cap)$ aus dem letzten Kapitel, der Einfachheit halber hier auf der Potenzmenge einer zweielementigen Menge. Wir verwenden die (übliche) Abkürzung $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und behaupten, dass $R \cong \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$.

Um dies zu beweisen, notieren wir Funktionen $\{a, b\} \rightarrow \{0, 1\}$ als geordnete Paare der Form $(f(a), f(b))$. Interpretieren wir nun die Werte 0 und 1, die die charakteristische Funktion einer Teilmenge von $\{a, b\}$ annehmen kann als Werte in $\mathbb{F}_2$, so können wir die Abbildung

$$\varphi : R \rightarrow \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2, \quad T \mapsto (\chi_T(a), \chi_T(b))$$

definieren.

Die Addition in $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$ ist eintragsweise definiert und in jedem Eintrag kann als Ergebnis der Addition von zwei Elementen nur dann eine 1 entstehen, wenn genau einer der Summanden 1 ist. Dies ist ein “ausschließendes Oder”, wie es auch in der Definition von Δ steckt, sodass $\varphi(T \Delta Q) = \varphi(T) + \varphi(Q)$ für Teilmengen T, Q von $\{a, b\}$ gilt.

Genauso kann man sich überlegen, dass φ die Ringmultiplikationen der zwei Ringe respektiert. Da die Zuordnung φ bijektiv ist, liegt in der Tat ein Isomorphismus vor. Somit können wir nun den komplizierteren Ring R mit Hilfe des einfacheren Rings $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$ ¹ verstehen.

Beispiel 2.7 Weitere Beispiele für Ringhomomorphismen:

- Die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$ ist ein Ringepimorphismus.

¹Diese Wertung ist gegebenenfalls eine Frage des persönlichen Geschmacks.

- Der eindeutig bestimmte Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist ein Monomorphismus.
- Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$. Dieser ist zugleich ein Isomorphismus.

Beispiel 2.8 Da ein Isomorphismus ringtheoretische Eigenschaften überträgt, die sich mit Hilfe von Aussagen der Form “für alle ...”, “es existiert ...” und den Ringaxiomen formulieren lassen, können wir auch beweisen, dass zwischen gewissen Ringen keine Isomorphismen existieren. Als Beispiel beweisen wir, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Angenommen wir haben einen Isomorphismus $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Dann gilt nämlich

$$0 = f((0,0)) = f((1,1) + (1,1)) = f((1,1)) + f((1,1)) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, was ein Widerspruch ist.²

Beispiel 2.9 Zum Abschluss dieses Kapitels möchten wir alle Ringe mit drei Elementen bis auf Isomorphie klassifizieren. Das heißt, dass wir uns für die Struktur des Rings und seiner Rechenregeln interessieren und dass es nicht von Belang ist, wie die Elemente des Rings bezeichnet sind.

Wir nehmen also an, dass unser Ring aus drei verschiedenen Elementen besteht, die wir 0, 1 und x nennen. Aufgrund dessen, was wir bereits gelernt haben, können wir bereits große Teile der Additions- und Multiplikationstabellen notieren.

+	0	1	x	•	0	1	x
0	0	1	x	0	0	0	0
1	1			1	0	1	x
x	x			x	0	x	

Wir werden nun die verschiedenen Möglichkeiten für die verbleibenden Verknüpfungen untersuchen.

Wenden wir uns zunächst $1 + 1$ zu. Prinzipiell bestehen die drei Möglichkeiten

$$1 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 0, \quad 1 + 1 = x.$$

Wäre $1 + 1 = 1$, so wäre $1 = 0$ durch Addition von -1 auf beiden Seiten. Dies ist jedoch ein Widerspruch.

Nehmen wir an, dass $1 + 1 = 0$. Dann ist auch $x + x = (1 + 1)x = 0x = 0$. Wir gehen nun die verschiedenen Möglichkeiten für $1 + x$ durch. $1 + x = 1$ impliziert $x = 0$, $1 + x = x$ impliziert $1 = 0$, sodass diese beiden Möglichkeiten ausgeschlossen werden können. $1 + x = 0$ würde bedeuten, dass x das additiv inverse Element zu 1 ist. Wir haben jedoch $1 + 1 = 0$ angenommen, was bedeutet, dass 1 selbst das additive Inverse zu 1 ist. Das hieße also $x = 1$, was ebenfalls

²In der Tat gibt es, mit diesem Argument, überhaupt keinen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Beachten Sie jedoch, dass die Abbildung $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $1 \mapsto (1, 1)$ ein Ringhomomorphismus (jedoch kein Mono- oder Epimorphismus) ist.

ein Widerspruch ist. Somit ist die gesamte Annahme $1 + 1 = 0$ nicht haltbar. Folglich ist $1 + 1 = x$.

Wir notieren dies in der Additionstafel:

+	0	1	x
0	0	1	x
1	1	x	0
x	x	0	

Dabei können wir $1 + x = 0$ sofort eintragen, da jedes Element ein additiv inverses Element besitzen muss. Es muss also in jeder Zeile eine 0 vorkommen. Nun untersuchen wir noch $x + x$. Die Gleichung $x + x = 0$ führt zu $-x = x$, wir haben jedoch gerade geschlossen, dass $-x = 1$. Die Annahme $x + x = x$ liefert $x = 0$. Folglich ist $x + x = 1$ und wir haben die Additionstafel vervollständigt.

Wir müssen nun noch den einen fehlenden Eintrag in der Multiplikationstafel bestimmen. Es gilt

$$x \cdot x = (1 + 1)x = x + x = 1,$$

was wir aus der Additionstafel ablesen können. Damit haben wir also insgesamt

+	0	1	x	•	0	1	x
0	0	1	x	0	0	0	0
1	1	x	0	1	0	1	x
x	x	0	1	x	0	x	1

Es gibt also bis auf Isomorphie nur einen Ring mit drei Elementen. Da wir bereits einen solchen Ring kennen, nämlich $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, muss jeder dreielementige Ring zwangsweise zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ isomorph sein.

Bemerkung 2.10 Bis auf Isomorphie gibt es nur einen Ring mit zwei Elementen, was nun eine leichte Übungsaufgabe ist. Es gibt auch nur einen Ring mit fünf Elementen. Dies ist allerdings mit der obigen Methode schon recht aufwändig. Die Klassifikation der Ringe mit vier Elementen ist noch außerhalb Ihrer Reichweite (zur Information, es gibt vier nichtisomorphe Ringe mit vier Elementen).