Minimale Klassen und maximale Untergruppen

Oliver Braun

Masterarbeit im Fach Mathematik

RWTH Aachen
Lehrstuhl D für Mathematik
Prof. Dr. Gabriele Nebe

Aktualisierte Fassung vom 10.10.2013

Inhaltsverzeichnis

Bei dieser Version der Arbeit handelt es sich um eine im Vergleich zum Original modifizierte Fassung vom 10.10.2013, die zusätzliche Ergebnisse beinhaltet.

1. Einleitung

Das Teilgebiet der klassischen Gittertheorie, welches sich mit der Suche nach perfekten Gittern beziehungsweise perfekten quadratischen Formen befasst, ist eine traditionsreiche Disziplin, welche Elemente der algebraischen Zahlentheorie, Gruppen- und Darstellungstheorie sowie Geometrie in sich vereint. Das Studium der perfekten quadratischen Formen, welches eng verbunden ist mit der Suche nach der dichtesten regelmäßigen Kugelpackung in einem n-dimensionalen Raum, geht zurück auf wegweisende Arbeiten der Mathematiker Korkine, Zolotareff und Voronoi. Der algorithmische Zugang zu diesem Problem hat zum Entstehen einer sehr reichhaltigen Theorie geführt, die nicht mehr nur die perfekten Formen selbst betrifft, sondern beispielsweise auch (Ko-)homologie-Berechnungen für arithmetische Gruppen ermöglicht.
Von quadratischen Formen wurde die Voronoi-Theorie später auf Hermitesche Formen über imaginärquadratischen Zahlkörpern und so genannten Humbert-Formen über beliebigen algebraischen Zahlkörpern verallgemeinert. Überdies existieren Fassungen dieser Theorie für Divisionsalgebren über $\mathbb{Q}$ und algebraische Gruppen.

Die vorliegende Arbeit ist motiviert durch die Frage nach der Isomorphie gewisser unendlicher Gruppen. Während für unendliche Gruppen keine allgemein anwendbaren Algorithmen zur Behandlung dieser Fragestellung existieren, besitzen die hier betrachteten Gruppen eine Operation auf einem topologischen Raum, deren Studium es in einigen Fällen ermöglicht, die Nicht-Isomorphie der Gruppen zu zeigen. Die Strategie zum Erreichen dieses Resultats besteht darin, ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen zu bestimmen.

Die Gruppen, die in dieser Arbeit studiert werden, sind die Gruppen $\mathrm{GL}(L)$ der $\mathcal{O}_K$-Modulautomorphismen von endlich erzeugten torsionsfreien $\mathcal{O}_K$-Teilmoduln L des Vektorraums K^n, so genannte $\mathcal{O}_K$-Gitter. Dabei ist hier $K/\mathbb{Q}$ - ob der algorithmischen Handhabbarkeit - ein imaginärquadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$.

Die Frage nach der Isomorphie dieser Gruppen entstand während der Arbeit an dem Artikel [BC13] mit Renaud Coulangeon, der auf meiner Bachelorarbeit [Bra12] aufbaut. Darin wird der Voronoi-Algorithmus für nicht notwendig freie Gitter über imaginärquadratischen Zahlkörpern aufbauend auf [Cou04, Mey08] beschrieben und in Magma [BCP97] implementiert.

Der Zugang zu den maximal endlichen Untergruppen der $\mathrm{GL}(L)$ geschieht, dem Artikel [CN13] folgend, über so genannte minimale Klassen, welche Äquivalenzklassen auf der Menge der positiv definiten Hermiteschen Formen sind. Auf diesen Klassen operiert $\mathrm{GL}(L)$ in natürlicher Weise und die Stabilisatoren einiger dieser Klassen (der so genannten well-rounded Klassen) sind endliche Untergruppen. Aus diesen endlichen Untergruppen lässt sich das gewünschte Vertretersystem bestimmen.

Wir beginnen die Arbeit, indem wir das Konzept der dualen Kegel aufgreifen, welches von Max Koecher unter dem Namen Positivitätsbereiche beschrieben wurde und von Jürgen Opgenorth weiter ausgearbeitet wurde. In diesem allgemeinen Rahmen lässt sich der Voronoi-Algorithmus beschreiben. Wir stellen zudem eine Formulierung des Konzepts der minimalen Klassen vor.
Daraufhin widmen wir uns der Beschreibung minimaler Klassen über imaginärquadratischen Zahlkörpern und schlagen die Brücke zu den maximal endlichen Untergruppen. Dazu erklären wir, wie sich die Situation über den imaginärquadratischen Zahlkörpern in das Konzept der dualen Kegel einfügt. Als wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung der maximal endlichen Untergruppen erweist sich eine Erweiterung des Voronoi-Algorithmus auf G-invariante Hermitesche Formen für eine endliche Gruppe G. Schließlich beschreiben wir die für die Berechnungen verwendeten Algorithmen und ihre Implementierung.
Wir fahren fort, indem wir die Untersuchung der maximal endlichen Untergruppen von $\mathrm{GL}(L)$ aus einem theoretischen Blickwinkel betrachten, der inhaltlich an die Untersuchung kristallographischer Raumgruppen angelehnt ist, wie sie beispielsweise von Jürgen Opgenorth, Wilhelm Plesken und Tilman Schulz in [OPS98, PS00] durchgeführt wird.
Wir schließen die Arbeit mit einer Übersicht über einige rechnerische Ergebnisse und dem Quellcode der implementierten Algorithmen ab.

An dieser Stelle möchte ich meiner Betreuerin Frau Prof. Dr. G. Nebe meinen Dank aussprechen. Ihr verdanke ich die Anregung, dieses interessante Thema zu untersuchen. Zudem war sie stets zu hilfreichen und zeitintensiven Diskussionen bereit.

2. Duale Kegel und Voronoi-Theorie

2.1. Duale Kegel und perfekte Punkte

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse aus [Opg01] zusammen. Dies liefert einen allgemeinen Rahmen, in welchem die von G. Voronoi begründete Theorie funktioniert.

Es seien in diesem Abschnitt $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ zwei Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit $n := \dim(\mathcal{V}_1) = \dim(\mathcal{V}_2)$ und $\sigma : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-bilineare und in beiden Komponenten nicht ausgeartete Abbildung.

Definition 2.1.1 *Zwei Mengen $\mathcal{V}_1^{>0} \subseteq \mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2^{>0} \subseteq \mathcal{V}_2$ heißen duale Kegel bezüglich σ, falls sie die folgenden drei Bedingungen erfüllen.*

1. *Für $i = 1, 2$ ist $\mathcal{V}_i^{>0}$ offen in $\mathcal{V}_i$ und nichtleer.*

2. *Für alle $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ und $y \in \mathcal{V}_2^{>0}$ ist $\sigma(x, y) > 0$.*

3. *Zu jedem $x \in \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_1^{>0}$ existiert ein $0 \neq y \in \mathcal{V}_2^{\geq 0}$ mit $\sigma(x, y) \leq 0$ und umgekehrt existiert zu jedem $y \in \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_2^{>0}$ ein $0 \neq x \in \mathcal{V}_1^{\geq 0}$, sodass $\sigma(x, y) \leq 0$. Dabei bezeichne $\mathcal{V}_i^{\geq 0}$ den Abschluss von $\mathcal{V}_i^{>0}$ in $\mathcal{V}_i$ für $i = 1, 2$.*

Diese Definition ist offenbar symmetrisch in $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$. Für den Rest dieses Abschnitts seien nun $\mathcal{V}_1^{>0}$ und $\mathcal{V}_2^{>0}$ duale Kegel bezüglich σ. Den Rand von $\mathcal{V}_i^{\geq 0}$ möchten wir mit $\partial\mathcal{V}_i^{>0}$ bezeichnen.
Einige einfache Eigenschaften dualer Kegel halten wir in dem folgenden Lemma fest.

Lemma 2.1.2 ([Opg01, Lemma 1.1])

1. *Seien $x, y \in \mathcal{V}_1^{>0}$ und $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann liegt auch $ax + by$ in $\mathcal{V}_1^{>0}$.*

2. *Für $0 \neq x \in \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ und $y \in \mathcal{V}_2^{>0}$ ist $\sigma(x, y) > 0$.*

3. *Für jedes $x \in \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ existiert ein $y \in \mathcal{V}_2^{>0}$ mit $\sigma(x, y) < 0$.*

4. *Zu jedem $0 \neq x \in \partial\mathcal{V}_1^{>0}$ existiert ein $0 \neq y \in \partial\mathcal{V}_2^{>0}$, sodass $\sigma(x, y) = 0$.*

5. *Aus $x \in \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ und $-x \in \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ folgt $x = 0$.*

6. *Sei Φ_2 ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathcal{V}_2$ und setze $|y|_2 := \sqrt{\Phi_2(y, y)}$. Zu jeder kompakten Teilmenge $A \subseteq \mathcal{V}_1^{>0}$ existiert eine reelle Zahl $\rho(A) > 0$, sodass für jedes $a \in A$ und jedes $y \in \mathcal{V}_2^{\geq 0}$ die Abschätzung $\sigma(a, y) \geq \rho(A)|y|_2$ gilt.*

Ist $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ diskret in $\mathcal{V}_2$ und $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$, so ist für jedes $c \in \mathbb{R}_{>0}$ die Menge

$$\{d \in D \mid \sigma(x, d) \leq c\}$$

endlich. Daher sind die folgenden Definitionen sinnvoll.

Definition 2.1.3 *Sei $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0}$ diskret in $\mathcal{V}_2$ und $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$.*

1. $\min_D(x) := \min\{\sigma(x, d) \mid d \in D\}$ *heißt das D-Minimum von x.*

2. $S_D(x) := \{d \in D \mid \min_D(x) = \sigma(x, d)\}$ *nennen wir die Menge der D-kürzesten oder D-minimalen Vektoren von x. Offenbar ist $S_D(x)$ eine endliche Menge, die $S_D(x) = S_D(\lambda x)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt.*

3. $V_D(x) := \{\sum_{d \in S_D(x)} a_d d \mid a_d \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ *heißt der D-Voronoi-Bereich von x.*

4. *Einen Vektor $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ bezeichnen wir als D-perfekt, falls sein D-Voronoi-Bereich nichtleeres Inneres besitzt. Die Menge der D-perfekten Vektoren mit D-Minimum 1 bezeichnen wir als P_D.*
   Es sei angemerkt, dass $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ genau dann D-perfekt ist, wenn $\dim(\langle S_D(x)\rangle) = n$.

5. *Wir nennen die Dimension von $\langle S_D(x)\rangle$ den Perfektionsrang von x. Die Kodimension von $\langle M_D(x)\rangle$ in $\mathcal{V}_2$ bezeichnen wir auch als den Perfektionskorang von x.*

Lemma 2.1.4 ([Opg01, Lemma 1.3]) *Es sei $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ diskret in $\mathcal{V}_2$.*

1. *Sei $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$. Es existiert eine Umgebung U von x mit $U \subseteq \mathcal{V}_1^{>0}$ und $S_D(u) \subseteq S_D(x)$ für alle $u \in U$.*

2. *Die Funktion* $\min_D$ *ist stetig.*

Definition 2.1.5 *Eine Menge $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$, die diskret in $\mathcal{V}_2$ ist, heißt zulässig, falls für jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{V}_1^{>0}$, die zu einem Randpunkt $x \in \partial\mathcal{V}_1^{>0}$ konvergiert, die Folge $(\min_D(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.*

Lemma 2.1.6 ([Opg01, Lemma 1.5]) *Sei $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ diskret in $\mathcal{V}_2$. Dann ist D genau dann zulässig, wenn zu jedem $x \in \partial\mathcal{V}_1^{>0}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $d \in D$ mit $\sigma(x, d) < \varepsilon$ existiert.*

Lemma 2.1.7 ([Opg01, Lemma 1.6]) *Sei $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ diskret in $\mathcal{V}_2$ und zulässig. Dann ist P_D diskret.*

Aus diesem Lemma lässt sich die folgende Aussage ableiten.

Korollar 2.1.8 ([Opg01, Corollary 1.7]) *Es seien x, y D-perfekte Vektoren und sei $\{d_1, ..., d_k\} \subseteq S_D(x) \cap S_D(y)$, mit $k \geq n$, sodass $\{d_1, ..., d_k\}$ eine Basis von $\mathcal{V}_2$ enthält. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x = \lambda y$.*

Lemma 2.1.9 ([Opg01, Proposition 1.8]) *Ist $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ diskret in $\mathcal{V}_2$ und zulässig, so existiert zu jedem $y \in \mathcal{V}_1^{>0}$ ein $x \in P_D$ mit $S_D(y) \subseteq S_D(x)$.*

Beweis: Wir folgen dem Beweis aus [Opg01] und nehmen an, dass $k := \dim(\langle S_D(y)\rangle) < n$. Man wähle ein $0 \neq z \in \mathcal{V}_1$ mit $\sigma(z, d) = 0$ für alle $d \in S_D(y)$. Indem wir gegebenenfalls z durch $-z$ ersetzen, können wir $z \notin \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ annehmen und $y + \lambda z$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachten. Aus Punkt 3 in Lemma 2.1.2 und einem Stetigkeitsargument folgt, dass es ein λ_0 gibt mit $y + \lambda_0 z \in \partial\mathcal{V}_1^{>0}$. Da D zulässig ist, konvergiert $\min_D(y + \lambda z)$ gegen Null, sobald λ gegen λ_0 konvergiert. Da $\min_D$ eine stetige Funktion ist, existiert ein $0 < \lambda_1 < \lambda_0$ mit $\min_D(y) > \min_D(y + \lambda_1 z) > 0$. Es sei

$$M := \{d \in D \mid \sigma(y + \lambda_1 z, d) \leq \min_D(y)\}.$$

Dies ist eine endliche Menge, die $S_D(y)$ als echte Teilmenge enthält; die Elemente $d \in M' := M - S_D(y)$ erfüllen $\sigma(z, d) < 0$ und $\sigma(y, d) > \min_D(y)$. Nun definiere man

$$\lambda_2 := \min\left\{\frac{\min_D(y) - \sigma(y, d)}{\sigma(z, d)} \mid d \in M'\right\}, \quad y_2 := y + \lambda_2 z.$$

Offenbar ist $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ und für $d \in D - M$ gilt $\sigma(y_2, d) > \min_D(y)$, da $\sigma(y, d) > \min_D(y)$ und $\sigma(y + \lambda_1 z, d) > \min_D(y)$. Nach Konstruktion wird $\sigma(y_2, d) \geq \min_D(y)$ von allen $d \in D$ erfüllt und Gleichheit gilt für alle $d \in S_D(y)$ und mindestens ein $d \in M'$. Dieses letzte d kann nicht in dem von $S_D(y)$ erzeugten Untervektorraum liegen, da $\sigma(z, d) = 0$ für alle $d \in S_D(y)$ gilt und somit anderenfalls $\min_D(y) = \sigma(y_2, d) = \sigma(y, d)$

wäre. Daraus folgt aber $d \in S_D(y)$.
Es ist also $S_D(y) \subsetneq S_D(y_2)$ und $\dim(\langle S_D(y_2)\rangle) > k$. Iteriert man dieses Verfahren, so erhält man schließlich einen perfekten Punkt, dessen Minimum man durch Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl zu 1 verändern kann. $\square$

Eine Analyse des gerade geführten Beweises ergibt die folgende Aussage.

Korollar 2.1.10 *Ist $y \in \mathcal{V}_1^{>0}$ nicht D-perfekt, so existiert ein $z \in \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ und eine positive reelle Zahl λ, sodass der Perfektionsrang von $y + \lambda z$ echt größer als der von y ist mit $S_D(y) \subsetneq S_D(y + \lambda z)$ und $\min_D(y) = \min_D(y + \lambda z)$.*
Für alle $0 \leq t < \lambda$ ist $S_D(y + tz) = S_D(y)$ und $\min_D(y + tz) = \min_D(y)$.

Beweis: Nach Wahl ist $t < \lambda$ gleichbedeutend mit $t < \min\left\{\frac{\min_D(y)-\sigma(y,d)}{\sigma(z,d)} \mid d \in M'\right\}$ im Beweis von Lemma 2.1.9 (mit denselben Bezeichnungen). Für $d \in M'$ ist dann $\sigma(y + tz, d) > \min_D(y)$, genauso wie für $d \in D - M$. $d \in S_D(y)$ impliziert klarerweise $\sigma(y + tz, d) = \min_D(y)$. $\square$

Wir erhalten noch die folgende Aussage, die später für uns wichtig sein wird.

Lemma 2.1.11 *Seien $x, y \in \mathcal{V}_1^{>0}$ mit $S_D(x) \subsetneq S_D(y)$ und $\min_D(x) = \min_D(y)$. Der Perfektionsrang von x sei k. Dann ist $V_D(x)$ eine k-dimensionale Seitenfläche von $V_D(y)$.*

Beweis: Wir betrachten $\sigma(y - x, \cdot)$ auf $S_D(y)$ und erhalten

$$\sigma(y-x,d) = \begin{cases} 0 & d \in S_D(x) \\ \sigma(y,d) - \sigma(x,d) < 0 & d \in S_D(y) - S_D(x) \end{cases}$$

Da die Elemente von $V_D(y)$ von der Form $\sum_{d \in S_D(y)} a_d d$ mit $a_d \geq 0$ sind, haben wir also

$$\sigma\left(y - x, \sum_{d \in S_D(y)} a_d d\right) = \sum_{d \in S_D(y)} a_d \sigma(y - x, d) \leq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\sum_{d \in S_D(y)} a_d d \in S_D(x)$, sodass $\{w \in \mathcal{V}_2 \mid \sigma(y - x, w) = 0\}$ die gewünschte Seitenfläche definiert. $\square$

Im Folgenden möchten wir Eigenschaften des D-Voronoi-Bereichs $V_D(x)$ eines D-perfekten Vektors x untersuchen. Da wir $V_D(x)$ als die Menge der Linearkombinationen von $S_D(x)$ mit nichtnegativen Koeffizienten definiert haben, ist der D-Voronoi-Bereich ein endlich erzeugter Kegel mit Basispunkt 0 in $\mathcal{V}_2^{\geq 0}$. Auf diese Art und Weise beschreiben wir diesen Kegel also durch die ihn begrenzenden Strahlen $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v$, $v \in S_D(x)$.

In dazu dualer Weise lässt sich der Kegel auch durch die ihn begrenzenden Hyperflächen, also durch eine endliche Anzahl linearer Ungleichungen der Gestalt $\sigma(y, -) \geq 0$ mit geeigneten $y \in \mathcal{V}_1$, beschreiben, was wir im weiteren Verlauf präzisieren werden.

Definition 2.1.12 *1. Ein Vektor $0 \neq y \in \mathcal{V}_1$ mit $\sigma(y, z) \geq 0$ für jedes $z \in S_D(x)$ und $\sigma(y, z) = 0$ für $n-1$ linear unabhängige $z \in S_D(x)$ heißt eine Richtung von x.*

2. Die Richtungen von x entsprechen den Facetten (auch „Seitenflächen") von $V_D(x)$, die wie folgt definiert sind. Zu einer Richtung y von x liegt die Menge

$$W(y) := V_D(x) \cap \{z \in \mathcal{V}_2 \mid \sigma(y, z) = 0\}$$

im Rand von $V_D(x)$ und ist ihrerseits ein $(n-1)$-dimensionaler Kegel in $\mathcal{V}_2$.

Bemerkung 2.1.13 *Liegt eine Richtung y von x in $\mathcal{V}_1^{\geq 0}$, so gelten*

1. $\sigma(y, d) \geq 0$ für alle $d \in D$ und

2. $\sigma(y, z) = 0$ für alle $z \in W(y)$.

Aus der ersten Aussage folgt $S_D(x + \lambda y) = S_D(x) \cap W(y)$, sodass für jedes $\lambda > 0$ der Vektor $x + \lambda y$ nicht D-perfekt ist.
Aus Punkt 2 folgert man $W(y) \subseteq \partial\mathcal{V}_2^{>0}$ und $y \in \partial\mathcal{V}_1^{>0}$.
Eine solche Richtung $y \in \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ nennen wir blinde Richtung.

Bemerkung 2.1.14 *Ist y eine nicht blinde Richtung, so existiert ein $d \in D$ mit $\sigma(y, d) < 0$. Man kann daher ein $\lambda > 0$ finden, sodass $x + \lambda y$ D-perfekt ist und überdies $\min_D(x) = \min_D(x + \lambda y)$ und $\langle S_D(x) \cap S_D(x + \lambda y)\rangle = W(y)$. $x + \lambda y$ heißt ein Nachbar (in Richtung y) von x.*

Beweis: Diese Aussage beweist man analog zu Lemma 2.1.9. $\square$

Satz 2.1.15 ([Opg01, Theorem 1.9]) *Falls $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ diskret und zulässig ist, bilden die D-Voronoi-Bereiche der D-perfekten Vektoren eine exakte Pflasterung (auch „Kachelung") von $\mathcal{V}_2^{>0}$. Exaktheit bezeichnet dabei die Eigenschaft, dass jede Facette eines D-Voronoi-Bereichs eine Facette genau zweier D-Voronoi-Bereiche ist. Eine solche Pflasterung bezeichnet man auch als „Face-to-Face-Pflasterung".*

Definition 2.1.16 *Der Voronoi-Graph Γ_D ist der gerichtete Graph mit Eckenmenge P_D und Kantenmenge*

$$\{(x, y) \in P_D \times P_D \mid x \text{ und } y \text{ sind Nachbarn}\}$$

Aus der Tatsache, dass die D-Voronoi-Bereiche eine exakte Kachelung von $\mathcal{V}_2^{>0}$ bilden, erhalten wir einige Aussagen über Γ_D.

Korollar 2.1.17 *Ist $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ diskret und zulässig, so ist Γ_D zusammenhängend und lokal endlich.*

2.2. Diskontinuierliche Gruppen

In diesem Abschnitt betrachten wir solche Mengen D, die unter einer eigentlich diskontinuierlichen Operation einer geeigneten Gruppe invariant sind. Für $\mathcal{V}_1^{>0}$ und $\mathcal{V}_2^{>0}$ definieren wir

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{V}_i^{>0}) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V}_i) \mid g\mathcal{V}_i^{>0} = \mathcal{V}_i^{>0}\}.$$

Definition 2.2.1 *Es sei $G \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{V}_1^{>0})$ eine Gruppe. Wir sagen, dass G eigentlich diskontinuierlich auf $\mathcal{V}_1^{>0}$ operiert, falls die Operation die folgenden Eigenschaften erfüllt.*

1. *Für jedes $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ ist der Stabilisator $G_x := \mathrm{Stab}_G(x)$ endlich.*
2. *Die Bahn Gx eines jeden $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathcal{V}_1^{\geq 0}$.*

Im Folgenden sei G eine eigentlich diskontinuierlich operierende Gruppe im Sinne der obigen Definition.

Bemerkung 2.2.2
1. *Zu jedem $\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{V}_1)$ existiert ein eindeutig bestimmtes $\varphi^{\mathrm{ad}} \in \mathrm{End}(\mathcal{V}_2)$ mit $\sigma(\varphi(x), y) = \sigma(x, \varphi^{\mathrm{ad}}(y))$ für alle $x \in \mathcal{V}_1,\ y \in \mathcal{V}_2$.*
2. *$G^{\mathrm{ad}} := \{g^{\mathrm{ad}} \mid g \in G\}$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\mathcal{V}_2^{>0}$.*

Betrachtet man nun wieder eine Teilmenge $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$, die diskret in $\mathcal{V}_2^{>0}$, zulässig, und invariant unter der Operation von G^{ad} ist, erhält man das folgende

Lemma 2.2.3 ([Opg01, Lemma 2.1]) *Es sei $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ und $g \in G$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

1. *$\min_D(gx) = \min_D(x)$*
2. *$S_D(gx) = (g^{\mathrm{ad}})^{-1} S_D(x)$*

3. $V_D(gx) = (g^{\mathrm{ad}})^{-1} V_D(x)$

Insbesondere operiert G auf dem Graphen Γ_D.

Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang der folgende Satz, der auf einem Satz von Bass und Serre basiert und es gestattet, ein Erzeugendensystem von G zu bestimmen, falls der Restklassengraph Γ_D/G endlich ist.

Satz 2.2.4 ([Opg01, Theorem 2.2]) *G operiere wie zuvor eigentlich diskontinuierlich auf $\mathcal{V}_1^{>0}$, sodass Γ_D/G endlich ist. Es seien $x_1, ..., x_\ell$ Vertreter der D-perfekten Punkte, die einen zusammenhängenden Baum T in Γ_D aufspannen. Es sei T_1 die Menge der $y \in \Gamma_D - T$, die einen Nachbarn in T besitzen. Zu jedem $y \in T_1$ wähle man ein $g_y \in G$, sodass $g_y^{-1}(y) \in \{x_1, ..., x_\ell\}$. Dann ist*

$$G = \langle g_y, \mathrm{Stab}_G(x_1), ..., \mathrm{Stab}_G(x_\ell) \mid y \in T_1 \rangle.$$

Insbesondere ist die Gruppe G endlich erzeugt.

2.3. Minimale Klassen

In diesem Abschnitt seien weiterhin $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ zwei reelle Vektorräume der Dimension n, $\sigma : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathbb{R}$ bilinear und nicht ausgeartet, $\mathcal{V}_1^{>0}, \mathcal{V}_2^{>0}$ duale Kegel bezüglich σ und $D \subseteq \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ diskret in $\mathcal{V}_2$.

Definition 2.3.1 *Seien $x_1, x_2 \in \mathcal{V}_1^{>0}$. Wir nennen x_1 und x_2 D-minimal äquivalent, falls $S_D(x_1) = S_D(x_2)$.*
Wir setzen

$$\mathrm{Cl}_D(x) := \{y \in \mathcal{V}_1^{>0} \mid S_D(y) = S_D(x)\},$$

die D-minimale Klasse von x.

Auf der Menge der D-minimalen Klassen definieren wir die partielle Ordnung $\preceq$ durch

$$\mathrm{Cl}_D(x_1) \preceq \mathrm{Cl}_D(x_2) \Leftrightarrow S_D(x_1) \subseteq S_D(x_2)$$

Bemerkung 2.3.2 *Zur partiellen Ordnung $\preceq$ sei angemerkt, dass nicht jede Teilmenge einer Menge von D-minimalen Vektoren ihrerseits die Menge der minimalen Vektoren eines Punktes in $\mathcal{V}_1^{>0}$ ist. Ein Gegenbeispiel in der Situation der $\mathbb{Z}$-Gitter erhält man* *beispielsweise mit Hilfe von Satz 6.2.1 in [Mar03], indem man zehn- oder elfelementige Teilmengen der kürzesten Vektoren des vierdimensionalen Gitters $\mathbb{D}_4$ betrachtet, siehe auch [Mar03, S. 322].*

Aus praktischen Gründen möchten wir noch die folgende abkürzende Schreibweise vereinbaren.

Definition 2.3.3 *Für ein $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ sei*

$$\mathrm{Cl}_D^{\alpha}(x) := \mathrm{Cl}_D(x) \cap \{y \in \mathcal{V}_1^{>0} \mid \min_D(y) = \alpha\}.$$

Ist $\mathcal{C}$ eine minimale Klasse, so verwenden wir die Schreibweise $\mathcal{C}^{\alpha}$ in der gleichen Weise.

Die folgende Bemerkung ist sofort klar, da der Perfektionsrang eines Punktes nur von der Menge seiner D-minimalen Vektoren abhängt.

Bemerkung 2.3.4 *Perfektionsrang und -korang sind konstant auf minimalen Klassen, sodass man diese Größen auch den Klassen zuordnen kann.*

Aus [Mar03] lässt sich der folgende Satz leicht übernehmen (vergleiche [Mar03, Theorem 9.1.9]).

Satz 2.3.5

1. *Der Perfektionsrang ist eine streng monoton wachsende Funktion auf der Menge der minimalen Klassen.*
2. *Eine minimale Klasse ist genau dann ein maximales Element bezüglich $\preceq$, wenn sie die Menge der $\mathbb{R}_{>0}$-Vielfachen eines perfekten Punktes $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ ist.*
3. *Zu jeder minimalen Klasse $\mathcal{C}$ existiert eine perfekte Klasse $\mathcal{C}'$, sodass $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$.*
4. *Zu zwei minimalen Klassen $\mathcal{C} \prec \mathcal{C}'$ existiert eine echt aufsteigende Kette minimaler Klassen*

$$\mathcal{C} \prec \mathcal{C}_1 \prec \ldots \prec \mathcal{C}_r \prec \mathcal{C}',$$

sodass der Perfektionsrang in jedem Schritt genau um 1 ansteigt.

Beweis:

1. Es seien $\mathrm{Cl}_D^\alpha(x') \succeq \mathrm{Cl}_D^\alpha(x)$ zwei minimale Klassen, deren Minima ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf $\alpha > 0$ fixiert seien. Es ist $\mathrm{Cl}_D^\alpha(x') \succneqq \mathrm{Cl}_D^\alpha(x)$ klarerweise äquivalent zu $S_D(x) \supsetneqq S_D(x')$.
   Ist nun der Perfektionsrang von x' echt größer als der von x, so muss offensichtlich $S_D(x')$ eine echte Obermenge von $S_D(x)$ sein.
   Nehmen wir also an, dass die minimalen Klassen x und x' denselben Perfektionsrang besitzen. Wir betrachten in $\mathcal{V}_1$ den affinen Raum

   $$\mathfrak{A}_x := \{w \in \mathcal{V}_1 \mid \sigma(w,d) = \min_D(x) \ \forall\ d \in S_D(x)\},$$

   dessen Dimension gerade der Perfektionskorang von x ist.
   Definieren wir nun analog $\mathfrak{A}_{x'}$, so erhalten wir einen affinen Teilraum von $\mathfrak{A}_x$, dessen Dimension ebenfalls der Perfektionskorang von x ist. Diese zwei affinen Räume sind also identisch, sodass $S_D(x) = S_D(x')$ folgt.

2. Der Perfektionsrang ist definitionsgemäß maximal auf den perfekten Punkten von $\mathcal{V}_1^{>0}$. Da wir bereits gesehen haben, dass ein perfekter Punkt durch seine minimalen Vektoren bis auf Vielfache festgelegt ist, ist also eine Klasse, die ein maximales Element bezüglich $\preceq$ ist, die Menge der positiven Vielfachen eines perfekten Punktes.
   Ist umgekehrt eine minimale Klasse nicht perfekt, so lässt sie sich mittels 2.1.14 bezüglich $\preceq$ echt vergrößern, sodass sie kein maximales Element gewesen sein kann.

3. Ist die Klasse $\mathcal{C}$ perfekt, so ist nichts zu zeigen. Anderenfalls lässt sich mit dem Verfahren aus Bemerkung 2.1.14 induktiv die Behauptung zeigen.

4. Wir beweisen die Aussage per Induktion über die Differenz der Perfektionsränge von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$. Ist diese Null, so ist nichts zu zeigen.
   Es seien nun $x \in \mathcal{C}, x' \in \mathcal{C}'$ und $\min_D(x) = \min_D(y)$. Man wähle S als eine Seitenfläche von $V_D(x')$ mit $S \supseteq V_D(x)$ (vgl. Lemma 2.1.11) und $z \in \mathcal{V}_1$ so, dass $\sigma(z,d) = 0$ für alle $d \in S_D(x') \cap S$ und $\sigma(z,d) > 0$ für $d \in D \cap (V_D(x') - S)$ gilt. Zu $\lambda > 0$ betrachte nun $x_\lambda := x' + \lambda z$. Ist λ hinreichend klein, so ist nach Lemma 2.1.4 $S_D(x\lambda) \subseteq S_D(x')$, jedoch gilt nach Konstruktion für $d \in S_D(x') - S$

   $$\sigma(x_\lambda, d) = \min_D(x') + \lambda\sigma(z,d) > \min_D(x').$$

   Die Klasse $\widetilde{\mathcal{C}}$ von x_λ erfüllt also $\mathcal{C} \prec \widetilde{\mathcal{C}} \prec \mathcal{C}'$ und die Differenzen der Perfektionsränge zwischen $\mathcal{C}$ und $\widetilde{\mathcal{C}}$ sowie $\widetilde{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{C}'$ sind jeweils echt kleiner als die ursprüngliche Differenz, sodass die Behauptung bewiesen ist.

$\square$

Wir wollen im Folgenden beschreiben, wie man Vertreter minimaler Klassen bestimmen kann. Dabei bieten sich angesichts des vierten Punktes von Satz 2.3.5 zwei Vorgehensweisen an. Geht man von einem nicht perfekten Punkt $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ aus, so kann man versuchen, die minimalen Klassen über ihm mit Hilfe von Lemma 2.1.9 zu bestimmen. Dabei ist die folgende Erkenntnis interessant.

Satz 2.3.6 *Ist $\mathcal{C}$ eine minimale Klasse, so liegen über $\mathcal{C}$ (bezüglich $\preceq$) nur endlich viele perfekte Klassen.*

Beweis: Sei $x \in \mathcal{C}$ und p ein perfekter Punkt mit $S_D(p) \supseteq S_D(x)$. Nach Lemma 2.1.11 ist $V_D(x)$ eine k-dimensionale Seitenfläche von $V_D(p)$. Da die D-Voronoi-Bereiche der perfekten Punkte nach Satz 2.1.15 eine exakte Pflasterung von $\mathcal{V}_2^{>0}$ bilden, kann $V_D(x)$ nur in endlich vielen Voronoi-Bereichen als k-dimensionale Seitenfläche liegen. Läge $V_D(x)$ nämlich in unendlich vielen Voronoi-Bereichen, so besäße $V_D(p)$ unendlich viele Facetten, was nicht möglich ist, da es sich bei $V_D(p)$ um einen endlich erzeugten Kegel handelt. Für p bestehen also nur die endlich vielen Wahlen, die gerade durch diejenigen Voronoi-Bereiche perfekter Punkte gegeben sind, die $V_D(x)$ als Seitenfläche enthalten. $\square$

Kennt man einen perfekten Punkt in $\mathcal{V}_1^{>0}$, so kann man von diesem ausgehend Punkte beliebigen kleineren Perfektionsrangs bestimmen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2.3.7 *Es sei $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ ein perfekter Punkt. Jede Seitenfläche von $V_D(x)$ der Kodimension k korrespondiert auf natürliche Weise zu einer minimalen Klasse von Perfektionskorang k.*

Beweis: Es sei S die Seitenfläche von $V_D(x)$ aus der Behauptung. Diese ist als Seitenfläche der Kodimension k Durchschnitt von k Facetten $W(y_i)$ mit zugehörigen Richtungen y_i.
Ist die Richtung y_i nicht blind, so existiert nach Satz 2.1.14 ein eindeutig bestimmes $\rho_i > 0$, sodass $x + \rho_i y_i$ perfekt ist und für $0 < t < \rho_i$ die D-minimalen Vektoren von $x + t y_i$ gerade diejenigen minimalen Vektoren von x sind, die in der Facette $W(y_i)$ liegen. Ist andererseits y_i blind, so ist nach Bemerkung 2.1.13 ebenfalls für jedes $\lambda > 0$ die Menge minimalen Vektoren von $x + \lambda y_i$ die Menge $S_D(x) \cap W(y_i)$. In diesem Fall kann $\rho_i > 0$ beliebig gewählt werden.

Wir betrachten nun

$$z := x + \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{k} \rho_i y_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \left(x + \frac{\rho_i}{2} y_i \right) \in \mathcal{V}_1^{>0}.$$

Nach Konstruktion ist $\min_D(z) = \min_D(x)$ und $S_D(z) = S_D(x) \cap S$, sodass z in der Tat eine minimale Klasse von Perfektionskorang k vertritt. $\square$

Bemerkung 2.3.8 *Die Wahl des Faktors $\frac{1}{2}$ im vorstehenden Beweis ist willkürlich. Jeder Faktor $0 < \alpha < 1$ liefert dasselbe Resultat. Dadurch entsteht im Raum $\mathcal{V}_1$ eine Anschauung für die Geometrie der minimalen Klassen: Betrachtet man einen perfekten Punkt x_1 und einen Nachbarn x_2, so besteht die Verbindungsstrecke zwischen x_1 und x_2 (ohne Hinzunahme von x_1 und x_2 als Endpunkten) aus Vertretern einer minimalen Klasse, deren Perfektionsrang $n-1$ beträgt. Diese Vertreter haben alle das Minimum $\min_D(x) = \min_D(y)$.*
Diese Anschauung setzt sich natürlich fort, wenn man mehrere Nachbarn von x_1 betrachtet. Im Fall zweier Nachbarn hat man beispielsweise ein Dreieck zu betrachten.

Wir möchten nun annehmen, dass wir uns in dem folgenden Spezialfall befinden. Es sei $G \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{V}_1^{>0})$ eine Untergruppe, die eigentlich diskontinuierlich auf $\mathcal{V}_1^{>0}$ operiert und nur endlich viele Bahnen auf der Menge der perfekten Punkte hat. Das Vertretersystem der perfekten Punkte möchten wir mit $\{\wp_1, ..., \wp_\ell\}$ bezeichnen.

Bemerkung 2.3.9 *Die Operation von G^{ad} auf der Menge der D-minimalen Vektoren von Punkten $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ induziert eine Operation von G auf der Menge der minimalen Klassen.*
Ein $g \in G$ bildet die minimale Klasse $\mathrm{Cl}_D(x) = \{y \in \mathcal{V}_1^{>0} \mid S_D(y) = S_D(x)\}$ ab auf $\{y \in \mathcal{V}_1^{>0} \mid S_D(y) = (g^{\mathrm{ad}})^{-1} S_D(x) = S_D(gx)\}$.

Satz 2.3.10 *G lässt bei der Operation auf der Menge der minimalen Klassen nur endlich viele Bahnen.*

Beweis: Eine minimale Klasse $\mathcal{C}$ liegt bezüglich $\preceq$ unter mindestens einer perfekten Klasse. Diese perfekte Klasse besitzt unter der Operation von G einen Vertreter in $\{\wp_1, ..., \wp_\ell\}$. Unterhalb dieser endlich vielen perfekten Klassen liegen aber nach Satz 2.3.7 nur endlich viele minimale Klassen, sodass die Behauptung folgt. $\square$

3. Minimale Klassen über imaginärquadratischen Zahlkörpern

3.1. Ordnungen

Wir beginnen dieses Kapitel mit einem kurzen Abschnitt über die Theorie der Ordnungen. Dazu folgen wir den Darstellungen aus [Rei75]. Es sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und A eine endlichdimensionale K-Algebra.

Definition 3.1.1 *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Ein R-Gitter in V ist ein endlich erzeugter R-Teilmodul von V, der eine Basis von V enthält.*
Eine R-Ordnung in A ist ein Teilring Λ von A, der ein R-Gitter in A ist.
Eine Maximalordnung ist eine Ordnung, die nicht echt in einer anderen R-Ordnung enthalten ist.

Beispiel 3.1.2

1. *Ist $A = K^{n\times n}$ die K-Algebra der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K, so ist $\Lambda = R^{n\times n}$ eine R-Ordnung in A.*

2. *Sei $L \supseteq K$ eine endliche separable Erweiterung. Der ganze Abschluss von R in L ist eine R-Ordnung in L.*

3. *Es sei G eine endliche Gruppe und $A = KG$ die Gruppenalgebra von G. Das heißt KG ist der freie K-Modul auf der Menge G, auf dem wir eine Multiplikation durch bilineare Fortsetzung der Gruppenverknüpfung definieren. $\Lambda = RG$ ist dann eine R-Ordnung in A.*

4. *Ist der ganze Abschluss R' von R in A eine R-Ordnung, so ist R' die eindeutig bestimmte Maximalordnung in A. Ist A kommutativ, so ist R' stets ein Ring, jedoch nicht notwendigerweise ein volles R-Gitter. In Beispiel 2 ist die Bedingung, dass L/K separabel ist, aus diesem Grund unerlässlich.*

Satz 3.1.3 ([Rei75, Theorem 8.6]) *Ist Λ eine R-Ordnung und $\lambda \in \Lambda$, so ist λ ganz über R. Außerdem liegen sowohl das Minimalpolynom als auch das charakteristische Polynom von λ in $R[x]$.*

3.2. Gitter

Im Folgenden sei stets $K/\mathbb{Q}$ ein imaginärquadratischer Zahlkörper, für den wir eine Einbettung $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ fixieren, weshalb wir auch $K \subseteq \mathbb{C}$ schreiben. Mit $\mathcal{O}_K$ bezeichnen wir den Ganzheitsring von K. $\mathcal{C}\ell_K$ sei die Idealklassengruppe, für die wir ein Vertretersystem bestehend aus ganzen Idealen minimaler Norm wählen. Diese Ideale bezeichen wir mit $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_{h_K}$, wobei $h_K := |\mathcal{C}\ell_K|$ die Klassenzahl sei.

Ist A ein Ring, so bezeichne A^n die Menge der Zeilenvektoren mit n Einträgen. Ist M eine Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}$, so bezeichnen wir mit M^* die transponierte und komplex konjugierte Matrix. Wir nennen eine solche Matrix Hermitesch, falls $M = M^*$.

Die Menge $\mathcal{H}_n$ der Hermiteschen Matrizen vom Format $n \times n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n^2 mit positiv definitem Skalarprodukt

$$\mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n \to \mathbb{R},\ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mapsto \mathrm{Spur}(\mathcal{AB}).$$

Er enthält den Kegel $\mathcal{H}_n^+$ der positiv definiten Hermiteschen Matrizen, den wir mit dem Kegel der postiv definiten Hermiteschen Sesquilinearformen auf $\mathbb{C}^n$ identifizieren möchten. Für $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n$ und $x \in \{K^n, K^{n\times n}\}$ setzen wir $\mathcal{A}[x] := x\mathcal{A}x^*$.

In diesem Kapitel werden wir auf einige Ergebnisse aus [BC13] zurückgreifen, die wir kurz wiederholen möchten. Wir betrachten $\mathcal{O}_K$-Gitter in K^n im Sinne von Definition 3.1.1.

Satz 3.2.1 (Steinitz, vgl. [BC13, Theorem 2.2]) *Ist L ein $\mathcal{O}_K$-Gitter in K^n, so existieren gebrochene Ideale $\mathfrak{c}_1, ..., \mathfrak{c}_n$, sodass $L \cong \mathfrak{c}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{c}_n$. Die Idealklasse* $\mathrm{St}(L) := [\mathfrak{c}_1 \cdot ... \cdot \mathfrak{c}_n] \in \mathcal{C}\ell_K$ *ist eine trennende Invariante der Isomorphieklassen von $\mathcal{O}_K$-Gittern der Dimension n und wird auch als Steinitzklasse von L bezeichnet.*

Beweis: [O'M00, 81:3,81:11] □

Bemerkung 3.2.2 *Ein Gitter der Form $\mathfrak{c}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{c}_n$ ist zu einem Gitter der Form $\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus \mathfrak{c}_1 \cdot ... \cdot \mathfrak{c}_n$ isomorph, sodass die Gitter der Form $\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus \mathfrak{a}_i$ mit $1 \leq i \leq h_K$ ein*

Vertretersystem der Isomorphieklassen von n-dimensionalen $\mathcal{O}_K$-Gittern bilden. Insbesondere ist jedes gebrochene Ideal von K und somit auch jedes $\mathcal{O}_K$-Gitter ein projektiver $\mathcal{O}_K$-Modul.

Für $\mathcal{O}_K$-Gitter existiert das folgende Analogon des Invariantenteilersatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealbereichen.

Satz 3.2.3 ([Rei75, Theorem 4.14]) *Es seien L_1 und L_2 zwei $\mathcal{O}_K$-Gitter in K^n mit $L_1 \supseteq L_2$. Dann existieren gebrochene Ideale $\mathfrak{c}_1, ..., \mathfrak{c}_n$ und ganze Ideale $\mathfrak{b}_1, ..., \mathfrak{b}_n$ mit*

$$L_1 \cong \mathfrak{c}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{c}_n, \quad L_2 \cong \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{b}_n\mathfrak{c}_n,$$

sodass $\mathfrak{b}_1 \supseteq ... \supseteq \mathfrak{b}_n$.

Beweis: Ein Beweis dieser Aussage kann in [O'M00] nachgelesen werden. □

Der Ring der $\mathcal{O}_K$-linearen Endomorphismen eines Gitters L lässt sich mit Hilfe des folgenden Lemmas beschreiben.

Lemma 3.2.4 *Sind $M = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$ und $N = \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{n}_j$ mit gebrochenen Idealen $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{n}_j$ $\mathcal{O}_K$-Gitter in K^n, so gilt*

1. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_j) \cong \mathfrak{n}_j \cdot \mathfrak{m}_i^{-1}$,
2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(M, N) \cong \{(\varphi_{ij})_{i,j=1}^n \mid \varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_j)\}$ *in Zeilenkonvention.*

Beweis:

1. $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_j)$ definiert einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $K \to K$ von K-Vektorräumen, sodass ein $a \in K$ existiert, welches $\varphi(x) = ax$ für alle $x \in \mathfrak{m}_i$ erfüllt. Um nun sicherzustellen, dass $\mathfrak{m}_i$ in $\mathfrak{n}_j$ abgebildet wird, muss $a \in \mathfrak{n}_j\mathfrak{m}_i^{-1}$ erfüllt sein.
2. Dies folgt aus 1., da M und N als direkte Summen zerlegt sind.

□

Korollar 3.2.5 *Ist* $L = \mathcal{O}_K^{n-1} \oplus \mathfrak{a}$*, so ist*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \mathfrak{a} \\ & \mathcal{O}_K^{(n-1)\times(n-1)} & & \vdots \\ & & & \mathfrak{a} \\ \hline \mathfrak{a}^{-1} & \dots & \mathfrak{a}^{-1} & \mathcal{O}_K \end{array} \right).$$

Bemerkung 3.2.6 *Der Endomorphismenring* $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$ *ist eine* $\mathcal{O}_K$*-Maximalordnung in der* K*-Algebra* $\mathrm{End}_K(V)$*. In der Tat ist sogar jede Maximalordnung in* $\mathrm{End}_K(V)$ *von dieser Form.*

Beweis: Dies ist ein Spezialfall der Aussagen von [Rei75, Corollary 27.6]. □

Definition 3.2.7 *Wir bezeichnen mit* $\mathrm{GL}(L) := (\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L))^*$ *die Gruppe der Modulautomorphismen des* $\mathcal{O}_K$*-Gitters* L*.*

Lemma 3.2.8 *Ist* $A \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$*, so ist* $\det(A) \in \mathcal{O}_K$*.*

Beweis: Dies folgt mit Satz 3.1.3 sofort aus der Tatsache, dass $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$ eine Ordnung in der K-Algebra $\mathrm{End}_K(V)$ ist. □

Satz 3.2.9 *Es ist*

$$\mathrm{GL}(L) \cong \{A \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L) \mid \det(A) \in \mathcal{O}_K^*\}.$$

Beweis: Ist $A \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$ invertierbar mit $A^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$, so besitzen A und A^{-1} in $\mathcal{O}_K$ liegende Determinanten, deren Produkt 1 ist. Mithin ist $\det(A) \in \mathcal{O}_K^*$.
Ist umgekehrt $A \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$ und $\det(A) \in \mathcal{O}_K^*$, so folgt $A^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$ aus Lemma 3.2.8. □

Wir erwähnen schließlich noch einen wichtigen Satz über die Existenz von Gitterpunkten in geeigneten Mengen. Wie üblich bezeichnen wir eine Teilmenge X eines reellen Vektorraums als konvex, falls zu je zwei Punkten $a, b \in X$ auch ihre Verbindungsstrecke in X enthalten ist. Wir nennen X zentralsymmetrisch, wenn aus $x \in X$ die Eigenschaft $-x \in X$ folgt.

Satz 3.2.10 (Gitterpunktsatz von Minkowski) *Es sei L ein Gitter in einem euklidischen Vektorraum und X eine konvexe und zentralsymmetrische Teilmenge dieses Raums. Ist $\mathrm{vol}(X) > 2^{\dim(V)}\mathrm{vol}(L)$, so enthält X mindestens einen von Null verschiedenen Gittervektor $\ell \in L$.*
Es bezeichne dabei $\mathrm{vol}(X)$ das Volumen von X bezüglich des Maßes, das durch das Skalarprodukt auf V erklärt wird und $\mathrm{vol}(L)$ das Grundmaschenvolumen, wie es in Kapitel I, Paragraph 4 von [Neu07] definiert wird.

Beweis: Für einen Beweis dieser Aussage verweisen wir auf [Neu07, Satz (4.4)]. □

3.3. $\mathcal{H}_n^+$ als selbstdualer Kegel

In diesem Abschnitt möchten wir uns mit minimalen Klassen über imaginärquadratischen Zahlkörpern beschäftigen. Dazu benutzen wir die Ergebnisse aus Abschnitt 2.3. Es sei weiterhin L ein $\mathcal{O}_K$-Gitter der Dimension n.

Satz 3.3.1 *$\mathcal{H}_n^+$ ist ein selbstdualer Kegel in $\mathcal{H}_n$ bezüglich des durch die Spur definierten Skalarprodukts.*

Beweis: Dass es sich bei $\mathcal{H}_n^+$ um einen nichtleeren offenen Kegel in $\mathcal{H}_n$ handelt, ist ein bekanntes Resultat, welches die Richtigkeit des ersten Axioms für duale Kegel zeigt.
Seien nun $A, B \in \mathcal{H}_n^+$. Um zu zeigen, dass die zweite an duale Kegel gestellte Bedingung von $\mathcal{H}_n^+$ erfüllt wird, verwenden wir den bekannten Spektralsatz für Hermitesche Matrizen, um annehmen zu können, dass A eine reelle Diagonalmatrix mit positiven Einträgen ist. Dann ist aber $\mathrm{Spur}(AB)$ eine mit positiven reellen Zahlen gewichtete Summe positiver reeller Zahlen, denn offensichtlich hat B als positiv definite Hermitesche Matrix ausschließlich Diagonaleinträge aus der Menge $\mathbb{R}_{>0}$. Also ist $\mathrm{Spur}(AB) > 0$.
Um das dritte Axiom einzusehen, wählen wir $A \in \mathcal{H}_n - \mathcal{H}_n^+$. Nach Wahl existiert also ein $0 \neq v \in K^n$ mit $A[v] \leq 0$. Dann ist aber

$$0 \geq A[v] = \mathrm{Spur}(A[v]) = \mathrm{Spur}(vAv^*) = \mathrm{Spur}((v^*v)A),$$

sodass $0 \neq v^*v$ der gesuchte Vektor in $\overline{\mathcal{H}_n^+}$ ist. □

Aus dem Artikel [CN13] übernehmen wir die folgenden Definitionen für das Minimum und die kürzesten Vektoren eines $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n^+$ über L.

Definition 3.3.2 *Ein Gewicht auf L ist eine $\mathrm{GL}(L)$-invariante Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(K^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\max_{x \in \mathbb{P}(K^n)} \varphi(x) = 1$.*

Bemerkung 3.3.3 *Wir werden im Folgenden unter K^* invariante Abbildungen als Abbildungen auf dem projektiven Raum ansehen und daher Gewichte auch in der Form von Abbildungen auf $K^n - \{0\}$ angeben.*

Das einfachste Beispiel für ein Gewicht ist sicherlich das so genannte triviale Gewicht, welches überall konstant 1 ist. Ein weiteres Gewicht φ_1 werden wir im Folgenden beschreiben. Es erleichtert nicht nur in manchen Fällen die Berechnungen, wie wir noch zeigen werden, sondern sorgt auch dafür, dass sich die vorliegende Theorie weitreichenden Verallgemeinerungen unterordnet (vgl. etwa [Wat00] sowie [Cou04]). Mit der Wahl von φ_1 stimmen die zentralen Definitionen auch mit denen in [BC13] überein.

Definition 3.3.4 *Es sei $L = \mathfrak{c}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{c}_n$ ein Gitter in K^n. Zu $0 \neq \ell = (\ell_1, ..., \ell_n) \in L$ definieren wir das ganze Ideal*

$$\mathfrak{a}_\ell := \sum_{i=1}^{n} \ell_i \mathfrak{c}_i^{-1} \trianglelefteq \mathcal{O}_K.$$

Wie üblich bezeichne $N(\mathfrak{a}_\ell) := |\mathcal{O}_K / \mathfrak{a}_\ell|$ die Idealnorm.

Lemma 3.3.5 *Für das Ideal $\mathfrak{a}_\ell$ gelten die folgenden Eigenschaften.*

1. *Es ist $N(\mathfrak{a}_\ell) \geq 1$ für alle von 0 verschiedenen $\ell \in L$.*

2. *Ist $\lambda \in K^*$ und $\ell \in L - \{0\}$, so gilt $\mathfrak{a}_{\lambda\ell} = \lambda \mathfrak{a}_\ell$.*

3. *Ist $g \in \mathrm{GL}(L)$ und $\ell \in L - \{0\}$, so ist $\mathfrak{a}_{\ell g} = \mathfrak{a}_\ell$.*

Beweis:

1. Dies ist offensichtlich.

2. Es ist $\mathfrak{a}_{\lambda\ell} = \sum_{i=1}^n (\lambda \ell_i) \mathfrak{c}_i^{-1} = \lambda \sum_{i=1}^n \ell_i \mathfrak{c}_i^{-1} = \lambda \mathfrak{a}_\ell$.

3. Wir schreiben $(\ell g)_i = \sum_{k=1}^n \ell_k g_{ki}$ mit $g_{ki} \in \mathfrak{c}_k^{-1} \mathfrak{c}_i$. Es ist dann
$$\mathfrak{a}_{\ell g} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \ell_k g_{ki} \mathfrak{c}_i^{-1} \subseteq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \ell_k \mathfrak{c}_k^{-1} \subseteq \mathfrak{a}_\ell$$
und somit $\mathfrak{a}_\ell \supseteq \mathfrak{a}_{\ell g} \supseteq \mathfrak{a}_{\ell g g^{-1}} = \mathfrak{a}_\ell$.

Damit ist die Aussage bewiesen. $\square$

Nun kommen wir zur Definition des Gewichts φ_1.

Definition 3.3.6 *Es sei $x \in K^n - \{0\}$ und $\alpha \in K^*$ mit $\alpha x \in L$. Wir setzen*

$$N_x := \min_{I \trianglelefteq \mathcal{O}_K,\ [I]=[\mathfrak{a}_{\alpha x}]} N(I).$$

Das vorangehende Lemma zeigt, dass N_x für $x \in K^n - \{0\}$ wohldefiniert ist und dass $\varphi_1(x) := N_x^{-1}$ ein Gewicht auf K^n definiert.

Bemerkung 3.3.7 ([CN13, Remark 4.4]) *Im Fall, dass $h_K = 1$ ist, ist $\varphi_1 = \varphi_0$ und φ_0 ist die einzige Wahlmöglichkeit für ein Gewicht auf K^n.*

Wir fixieren nun zu dem Gitter L ein Gewicht φ, um das Minimum und die kürzesten Vektoren zu $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n^+$ zu definieren.

Definition 3.3.8 *Das L-Minimum von $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n^+$ bezüglich des Gewichts φ ist*

$$\min_L(\mathcal{A}) := \min_{0 \neq \ell \in L} \varphi(\ell)\mathcal{A}[\ell].$$

Die Menge der kürzesten Vektoren von $\mathcal{A}$ in L definieren wir als

$$S_L(\mathcal{A}) := \{\ell \in L - \{0\} \mid \varphi(\ell)\mathcal{A}[\ell] = \min_L(\mathcal{A})\},$$

also als die Menge derjenigen Vektoren in L, die das Minimum von $\mathcal{A}$ realisieren.

Bemerkung 3.3.9 *Bei $S_L(\mathcal{A})$ handelt es sich um eine endliche Menge, denn*

$$S_L(\mathcal{A}) \subseteq \left\{0 \neq \ell \in L \mid \mathcal{A}[\ell] \leq \frac{\min_L(\mathcal{A})}{\min_{0 \neq \ell \in L} \varphi(\ell)}\right\}.$$

Bei der rechten Menge handelt es sich um den Durchschnitt der diskreten Menge L und der kompakten Menge $\{x \in K^n \mid \mathcal{A}[x] \leq \frac{\min_L(\mathcal{A})}{\min_{0 \neq \ell \in L} \varphi(\ell)}\}$. Diese Menge ist also endlich. Es handelt sich sogar um eine endliche Menge in einem $\mathbb{Z}$-Gitter, sodass sie beispielsweise mit Magma [BCP97] berechnet werden kann. Der Leser vergleiche dazu auch [BC13]. Die angegebene Menge ist wohldefiniert, da φ nach [PR92] nur endlich viele Werte annimmt.

Betrachtet man die in diesem Abschnitt gemachten Definitionen für Minimum und kürzeste Vektoren (diese stimmen mit den Definitionen aus [BC13] überein) und vergleicht sie mit denen aus Kapitel 2, angewandt auf den selbstdualen Kegel $\mathcal{H}_n^+$, so stimmen diese Definitionen zunächst nicht überein. Sie werden jedoch durch die folgende

Gleichung, die für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n$ und alle $x \in \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R} \otimes K^n$ gilt, in Einklang gebracht.

$$\mathcal{A}[x] = \mathrm{Spur}(\mathcal{A}[x]) = \mathrm{Spur}(\mathcal{A}x^*x)$$

Das Auswerten eines Vektors x an der Hermiteschen Form $\mathcal{A}$ entspricht also dem Bilden des Skalarprodukts von $\mathcal{A}$ und $x^*x \in \overline{\mathcal{H}_n^+}$ im Raum $\mathcal{H}_n$.
Um alle Resultate aus Kapitel 2 nutzen zu können, definieren wir eine geeignete diskrete und zulässige Menge D in $\overline{\mathcal{H}_n^+} - \{0\}$.

Satz 3.3.10 *$D := \{x^*x \mid x \in L - \{0\}\} \subseteq \overline{\mathcal{H}_n^+}$ ist eine diskrete und zulässige Menge.*

Beweis: Dass D diskret ist, folgt aus der Tatsache, dass L diskret ist. Um die Zulässigkeit zu zeigen, benutzen wir Lemma 2.1.9. Es sei also $F \in \overline{\mathcal{H}_n^+}$ eine positiv semidefinite aber nicht positiv definite Hermitesche Form. Dann ist

$$\{x \in \mathbb{C}^n \mid F[x] = 0\} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid xF = 0\} =: (\mathbb{C}^n)^{\perp,F}$$

ein echter Teilraum von $\mathbb{C}^n$, der von $\{0\}$ verschieden ist. Daher ist die Menge

$$B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{C}^n \mid F[x] < \varepsilon\}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ konvex und zentralsymmetrisch. Sie ist zudem von unendlichem Volumen, denn sei $U \leq \mathbb{C}^n$ ein Komplement zu $(\mathbb{C}^n)^{\perp,F}$. Es ist dann $F|_{U\times U}$ positiv definit. Man betrachte in U die Kugel um 0 von Radius ε bezüglich $F|_{U\times U}$. Die direkte Summe von $(\mathbb{C}^n)^{\perp,F}$ und dieser Kugel ist sicherlich von unendlichem Volumen und in B_ε enthalten, sodass B_ε nach dem Gitterpunktsatz von Minkowski ein $0 \neq \ell \in L$ enthält. Daher haben wir $\varphi(\ell)F[\ell] \leq F[\ell] < \varepsilon$, sodass die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.3.11 *Die Operation von $\mathrm{GL}(L)$ auf $\mathcal{H}_n^+$ ist eigentlich diskontinuierlich und es gibt bis auf Operation von $\mathrm{GL}(L)$ und Multiplikation mit $\mathbb{R}_{>0}$ nur endlich viele L-perfekte Hermitesche Formen, was man wie im klassischen Fall mit Hilfe von Reduktionstheorie beweisen kann. Für Details dazu verweisen wir auf [Opg96, Mey09, Hum49].*

Damit haben wir die Resultate aus Kapitel 2 zur Verfügung, sodass wir uns nun den minimalen Klassen zuwenden können, wobei es im hier vorliegenden Fall einige zusätzliche Eigenschaften gibt, die wir nun beschreiben werden.

Wir behalten die wesentlichen Bezeichnungen bei. Es sei also weiterhin L ein $\mathcal{O}_K$-Gitter in K^n und φ ein fest gewähltes Gewicht.

Definition 3.3.12 *Wir nennen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{H}_n^+$ minimal äquivalent, falls $S_L(\mathcal{A}_1) = S_L(\mathcal{A}_2)$. Mit*

$$\mathrm{Cl}_L(\mathcal{A}_1) := \{F \in \mathcal{H}_n^+ \mid S_L(F) = S_L(\mathcal{A}_1)\}$$

bezeichnen wir die minimale Klasse von $\mathcal{A}_1$. Ist $C = \mathrm{Cl}_L(F)$ eine minimale Klasse, so setzen wir $S_L(C) := S_L(F)$.
Wir nennen eine minimale Klasse C well-rounded, falls $S_L(C)$ eine K-Basis von K^n enthält. Eine Hermitesche Form $F \in \mathcal{H}_n^+$ beziehungsweise ihre Klasse $\mathrm{Cl}_L(F)$ nennen wir perfekt bezüglich L, falls $\mathrm{Cl}_L(F) = \{\alpha F \mid \alpha \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Bemerkung 3.3.13 *Es sei angemerkt, dass der Begriff well-rounded kein Analogon in Kapitel 2 besitzt.*
Zudem beachte der Leser, dass die gerade gemachten Definitionen sowohl von L als auch von φ abhängen, sodass sie stets gleich gewählt bleiben müssen.

Bemerkung 3.3.14 *Für ein $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n^+$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *$\mathcal{A}$ ist perfekt.*

2. *$\{x^*x \mid x \in S_L(\mathcal{A})\}$ erzeugt $\mathcal{H}_n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

3. *$\mathcal{A}$ ist bis auf Vielfache durch $S_L(\mathcal{A})$ eindeutig bestimmt.*

Die Äquivalenz des zweiten und dritten Punktes ist als Satz von Korkine und Zolotareff bekannt, siehe etwa [Mar03, Theorem 3.2.10].

Die Gruppen $\mathrm{GL}(L)$ und $\mathrm{GL}_n(K)$ operieren von links auf $\mathcal{H}_n$ durch

$$G \times \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n,\ (g, F) \mapsto F[g] = gFg^*.$$

Definition 3.3.15 *Liegen zwei Hermitesche Formen in $\mathcal{H}_n$ in derselben Bahn unter der Operation von $\mathrm{GL}(L)$, so nennen wir sie L-isometrisch.*
Den Stabilisator eines $F \in \mathcal{H}_n^+$ unter dieser Operation bezeichnen wir als $\mathrm{Aut}_L(F)$ und nennen ihn die Automorphismengruppe von F. Dass es sich dabei um eine endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}(L)$ handelt, ist ein bekanntes Resultat.

Definition 3.3.16 *Die Gruppe $\mathrm{GL}(L)$ operiert auf der Menge der minimalen Klassen durch Fortsetzung der Operation auf $\mathcal{H}_n^+$ (vergleiche auch Bemerkung 2.3.9). Zwei minimale Klassen heißen äquivalent, wenn sie in derselben Bahn unter dieser Operation liegen. Den Stabilisator einer minimalen Klasse C,*

$$\mathrm{Aut}_L(C) := \{g \in \mathrm{GL}(L) \mid S_L(C)g = S_L(C)\},$$

bezeichnen wir als Automorphismengruppe von C.

Das folgende, vor allem für die Berechnungen wichtige Lemma geht auf A.-M. Bergé zurück.

Lemma 3.3.17 ([CN13, Lemma 5.3], [Bat01, Proposition 2.9]) *Es sei C eine well-rounded minimale Klasse. Dann ist die kanonische Form $T_C := \sum_{x\in S_L(C)} x^*x \in \mathcal{H}_n^+$ positiv definit und es gilt die Gleichheit $\mathrm{Aut}_L(C) = \mathrm{Aut}_L(T_C^{-1})$. Zwei well-rounded minimale Klassen C und C' sind genau dann äquivalent, wenn T_C^{-1} und $T_{C'}^{-1}$ L-isometrisch sind.*

Beweis: Wir folgen dem Beweis aus [CN13], welcher wiederum auf den Beweis aus [Bat01] aufbaut. Aus der Tatsache, dass C well-rounded ist, folgt, dass T_C von maximalem Rang ist. Bekanntlich ist die Abbildung

$$(\cdot,\cdot) \;:\; K^n \times K^n \to \mathbb{R},\; (x,y) \mapsto xy^*$$

Hermitesch und nicht ausgeartet. Man wähle nun eine K-Basis $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq S_L(C)$ von K^n. Dann gilt für jedes $v \in K^n$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^* x_i\right) v = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i, v)$$

und dies ist genau dann 0, wenn alle $(x_i, v) = 0$ sind, was genau dann der Fall ist, wenn $v \in V^\perp = \{0\}$ erfüllt ist. Die positiv semidefinite Matrix T_C hat also den Kern $\{0\}$ und ist daher positiv definit.

Es ist klar, dass die Inklusion $\mathrm{Aut}_L(C) \subseteq \mathrm{Aut}_L(T_C^{-1})$ gilt. Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, setzen wir $s := |S_L(C)|$ und wählen $S \in K^{s\times n}$ als eine Matrix, deren Zeilen die Elemente von $S_L(C)$ sind. Insbesondere gilt dann $T_C = S^*S$. Es sei nun $g \in \mathrm{Aut}_L(T_C^{-1}) = \{g \in \mathrm{GL}(L) \mid g^*T_Cg = T_C\}$ und $S' := Sg$. Damit ist

$$(S')^*S' = (Sg)^*Sg = g^*S^*Sg = g^*T_Cg = T_C = S^*S$$

und für eine beliebige Form $F \in \mathcal{H}_n^+$ hat man

$$\sum_{y \text{ Zeile von } S} F[y] = \mathrm{Spur}\,(S'F(S')^*) = \mathrm{Spur}\,((S')^*S'F) = \mathrm{Spur}\,(S^*SF) = \sum_{x\in S_L(C)} F[x]$$

Es sei nun x eine Zeile von S und $y := xg$. Es ist dann $\varphi(x) = \varphi(y)$ aufgrund der $\mathrm{GL}(L)$-Invarianz des Gewichts φ. Zudem gilt die Abschätzung $\varphi(y)F[y] \geq \varphi(x)F[x] =$

$\min_{0\neq\ell\in L}\varphi(\ell)F[\ell]$ und Gleichheit herrscht nur dann, wenn $y \in S_L(C)$. Es kann also nur Gleichheit in

$$\sum_{y \text{ Zeile von } S'} F[y] = \sum_{x\in S_L(C)} F[x]$$

vorliegen, wenn $S_L(C) = \{x \in L^n \mid x \text{ Zeile von } S'\}$, was gleichbedeutend ist mit $g \in \mathrm{Aut}_L(C)$. □

Korollar 3.3.18 *Ist C eine well-rounded minimale Klasse, so ist $\mathrm{Aut}_L(C)$ eine endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}(L)$.*

Für imaginärquadratische Zahlkörper mit $h_K > 1$ möchten wir nun noch die Vorzüge des Gewichts φ_1 beschreiben. Wir folgen dazu Abschnitt 3 von [BC13], um das dortige Theorem 3.8 vorstellen zu können.

Definition 3.3.19 *Es sei $L = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{c}_i$. Wir bezeichnen mit*

$$\det_L(\mathcal{A}) := N(\mathfrak{c}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{c}_n)\det(\mathcal{A})$$

die Determinante von $\mathcal{A}$ bezüglich L.
Die Abbildung

$$\gamma_L \;:\; \mathcal{H}_n^+ \to \mathbb{R}_{>0},\ \mathcal{A} \mapsto \frac{\min_L(\mathcal{A})}{(\det_L(\mathcal{A}))^{1/n}}$$

erfüllt $\gamma_L(\alpha\mathcal{A}) = \gamma_L(\mathcal{A})$ und $\gamma_L(\mathcal{A}[g]) = \gamma_L(\mathcal{A})$ für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n^+$, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, $g \in \mathrm{GL}(L)$, sodass sie eine Abbildung auf $\mathbb{R}_{>0}\backslash\mathcal{H}_n^+/\mathrm{GL}(L)$ induziert, die wir ebenfalls mit γ_L bezeichnen. Diese Abbildung nennen wir die Hermite-Invariante von $\mathcal{A}$ bezüglich L.

Die Hermite-Invariante ist eine Funktion, die usprünglich auf $\mathbb{Z}$-Gittern studiert wurde und dort eine wichtige Rolle bei der Suche nach dichten regelmäßigen Kugelpackungen spielt. Die lokal dichtesten Kugelpackungen sind durch diejenigen Gitter gegeben, welche Maxima der Hermite-Funktion sind. Eine detaillierte Darstellung dieses Sachverhalts findet der Leser in [Mar03].
Auch in unserer Situation gilt der folgende Satz, der eine bekannte Aussage in der Voronoi-Theorie ganzzahliger Gitter ist.[1]

Satz 3.3.20 (vgl. [BC13, Theorem 3.7]) *Ist $\mathcal{A}$ ein lokales Maximum der Hermite-Funktion γ_L, so ist $\mathcal{A}$ perfekt bezüglich L.*

Mit Hilfe dieses Satzes beweist man leicht das folgende wichtige Resultat.

[1] In der Tat enthält [BC13] eine stärkere als die hier vorgestellte Aussage.

Satz 3.3.21 ([BC13, Theorem 3.8]) *Es sei $L = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{c}_i$ ein $\mathcal{O}_K$-Gitter und $\mathfrak{p}$ ein gebrochenes Ideal von K. $\overline{}$ bezeichne den nichttrivialen Galois-Automorphismus von $K/\mathbb{Q}$. Dann gilt für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n^+$*

$$\gamma_L(\mathcal{A}) = \gamma_{\mathfrak{p}L}(\mathcal{A}) \text{ und } \gamma_L(\mathcal{A}) = \gamma_{\overline{L}}(\overline{\mathcal{A}}),$$

sodass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. *$\mathcal{A}$ ist perfekt bezüglich L,*
2. *$\mathcal{A}$ ist perfekt bezüglich $\mathfrak{p}L$,*
3. *$\overline{\mathcal{A}}$ ist perfekt bezüglich $\overline{L}$.*

Beweis: Vergleiche den Beweis aus [BC13]. Eine einfache Rechnung zeigt, dass $\gamma_L(\mathcal{A}) = \gamma_{\mathfrak{p}L}(\mathcal{A}) = \gamma_{\overline{L}}(\overline{\mathcal{A}})$, sodass die Behauptung aus Satz 3.3.20 folgt, da die lokalen Extrema von γ_L L-perfekte Hermitesche Formen sind. □

Es gilt $\mathrm{GL}(L) \cong \mathrm{GL}(\mathfrak{p}L) \cong \mathrm{GL}(\overline{L})$ und zu jedem L-perfekten $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n^+$ gibt es eine Bijektion zwischen den Facetten des L-Voronoi-Bereichs und denen der $\mathfrak{p}L$- und $\overline{L}$-Voronoi-Bereiche, sodass man über diesen Gittern dieselben Anzahlen von perfekten Formen und minimalen Klassen erhält.
Um also für einen imaginärquadratischen Zahlkörepr K alle relevanten Daten zu bestimmen, muss man bei Wahl des Gewichts φ_1 lediglich die Gitter $\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus \mathfrak{c}$ betrachten, wobei $\mathfrak{c}$ ein Vertretersystem von $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\backslash \mathcal{C}\ell_K/\mathcal{C}\ell_K^n$ durchläuft.

3.4. G-äquivariante Voronoi-Theorie

In diesem Abschnitt stellen wir die G-äquivariante Voronoi-Theorie als wichtiges Hilfsmittel für die algorithmische Behandlung maximal endlicher Untergruppen von $\mathrm{GL}(L)$ vor. Dabei folgen wir den Kapiteln 11 und 13 aus [Mar03].

Es sei hier $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$ eine endliche Gruppe und L ein $\mathcal{O}_K$-Gitter in K^n.

Definition 3.4.1 *Wir nennen L ein G-Gitter, falls L unter der natürlichen Operation von G stabil ist. Dies ist äquivalent dazu, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(L)$ ist.*

Es sei angemerkt, dass die Eigenschaft eines Gitters, G-Gitter zu sein, von der konkreten Darstellung der Gruppe G als Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ abhängt, nicht bloß vom Isomorphietyp oder der Konjugiertenklasse von G.

Beispiel 3.4.2 *Es sei $L = \mathcal{O}_K \oplus 2\mathcal{O}_K$ und $G := \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Die Gruppe $H := \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ ist zu G in $\mathrm{GL}_2(K)$ konjugiert, aber während L ein G-Gitter ist, ist es sicherlich kein H-Gitter.*

Wir formulieren nun eine Voronoi-Theorie für G-invariante Formen und minimale Klassen, die sich in den meisten Aspekten nicht von der klassischen Voronoi-Theorie unterscheidet.

Definition 3.4.3 *Wir bezeichnen mit*

$$\mathcal{F}(G) := \{\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n \mid \mathcal{A}[g] = \mathcal{A} \text{ für alle } g \in G\}$$

den Raum der G-invarianten Hermiteschen Formen, kurz auch Formenraum von G genannt. Er enthält den offenen Kegel $\mathcal{F}^+(G) := \mathcal{F}(G) \cap \mathcal{H}_n^+$ der positiv definiten G-invarianten Hermiteschen Formen.
Zu $\mathcal{A} \in \mathcal{F}^+(G)$ definieren wir die G-minimale Klasse von $\mathcal{A}$ als $\mathrm{Cl}_L(\mathcal{A}) \cap \mathcal{F}(G)$.

Definition 3.4.4 *Es sei $\mathcal{A} \in \mathcal{F}^+(G)$. Dann setzen wir für $x \in K^n$*

$$\Omega_x := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (xg)^*(xg) \in \mathcal{F}(G^*),$$

wobei $G^* := \{g^* \mid g \in G\}$ sei, und nennen $\mathcal{A}$ G-perfekt, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1. *$\{\Omega_x \mid x \in S_L(\mathcal{A})\}$ erzeugt $\mathcal{F}(G^*)$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

2. *$\mathrm{Cl}_L(\mathcal{A}) \cap \mathcal{F}(G) = \{\alpha\mathcal{A} \mid \alpha \in \mathbb{R}_{>0}\}$*

3. *$\mathcal{A}$ ist bis auf Vielfache eindeutig durch $S_L(\mathcal{A})$ bestimmt.*

Mit dieser Definition von Perfektion lässt sich ein Voronoi-Algorithmus auf dem Raum $\mathcal{F}(G)$ genauso durchführen, wie es im Raum $\mathcal{H}_n$ der Fall ist, denn aufgrund des folgenden Lemmas kann man wieder die Methoden aus Kapitel 2 zum Einsatz bringen. Zusätzlich lassen sich technische Details für eine programmiertechnische Implementierung aus [BC13] übertragen.

Lemma 3.4.5 ([Opg01, Lemma 3.3]) *Es sei $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$. Dann sind $\mathcal{F}^+(G)$ und $\mathcal{F}^+(G^*)$ duale Kegel bezüglich*

$$\sigma \ : \ \mathcal{F}(G) \times \mathcal{F}(G^*), \ (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB).$$

Beweis: Ein Beweis dieser Aussage findet sich in [Opg01]. □

Bemerkung 3.4.6 *Die G-invariante Voronoi-Theorie umfasst die gewöhnliche Voronoi-Theorie als Spezialfall, indem man $G = \{1\}$ wählt.*

Das folgende Beispiel illustriert zum einen, wie der Voronoi-Algorithmus in $\mathcal{F}(G)$ angewandt werden kann. Zum anderen zeigt es ein wichtiges Phänomen, welches sich im gewöhnlichen Voronoi-Algorithmus nicht zeigt.

Beispiel 3.4.7 *Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ein imaginärquadratischer Zahlkörper und $G := \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leq \mathrm{GL}_2(K)$. Durch Lösen eines linearen Gliechungssystems berechnet man*

$$\mathcal{F}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir betrachten nun die Form $\mathcal{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ als G-invariante Form auf dem Gitter $L = \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ mit dem trivialen Gewicht $\varphi = \varphi_0$.
Damit haben wir $\min_L(\mathcal{A}) = 1$ und $S_L(\mathcal{A}) = \{x_1 := (1, 0), \ x_2 := (0, 1)\}$ (bis auf Einheiten von $\mathcal{O}_K$). Es ist

$$\Omega_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und diese beiden Matrizen erzeugen offenbar $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G^*)$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, sodass $\mathcal{A}$ G-perfekt ist.

Der Voronoi-Bereich von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{F}(G^*)$ ist der Kegel

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0} \right\}.$$

Seine Facetten sind die Strahlen durch $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dazu bestimmt man Seitenvektoren als $R_1 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $R_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Betrachtet man nun die Formen $\mathcal{A} + sR_1$ und $\mathcal{A} + sR_2$ mit $s, t > 0$, so stellt man fest, dass beide (bis auf Vielfache) nur noch einen kürzesten Vektor, nämlich $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$, sodass die Formen nicht G-perfekt sein können. Die Form $\mathcal{A}$ ist also über keine

der beiden Seiten ihres Voronoi-Bereichs zu einer perfekten Form benachbart. Eine solche Situation kann im gewöhnlichen Voronoi-Algorithmus nicht auftreten. Seitenflächen mit der gerade beschriebenen Eigenschaft bezeichnen wir als Sackgassen (in [Mar03] wird der englische Begriff „dead-end“ verwendet).
In diesem Beispiel ist $\mathcal{A}$ also die einzige G-perfekte Form und gleichzeitig Vertreter der einzigen well-rounded G-minimalen Klasse, denn wie zuvor ist der Graph der perfekten Formen zusammenhängend nach Korollar 2.1.17, da $\mathcal{F}^+(G)$ und $\mathcal{F}^+(G^*)$ duale Kegel sind.

Wir zitieren aus [Mar03] eine einfache Aussage über Sackgassen.

Proposition 3.4.8 ([Mar03, Proposition 13.1.8]) *Es sei $\mathcal{A} \in \mathcal{F}^+(G)$ eine G-perfekte Form von L-Minimum m und $\mathcal{V}$ ihr Voronoi-Bereich in $\mathcal{F}(G^*)$. $\mathcal{S}$ sei eine Facette von $\mathcal{V}$ mit zugehörigem Seitenvektor R. Mit $\rho \in [0, \infty]$ bezeichnen wir die kleinste obere Schranke derjenigen $t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{A}_t := \mathcal{A} + t \cdot R$ positiv definit und von L-Minimum m ist. Es ist klar, dass $\mathcal{S}$ eine Sackgasse ist, falls $\rho = \infty$ ist.*

1. *Falls $\mathcal{S}$ keine Sackgasse ist, ist die Form $\mathcal{A}_\rho$ G-perfekt.*
2. *$\mathcal{S}$ ist genau dann eine Sackgasse, wenn R positiv semidefinit ist.*
3. *Falls $\mathcal{S}$ eine Sackgasse ist, erzeugen die Vektoren $x \in S_L(\mathcal{A})$ mit $x^*x \in \mathcal{S}$ einen echten Teilraum von K^n.*

Beweis: Die Punkte 1. und 2. sind klar aufgrund der Tatsache, dass $\mathcal{F}(G)$ und $\mathcal{F}(G^*)$ zueinander duale Kegel sind und ob der Bemerkungen über blinde Richtungen in Kapitel 2, Bemerkung 2.1.13.
Um 3. zu beweisen nehmen wir an, dass $\mathcal{S}$ eine Sackgasse ist, die von $\{x_i^* x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ erzeugt wird, sodass die $x_i \in S_L(\mathcal{A})$ den Raum K^n erzeugen. Die x_i sind dann kürzeste Vektoren aller Formen $\mathcal{A}_t$. Aus der Ungleichung von Hadamard (vgl. zum Beispiel [Joh76] für eine hier anwendbare Formulierung) folgt dann, dass $\det(\mathcal{A}_t)$ als Polynom in t auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ beschränkt und daher konstant ist. Dann ist aber $R = 0$, was ein Widerspruch zur Wahl von R als Seitenvektor ist. □

3.5. Maximal endliche Untergruppen von $\mathrm{GL}(L)$

Mit der G-invarianten Voronoi-Theorie können wir jetzt den Zusammenhang zwischen minimalen Klassen und maximal endlichen Untergruppen von $\mathrm{GL}(L)$ herstellen. Wir beschreiben einen Zusammenhang zwischen minimalen Klassen und maximal endlichen Untergruppen sowie eine Möglichkeit, ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen ebensolcher Gruppen zu berechnen.

Definition 3.5.1 *Es sei C eine minimale Klasse. Wir nennen C G-invariant, falls G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}_L(C)$ ist.*
Wir definieren die folgende $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\pi_G \;:\; \mathcal{H}_n \to \mathcal{F}(G),\; F \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} F[g]$$

und bezeichnen sie, den Traditionen der Invariantentheorie folgend, als Reynolds-Operator.

Lemma 3.5.2 ([CN13, Lemma 6.2]) *Es sei C eine G-invariante minimale Klasse. Dann gilt*

$$\pi_G(C) = C \cap \mathcal{F}(G).$$

Beweis: Die Inklusion $\supseteq$ ist klar, da für $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(G)$ gilt $\pi_G(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, sei $\mathcal{A} \in C$, also $S_L(C) = S_L(\mathcal{A})$. Da C G-invariant ist, gilt $S_L(C) = S_L(\mathcal{A}[g])$ für alle $g \in G$. Folglich ist $S_L(\pi_G(\mathcal{A})) = S_L(C)$, denn $\pi_G(\mathcal{A})$ ist eine Summe positiv definiter Formen. Folglich ist $\pi_G(\mathcal{A}) \in C$. □

Proposition 3.5.3 ([CN13, Proposition 6.3]) *Ist $G \leq \mathrm{GL}(L)$ endlich, so existiert eine G-perfekte Form über L.*

Beweis: Da nach Lemma 3.4.5 $\mathcal{F}^+(G)$ und $\mathcal{F}^+(G^*)$ duale Kegel sind und nach Satz 3.3.10 durch L eine diskrete und zulässige Menge definiert wird, folgt die Behauptung aus Lemma 2.1.9. □

Lemma 3.5.4 ([CN13, Lemma 6.4]) *Es sei $G \leq \mathrm{GL}(L)$ endlich. Dann ist jede G-perfekte Form bezüglich L $\mathcal{A}$ well-rounded.*

Beweis: Den Beweis führt man analog zum Fall gewöhnlicher Hermitescher Formen. Wir nehmen an, dass $\langle S_L(\mathcal{A})\rangle_K \neq K^n$. Dann finden wir eine von Null verschiedene Linearform auf K^n, in deren Kern $S_L(\mathcal{A})$ liegt. Diese Linearform beschreiben wir durch ein $H \in K^{n\times 1}$, es ist also $xH = 0$ für alle $x \in S_L(\mathcal{A})$.
Setze

$$\mathcal{A}_0 := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gHH^*g^* \in \overline{\mathcal{F}^+(G)}.$$

Da $\mathcal{A}$ G-invariant ist, permutiert G die Vektoren in $S_L(\mathcal{A})$, sodass $\mathcal{A}_0[x] = 0$ für alle $x \in S_L(\mathcal{A})$ gilt. Für jedes $\varepsilon > 0$ haben wir also $S_L(\mathcal{A}+\varepsilon\mathcal{A}_0) \supseteq S_L(\mathcal{A})$ und es herrscht nach Lemma 2.1.4 Gleichheit, falls ε hinreichend klein ist. In diesem Fall ist also $\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{A}_0 \in \mathrm{Cl}_L(\mathcal{A}) \cap \mathcal{F}(G)$, was ein Widerspruch dazu ist, dass $\mathcal{A}$ bezüglich L G-perfekt ist. $\square$

Der folgende Satz ist das zentrale Resultat dieses Abschnitts.

Satz 3.5.5 ([CN13, Theorem 6.5]) *Es sei $G \leq \mathrm{GL}(L)$ eine maximal endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}(L)$. Dann ist $G = \mathrm{Aut}_L(C)$ für eine well-rounded minimale Klasse C bezüglich L, sodass $C \cap \mathcal{F}(G)$ einen eindimensionalen Teilraum von $\mathcal{F}(G)$ erzeugt.*

Beweis: Nach Proposition 3.5.3 existiert ein G-perfektes $F \in \mathcal{H}_n^+$. Es ist dann $G \leq \mathrm{Aut}_L(\mathrm{Cl}_L(F))$ und $\mathrm{Aut}_L(\mathrm{Cl}_L(F))$ ist endlich, da F nach Lemma 3.5.4 well-rounded ist. Die Maximalität von G impliziert, dass $G = \mathrm{Aut}_L(\mathrm{Cl}_L(F))$ gilt.
Es ist F nach Wahl G-perfekt, sodass $\mathrm{Cl}_L(F) \cap \mathcal{F}(G) = \{\alpha F \mid \alpha \in \mathbb{R}_{>0}\}$. Diese Menge erzeugt sicherlich einen eindimensionalen Teilraum von $\mathcal{F}(G)$. $\square$

Dieser Satz liefert in Verbindung mit dem rechnerischen Zugang zu minimalen Klassen aus Satz 2.3.7 eine endliche Menge endlicher Untergruppen von $\mathrm{GL}(L)$, die ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen enthält. Um ein solches Vertretersystem aus dieser Menge zu erhalten müssen wir in der Lage sein zu prüfen, ob eine endliche Gruppe in $\mathrm{GL}(L)$ maximal endlich ist und ob je zwei solche Gruppen zueinander konjugiert sind.

Proposition 3.5.6 ([CN13, Proposition 6.6]) *Sei $G \leq \mathrm{GL}(L)$ eine endliche Untergruppe. Dann sind die maximal endlichen Untergruppen $H \leq \mathrm{GL}(L)$, die G enthalten, von der Form $H = \mathrm{Aut}_L(C_G)$, wobei C_G eine G-minimale Klasse ist.*

Beweis: Es sei H eine maximal endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}(L)$, die G umfasst. Dann ist $H = \mathrm{Aut}_L(C)$ für eine G-invariante L-minimale Klasse C nach Satz 3.5.5. Nach Lemma 3.5.2 ist $S_L(C) = S_L(C_G)$ mit $C_G := \pi_G(C)$ und $H = \mathrm{Aut}_L(C_G)$. $\square$

Bemerkung 3.5.7 ([CN13, Remark 6.7]) *Sind G_1, G_2 zwei maximal endliche Untergruppen von $\mathrm{GL}(L)$, so kann man sie wie folgt darauf testen, ob sie in $\mathrm{GL}(L)$ zu einander konjugiert sind. Man bestimmt Vertretersysteme R_i der Bahnen von G_i-perfekten Formen unter N_i, den Normalisatoren von G_i in $\mathrm{GL}(L)$. Daraufhin prüft man, ob eine Form in R_1 L-isometrisch zu einer Form in R_2 ist. Da $G_i = \mathrm{Aut}_L(F_i)$ für alle $F_i \in R_i$ gilt, liefert eine Isometrie ein konjugierendes Element zwischen G_1 und G_2.*
Umgekehrt liefert ein konjugierendes Element zwischen G_1 und G_2 Isometrien zwischen Elementen in R_1 und R_2.

3.6. Algorithmen und Implementierung

Aufbauend auf den Ergebnissen dieses Kapitels wurde ein Algorithmus zur Bestimmung eines Vertretersystems der minimalen Klassen unter der Operation von $\mathrm{GL}(L)$ in Magma [BCP97] implementiert. Dieser basiert auf dem in Magma im Zusammenspiel mit QHull [BDH96] implementierten Voronoi-Algorithmus aus [BC13, Bra12].
Als Verfeinerung dieses Algorithmus werden nun auch die nicht perfekten minimalen Klassen berechnet, indem die Seitenflächen als Durchschnitte der Facetten bestimmt werden. Zusätzlich werden für die perfekten Nachbarn einer perfekten Hermiteschen Form $\mathcal{A}$ die „kritischen Werte", das heißt die Zahlen ρ ermittelt, für die $\mathcal{A} + \rho R$ perfekt ist, falls R ein Seitenvektor des Voronoi-Bereichs von $\mathcal{A}$ ist. Damit können dann Vertreter der minimalen Klassen mithilfe von Satz 2.3.7 bestimmt werden.

Um zu testen, ob zwei minimale Klassen C, C' äquivalent sind, greifen wir auf das Lemma 3.3.17 zurück, welches auf der algorithmisch einfachen Bestimmung der kanonischen Formen T_C, $T_{C'}$ beruht und diese auf L-Isometrie testet. Dies geschieht mithilfe des bekannten Algorithmus von W. Plesken und B. Souvignier [PS97], der zwei $\mathbb{Z}$-Gitter auf Isometrie testet. Die Anwendung dieses Algorithmus auf Hermitesche Formen ist bereits in [BC13] beschrieben.

Aus dem Vertretersystem der minimalen Klassen gewinnt man dann als Automorphismengruppen der jeweiligen kanonischen Formen die Automorphismengruppen der minimalen Klassen. Wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben lassen sich diese Gruppen unter Verwendung von G-invarianter Voronoi-Theorie auf die Eigenschaft testen, maximal endlich zu sein, und die Frage, ob die Gruppen zueinander konjugiert sind, lässt sich ebenfalls beantworten. Diese zwei Algorithmen sind nur für einige einfache Fälle implementiert, sodass eine Magma-Prozedur mit den drei Rückgabewerten `true`, `false` und `unknown` entstanden ist.

Überdies ist aufbauend auf Satz 2.2.4 eine Methode zur Bestimmung eines Erzeugendensystems von $\mathrm{GL}(L)$ implementiert. Dazu werden, in der Bezeichnung des Satzes 2.2.4, die g_y beim Aufruf des Voronoi-Algorithmus gespeichert. Da für unendliche Gruppen jedoch keine Algorithmen zum Test auf Mitgliedschaft in einer Untergruppe bekannt sind, lassen sich die entstehenden Erzeugendensysteme nicht reduzieren und wachsen sehr schnell auf unhandliche Größen an, sodass wir sie nicht im Druck angeben.

Im Voronoi-Algorithmus, der in [BC13] näher erklärt wird, liegt die rechnerisch aufwendigste Stelle in der Untersuchung des Voronoi-Bereichs und der Bestimmung seiner Seitenflächen. Dies ist auch im Algorithmus zur Bestimmung der minimalen Klassen der kritischste Punkt in Bezug auf die Rechenzeit. Dies wird noch verschärft durch die

Tatsache, dass hier nicht nur die Facetten (also die Seitenflächen von Kodimension 1), sondern auch die niederdimensionalen Seitenflächen bestimmt werden müssen.

Bereits in Dimension 3 macht sich dies so stark bemerkbar, dass wir für diesen Fall keine rechnerischen Ergebnisse angeben.[2]

[2] 10.10.2013: Durch Brücksichtigung der Operation der Automorphismengruppe einer perfekten Form auf den Seiten ihres Voronoi-Bereichs kann man den Rechenaufwand so weit reduzieren, dass sich für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d \in \{1, 3\}$ Ergebnisse erzielen lassen.

4. Zählen von Konjugiertenklassen

4.1. Hilfsmittel

In diesem Kapitel möchten wir die Anzahlen der Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen im zweidimensionalen Fall auf theoretischer Ebene vorhersagen. Dies gelingt für Untergruppen isomorph zu D_{12} und D_8 sowie, mit Einschränkungen, für Untergruppen isomorph zu V_4.

Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein imaginärquadratischer Zahlkörper mit $d \notin \{-1, -2, -3\}$, sodass die einzig möglichen maximal endlichen Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(K)$ isomorph sind zu D_{12}, D_8, $\mathrm{SL}(2,3)$, $C_3 \rtimes C_4$. Dies folgt aus der Klassifikation der endlichen Untergruppen von $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ in [Bli17].

Es sei $Q_K := \{[I] \in \mathcal{C}\ell_K \mid [I]^2 = 1\} = \{[I_1], ..., [I_{s_K}]\}$, wobei $s_K := |\mathcal{C}\ell_K / \mathcal{C}\ell_K^2|$ ist. Wie zuvor bezeichne $\{\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_{h_K}\}$ ein Vertretersystem der Idealklassen von K.

Bemerkung 4.1.1 *Bei den betrachteten endlichen Untergruppen handelt es sich stets um solche Untergruppen U von $\mathrm{GL}_n(K)$, die eine Hermitesche Form $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n$ unter der Operation*

$$U \times \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n,\ (u, \mathcal{A}) \mapsto \mathcal{A}[u]$$

festlassen. Somit gilt im Falle maximaler Untergruppen stets $-I_n \in U$.

Definition 4.1.2 *Es sei $G \leq \mathrm{GL}(L)$ eine Untergruppe. Da $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$ eine $\mathcal{O}_K$-Ordnung ist, können wir $\mathcal{O}_K(G) := \langle G \rangle_{\mathcal{O}_K}$, die sogenannte einhüllende Ordnung von G, definieren. Es handelt sich um die kleinste G umfassende $\mathcal{O}_K$-Ordnung in $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$.*

Bemerkung 4.1.3 *Der Leser beachte den Unterschied zwischen der einhüllenden Ordnung $\mathcal{O}_K(G)$ und dem gewöhnlichen Gruppenring $\mathcal{O}_K G$. Ist beispielsweise*

$$G := \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K),$$

so ist die einhüllende Ordnung gegeben durch

$$\mathcal{O}_K(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathcal{O}_K \right\} \cong \mathcal{O}_K,$$

während der Gruppenring $\mathcal{O}_K G$ isomorph zu $\mathcal{O}_K[x]/(x^2-1)$ ist. Die einhüllende Ordnungn ist jedoch stets Bild des Gruppenrings unter dem natürlichen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_K G \to \mathcal{O}_K(G)$, der als Fortsetzung der Darstellung $G \to \mathrm{GL}(L)$ entsteht.

Im Folgenden werden wir Bahnen von Gittern unter geeigneten Operationen zählen. Dabei nutzen wir aus, dass es in der vorliegenden Situation nur endlich viele Bahnen, sogar nur endlich viele Gitter, gibt. Dies folgt aus dem folgenden bekannten Satz, dessen Beweis wir hier nicht führen werden. Wir übernehmen die Formulierung aus [Rei75].

Satz 4.1.4 (Jordan-Zassenhaus) *Sei R ein Dedekindbereich, dessen Quotientenkörper K ein globaler Körper ist. Dann existieren zu jeder R-Ordnung Λ in einer halbeinfachen K-Algebra A und zu jeder natürlichen Zahl t nur endlich viele Isomorphieklassen von Λ-Linksgittern, deren R-Rang höchstens t ist.*

Beweis: Ein Beweis findet sich in [Rei75, Theorem (26.4)]. □

Lemma 4.1.5 *Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$ eine endliche Untergruppe und*

$$N := N_{\mathrm{GL}_n(K)}(G) := \{X \in \mathrm{GL}_n(K) \mid XgX^{-1} \in G \ \forall \ g \in G\}$$

ihr Normalisator. Ist $\{L_1, ..., L_s\}$ ein Vertretersystem der N-Bahnen auf der Menge aller $\mathcal{O}_K(G)$-Gitter in K^n, so gibt es eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{I} := \{i \mid 1 \leq i \leq s,\ \mathrm{St}(L_i) = [I]\}$ und der Menge $\mathcal{K}$ der Konjugiertenklassen von Untergruppen $U \leq \mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)$, welche in $\mathrm{GL}_n(K)$ zu G konjugiert sind.

Beweis: Es sei $L_i \in \{L_1, ..., L_s\}$ mit $\mathrm{St}(L_i) = [I]$. Dann existiert ein Isomorphismus $\varphi_i : L_i \to \mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I$ von $\mathcal{O}_K$-Moduln. Damit ist $\varphi_i^{-1} G \varphi_i \leq (\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I))^* = \mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)$. Dies nehmen wir zum Anlass eine Zuordnung

$$\Phi : \mathcal{I} \to \mathcal{K},\ i \mapsto (\varphi_i^{-1} G \varphi_i)^{\mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)}$$

zu definieren, indem wir einen Index i auf die $\mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)$-Konjugiertenklasse von $\varphi_i^{-1} G \varphi_i$ abbilden.

Wir zeigen zunächst, dass dies eine wohldefinierte Abbildung ist. Dazu ist die Unabhängigkeit von der Wahl des Isomorphismus φ_i und von dem Vertreter der Bahn

von L_i unter N zu beweisen. Sei zunächst $\varphi'_i : L_i \to \mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I$ ein weiterer Isomorphismus von $\mathcal{O}_K$-Moduln. Dann liegt $\varphi'^{-1}_i \varphi_i$ in $(\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I))^* = \mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)$ und konjugiert $\varphi_i^{-1} G \varphi_i$ auf $\varphi'^{-1}_i G \varphi'_i$. Somit bildet Φ für jede Wahl eines Isomorphismus von L_i zu $\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I$ den Index i auf die selbe Konjugiertenklasse in $\mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)$ ab.
Sei nun L ein $\mathcal{O}_K(G)$-Gitter in der N-Bahn von L_i. Es existiert also ein $n \in N$ mit $L = L_i n$. Wählt man einen $\mathcal{O}_K$-Modul-Isomorphismus $\varphi : L \to \mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I$, so ist $n\varphi$ ein Isomorphismus zwischen L_i und $\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I$. Man erhält also die Untergruppen $\varphi^{-1} G \varphi$ und $\varphi^{-1} n^{-1} G n \varphi$ in $\mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)$. Diese liegen aber in derselben Konjugiertenklasse, da $n^{-1} G n = G$.
Damit ist Φ wohldefiniert.

Seien nun $i, j \in \mathcal{I}$ mit zugehörigen Gittern L_i, L_j und Isomorphismen φ_i, φ_j wie zuvor. Um die Injektivität von Φ zu zeigen, nehmen wir an, dass die $\mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)$-Konjugiertenklassen von $\varphi_i^{-1} G \varphi_i$ und $\varphi_j^{-1} G \varphi_j$ identisch sind. Es existiert also ein $\psi \in \mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)$ mit

$$\psi^{-1} \varphi_i^{-1} G \varphi_i \psi = \varphi_j^{-1} G \varphi.$$

Es liegt also $\varphi_j \psi \varphi_i^{-1}$ in N.
Man hat dann aber die Gleichung

$$L_j \ \varphi_j \psi \varphi_i^{-1} = (\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I) \psi \varphi_i^{-1} = (\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I) \varphi_i^{-1} = L_i,$$

welche zeigt, dass L_i und L_j in derselben Bahn unter N liegen. Folglich ist $i = j$.

Schließlich zeigen wir die Surjektivität von Φ. Sei $U \leq \mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I)$ eine in $\mathrm{GL}_n(K)$ zu G konjugierte Untergruppe. Es existiert also ein $X \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $XUX^{-1} = G$. Wir setzen nun $L := (\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I) X^{-1}$. Es ist dann $\mathrm{GL}(L) = X \mathrm{GL}(\mathcal{O}_K^{n-1} \oplus I) X^{-1} \geq G$, sodass L ein $\mathcal{O}_K(G)$-Gitter ist. Es existieren also ein $n \in N$ und ein $1 \leq j \leq s$ mit $Ln = L_j$. j ist somit ein Urbild der Konjugiertenklasse von U. □

Die folgende Aussage gibt Aufschluss darüber, wann für zwei Gitter L_1 und L_2 die Gruppen $\mathrm{GL}(L_1)$ und $\mathrm{GL}(L_2)$ zueinander konjugiert sind.

Lemma 4.1.6 ([CN13, Theorem 2.1]) *Es seien L_1 und L_2 zwei $\mathcal{O}_K$-Gitter in K^n. Die Endomorphismenordnungen $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L_1)$ und $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L_2)$ sind genau dann in $\mathrm{GL}_n(K)$ konjugiert, wenn $\mathrm{St}(L_1) \in \mathrm{St}(L_2)\mathcal{C}\ell_K^n$.*

Beweis: Ein Beweis findet sich in [CN13]. □

4.2. D_{12}, D_8 und V_4

Lemma 4.2.1 *Die einhüllende $\mathcal{O}_K$-Ordnung von $D_{12} \leq \mathrm{GL}(L)$ ist konjugiert zu*

$$\mathcal{O}_K(D_{12}) \cong \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & 3\mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}.$$

Das Vorgehen im Beweis dieser Aussage findet sich auch in [Neb09].

Beweis: Da $D_{12} \cong C_2 \times S_3$ betrachte man zunächst die ganzzahlige Darstellung von S_3, die durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =: \tau, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: \sigma \right\rangle \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

gegeben ist. Da die Gruppe D_{12} nur eine irreduzible treue Darstellung vom Grad 2 besitzt, ist jede Untergruppe isomorph zu D_{12} zu der von dieser ganzzahligen Gruppe und $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{GL}_2(K)$ konjugiert.
Da $\det(1-\tau) = 3$ ist, hat man mit

$$\mathbb{Z}^2 \supseteq (1-\tau)\mathbb{Z}^2 \supseteq 3\mathbb{Z}^2$$

eine Kette von $\mathbb{Z}(S_3)$-Gittern. Für diese Gitter erhält man kompatible $\mathbb{Z}$-Basen der Gestalt (b_1, b_2), $(b_1, 3b_2)$, $(3b_1, 3b_2)$, indem man $b_1 = (1,1)$ und $b_2 = (0,1)$ wählt. Betrachtet man nun die vorliegende Darstellung der S_3 bezüglich der Basis (b_1, b_2), so sieht man sofort, dass die einhüllende $\mathbb{Z}$-Ordnung in der $\mathbb{Z}$-Ordnung $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 3\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ enthalten ist. Eine einfache Rechnung zeigt, dass bereits Gleichheit vorliegt.
Es ist $D_{12} = \langle -I_2, S_3 \rangle$, sodass $\mathbb{Z}(D_{12}) = \mathbb{Z}(S_3)$. Es folgt sofort, dass $\mathcal{O}_K(D_{12}) \cong \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & 3\mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}$, wie behauptet. □

Wir werden im Folgenden Aussagen über $\mathcal{O}_K(D_{12})$ stets in der gerade gewählten Basis treffen. Die Bezeichnungen σ und τ aus dem vorhergehenden Beweis werden wir ebenfalls weiterhin verwenden.

Bemerkung 4.2.2 *Der Normalisator von $\mathcal{O}_K(D_{12})$ in $\mathrm{GL}_2(K)$ (und somit gleichfalls der Normalisator von D_{12}) ist $\langle K^*, D_{12}, \alpha \rangle$, wobei $\alpha := 1 + 2\tau$ ein Element mit $\det(\alpha) = 3$ ist.*

Beweis: Der Normalisator $N := N_{\mathrm{GL}_2(K)}(D_{12})$ operiert durch Automorphismen auf der Gruppe D_{12}, sodass sich $N/\mathcal{K}$ in $\mathrm{Aut}(D_{12}) \cong D_{12}$ einbettet, wenn $\mathcal{K}$ den Kern dieser

Operation bezeichnet.
Da der von $D_{12} \leq \mathrm{GL}_n(K)$ erzuegte K-Vektorraum $K^{2\times 2}$ ist, kann $\mathcal{K}$ bloß aus der Gruppe der Skalarmatrizen isomorph zu K^* bestehen.
Da $[\mathrm{Aut}(D_{12}) : \mathrm{Inn}(D_{12})] = 2$ ist, fehlt also lediglich ein Element $\alpha \in N$, um den Normalisator zu erzeugen, mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $\langle K^*, D_{12}\rangle$ Index 2 in N hat. Das Element α aus der Behauptung erfüllt diese Bedingung. □

Satz 4.2.3

- *Ist 3 träge in $\mathcal{O}_K$, dann enthält $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ s_K Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen isomorph zu D_{12}. $\mathrm{GL}(L)$ enthält keine solche Konjugiertenklasse, falls $\mathrm{St}(L) \notin \mathcal{C}\ell_K^2$.*

- *Falls $(3) = \mathfrak{p}_3^2$ verzweigt ist und $[\mathfrak{p}_3]$ kein Quadrat in $\mathcal{C}\ell_K$ ist, existieren s_K Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen isomorph zu D_{12} in $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ und $\frac{s_K}{2}$ solche Konjugiertenklassen in $\mathrm{GL}(L)$, falls $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_3]\mathcal{C}\ell_K^2$.*
  Ist $[\mathfrak{p}_3]$ ein Quadrat, so existieren $s_K + \frac{s_K}{2}$ Konjugiertenklassen in $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ und ebenso viele in $\mathrm{GL}(L)$ mit $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_3]\mathcal{C}\ell_K^2$.

- *Falls $(3) = \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_3'$ zerlegt und $\mathfrak{p}_3$ ein Hauptideal ist, gibt es $2s_K$ Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen D_{12} in $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ und $\mathrm{GL}(L)$ enthält keine solche Konjugiertenklasse, falls $\mathrm{St}(L) \notin \mathcal{C}\ell_K^2$.*
  Ist $\mathfrak{p}_3$ kein Hauptideal und $[\mathfrak{p}_3]$ in $\mathcal{C}\ell_K$ kein Quadrat, so enthält $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ s_K Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen, die zu D_{12} isomorph sind. Ebenso enthalten diejenigen $\mathrm{GL}(L)$ s_K solche Konjugiertenklassen, für die $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_3]\mathcal{C}\ell_K^2$ ist.
  Falls $[\mathfrak{p}_3]$ ein Quadrat in $\mathcal{C}\ell_K$ ist, so existieren jeweils $2s_K$ Konjugiertenklassen in $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ und $\mathrm{GL}(L)$ mit $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_3]\mathcal{C}\ell_K^2$.

Beweis: Wir verwenden Lemma 4.1.5 und zählen die $N := N_{\mathrm{GL}_2(K)}(D_{12})$-Bahnen von $\mathcal{O}_K(D_{12})$-Gittern. Die Ordnung $\mathcal{O}_K(D_{12}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & 3\mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}$ besitzt eine nichttriviale Idempotentzerlegung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sodass jedes $\mathcal{O}_K(D_{12})$-Gitter direkte Summe zweier Ideale von $\mathcal{O}_K$ ist.
Bis auf Multiplikation mit einem gebrochenen Ideal von $\mathcal{O}_K$ können wir also annehmen, dass ein $\mathcal{O}_K(D_{12})$-Gitter von der Gestalt $\mathcal{O}_K \oplus I$ ist, wobei die Bedingung, $\mathcal{O}_K(D_{12})$-Gitter zu sein, die folgende Auswirkung hat.

$$(\mathcal{O}_K \oplus I)\begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & 3\mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix} = (\mathcal{O}_K + I) \oplus (3\mathcal{O}_K + I) \subseteq \mathcal{O}_K \oplus I$$

Dies ist äquivalent zu $3\mathcal{O}_K \subseteq I \subseteq \mathcal{O}_K$. Im Folgenden werden wir also nach dem Zerlegungsverhalten von 3 in $\mathcal{O}_K$ unterscheiden.

- Sei zunächst 3 träge in $\mathcal{O}_K$. Dann sind die Gitter $L_1 := \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ und $L_2 := \mathcal{O}_K \oplus 3\mathcal{O}_K$ zu betrachten. Es ist $L_1\alpha = L_2$, denn in der betrachteten Basis ist
$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
und $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ bildet $\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ in sich selbst ab.
Also sind die N-Bahnen mit trivialer Steinitzinvariante gegeben durch I_iL_1 mit $1 \leq i \leq s_K$.
Insbesondere enthält $\mathrm{GL}(L)$ mit $\mathrm{St}(L) \notin \mathcal{C}\ell_K^2$ keine Untergruppe isomorph zu D_{12}.

- Nun sei $(3) = \mathfrak{p}_3^2$ verzweigt. Dann hat man bis auf Multiplikation mit gebrochenen Idealen die Gitter $L_1 := \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$, $L_2 := \mathcal{O}_K \oplus \mathfrak{p}_3$, $L_3 := \mathcal{O}_K \oplus 3\mathcal{O}_K$. Es ist $L_1\alpha = L_3$ wie zuvor und $L_2\alpha \subseteq \mathfrak{p}_3 L_2$, wobei aus Indexgründen Gleichheit herrscht. Da wir den Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ausgeschlossen haben, ist $\mathfrak{p}_3$ kein Hauptideal, sodass wir s_K Bahnen mit Steinitzklasse $[\mathcal{O}_K]$ und $\frac{s_K}{2}$ Bahnen mit Steinitzklasse $[\mathfrak{p}_3]$ erhalten, falls $[\mathfrak{p}_3]$ kein Quadrat in der Ideaklassengruppe $\mathcal{C}\ell_K$ ist.
Ist $[\mathfrak{p}_3]$ ein Quadrat, so findet man zusätzlich noch die N-Bahnen mit Steinitzklasse $[\mathcal{O}_K]$, die durch I_iJL_2 mit $[J]^2 = [\mathfrak{p}_3]$ und $1 \leq i \leq s_K$ vertreten werden, sodass sich die Anzahl der Konjugiertenklassen von D_{12} in $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ um $\frac{s_K}{2}$ erhöht. In diesem Fall enthält die $\mathrm{GL}(L)$ eines Gitters mit $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_3]\mathcal{C}\ell_K^2$ ebenfalls $s_K + \frac{s_K}{2}$ Konjugiertenklassen von D_{12}, da die Endomorphismenordnungen der Gitter $\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ und L nach Lemma 4.1.6 zueinander konjugiert sind.
s_K ist eine gerade Zahl, da die Faktorgruppe $\mathcal{C}\ell_K/\mathcal{C}\ell_K^2$ das Element $[\mathfrak{p}_3]$ von Ordnung 2 enthält.

- Schließlich sei $(3) = \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_3'$ zerlegt. Wir betrachten $L_1 := \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$, $L_2 := \mathcal{O}_K \oplus \mathfrak{p}_3$, $L_3 := \mathcal{O}_K \oplus \mathfrak{p}_3'$ und $L_4 := \mathcal{O}_K \oplus 3\mathcal{O}_K$ und es ist wieder $L_1\alpha = L_4$ sowie $L_2\alpha = \mathfrak{p}_3 L_3$ (abermals aus Indexgründen).
Falls nun $\mathfrak{p}_3$ ein Hauptideal ist, existieren $2s_K$ N-Bahnen von $\mathcal{O}_K(D_{12})$-Gittern, vertreten durch I_jL_k mit $1 \leq j \leq s_K$ und $k \in \{1, 2\}$. Diese Gitter sind allesamt frei, also von Steinitzklasse $[\mathcal{O}_K]$.
Ist $\mathfrak{p}_3$ kein Hauptideal und $[\mathfrak{p}_3] \notin \mathcal{C}\ell_K^2$, so haben wir s_K Bahnen von freien Gittern, die durch I_jL_1 mit $1 \leq j \leq s_K$ vertreten werden. Zudem existieren s_K N-Bahnen von Gittern mit Steinitzinvariante $[\mathfrak{p}_3]$, nämlich die Q_K-Vielfachen von L_2.
Wenn $\mathfrak{p}_3$ kein Hauptideal und $[\mathfrak{p}_3] \in \mathcal{C}\ell_K^2$ ist, so finden wir neben den s_K Bahnen mit Steinitzklasse $[\mathcal{O}_K]$, die durch I_iL_1 mit $1 \leq i \leq s_K$ vertreten werden noch s_K weitere Bahnen derselben Steinitzklasse, die vertreten werden durch die Q_K-Vielfachen von JL_3, wobei $J \trianglelefteq \mathcal{O}_K$ ein Ideal mit $[J]^2 = [\mathfrak{p}_3]$ sei. $\mathrm{GL}(L)$ enthält in diesem Fall für $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_3]\mathcal{C}\ell_K^2$ ebenso viele Konjugiertenklassen von D_{12}, da die Endomorphismenordnungen von Gittern mit in $[\mathfrak{p}_3]\mathcal{C}\ell_K^2 = \mathcal{C}\ell_K^2$ gelegener Steinitzklasse zu der Endomorphismenordnung von $\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ nach 4.1.6 konjugiert

sind.

$\square$

Im Folgenden benötigen wir ein technisches Hilfsmittel, welches wir aus [Rei75, Theorem (4.12)] zitieren.

Lemma 4.2.4 *Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal eines Dedekindbereichs R und $\mathfrak{c}$ ein gebrochenes R-Ideal. Dann existiert ein Isomorphismus von R-Moduln zwischen $R/\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}/\mathfrak{ac}$.*

Beweis: Ein Beweis findet sich beispielsweise in §22D von [O'M00]. $\square$

Als nächstes möchten wir die Konjugiertenklassen von Untergruppen untersuchen, die zur Kleinschen Vierergruppe $V_4 \cong C_2 \times C_2 = \left\langle -1, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ isomorph sind. Die einhüllende Ordnung $\Lambda = \mathcal{O}_K(V_4)$ ist

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} \mid a \equiv b \pmod{2\mathcal{O}_K} \right\} \cong \mathcal{O}_K[x]/(x^2 - 1).$$

Sie ist in der eindeutig bestimmten Maximalordnung $\Gamma := \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_K \end{pmatrix} \cong \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ von $K \oplus K$ enthalten.

Man hat $2\Gamma \subseteq \Lambda \subseteq \Gamma$, sodass jedes Λ-Gitter L zwischen den Γ-Gittern ΓL und $2\Gamma L$ eingeschlossen ist. Umgekehrt ist jedes Γ-Gitter ein Λ-Gitter.
Zu einem Γ-Gitter M definieren wir

$$\mathcal{Z}_\Lambda(M) := \{L \mid L \text{ ist ein } \Lambda\text{-Gitter und } \Gamma L = M\}.$$

Bemerkung 4.2.5 *Die Γ-Gitter in $K \oplus K$ sind allesamt von der Form $I \oplus J$, wobei I und J Ideale von $\mathcal{O}_K$ sind.*

Satz 4.2.6 *Sei $M = I \oplus J$ ein Γ-Gitter. Dann gilt*

$$\mathcal{Z}_\Lambda(M) \subseteq \{L \mid L \textit{ ist } \mathcal{O}_K\textit{-Gitter, } 2M \subseteq L \subseteq M\}$$

und es ist $|\mathcal{Z}_\Lambda(M)| = 4$. Genauer gilt

- *Ist 2 träge in $\mathcal{O}_K$, so ist $\mathcal{O}_K/2\mathcal{O}_K \cong \mathbb{F}_4$ und wir setzen $\{1,\omega,\omega^2\} := (\mathcal{O}_K/2\mathcal{O}_K)^*$. Es ist dann $\mathcal{Z}_\Lambda(M) = \{M, M_1, M_\omega, M_{\omega^2}\}$, wobei*

$$M_\alpha = \{(a,b) \in I \oplus J \mid \varphi(a+2I) = \alpha b + 2J\}.$$

  Dabei ist $\varphi : I/2I \to J/2J$ ein fest gewählter Isomorphismus von $\mathcal{O}_K$-Moduln, welcher im Fall $I = J$ die Identität ist.

- *Falls $(2) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2'$ zerlegt ist existieren eindeutig bestimmte $\mathcal{O}_K$-Modul-Isomorphismen $\varphi : I/\mathfrak{p}_2 I \to J/\mathfrak{p}_2 J$, $\varphi' : I/\mathfrak{p}_2' I \to J/\mathfrak{p}_2' J$ und $\psi : I/2I \to J/2J$. Es ist dann $\mathcal{Z}_\Lambda(M) = \{M, M_\varphi, M_{\varphi'}, M_\psi\}$, wobei*

$$\begin{aligned} M_\varphi &:= \{(a,b) \in I \oplus J \mid \varphi(a+\mathfrak{p}_2 I) = b + \mathfrak{p}_2 J\} \\ M_{\varphi'} &:= \{(a,b) \in I \oplus J \mid \varphi'(a+\mathfrak{p}_2' I) = b + \mathfrak{p}_2' J\} \\ M_\psi &:= \{(a,b) \in I \oplus J \mid \psi(a+2I) = b + 2J\}. \end{aligned}$$

- *Falls $(2) = \mathfrak{p}_2^2$ verzweigt ist, wähle man $\pi \in \mathfrak{p}_2 - (2)$ sowie Isomorphismen $\varphi : I/\mathfrak{p}_2 I \to J/\mathfrak{p}_2 J$, $\psi : I/2I \to J/2J$. Dann ist $\mathcal{Z}_\Lambda(M) = \{M, M_\varphi, M_\psi, M_{\psi\circ(1+\pi)}\}$. M_φ, M_ψ und $M_{\psi\circ(1+\pi)}$ seien dabei wie zuvor definiert.*

Die Steinitz-Invarianten der Gitter $L \in \mathcal{Z}_\Lambda(M)$ können aus dem Isomorphietyp von $M/L \cong \mathcal{O}_K/S$ ausgerechnet werden. Es ist $\mathrm{St}(L) = [I][J][S]$, für $L \in \mathcal{Z}_\Lambda(I \oplus J)$ mit $(I \oplus J)/L \cong \mathcal{O}_K/S$.

Beweis: Damit ein Λ-Gitter L in $\mathcal{Z}_\Lambda(M)$ liegt, ist sicherlich notwendig, dass die Projektionen auf die direkten Summanden I und J jeweils surjektiv sind, also $\pi_I(L) = I$, $\pi_J(L) = J$.

Um die Gitter zwischen M und $2M$ zu bestimmen, untersuchen wir den Quotienten $(I \oplus J)/2(I \oplus J)$, auf welchem Λ wie $\mathcal{O}_K/2\mathcal{O}_K$ operiert. Daher unterscheiden wir nun nach dem Zerlegungsverhalten von 2 in $\mathcal{O}_K$.

- Ist 2 träge, so ist $(I \oplus J)/2(I \oplus J) \cong \mathbb{F}_4 \oplus \mathbb{F}_4$ und neben $\mathbb{F}_4 \oplus \mathbb{F}_4$ selbst findet man noch die drei $\mathbb{F}_4$-Teilräume $\langle(1,\alpha)\rangle$ mit $\alpha \in \{1,\omega,\omega^2\}$, die die Surjektivitätsbedingung erfüllen.

- Falls 2 zerlegt ist, haben wir $\mathcal{O}_K/2\mathcal{O}_K \cong \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 =: R$ und wir notieren die Elemente dieses Rings als $R = \{0, 1, e_1, e_2\}$ mit $1 = e_1 + e_2$. Als geeignete Teilmoduln des Quotienten $(I \oplus J)/2(I \oplus J) \cong R \oplus R$ finden wir in diesem Fall $R \oplus R$,

$\langle(1,1)\rangle \cong R$ sowie die zwei Moduln

$$\langle(1,1),\ (0,e_1)\rangle \cong R \oplus e_1R,\ \langle(1,1),\ (0,e_2)\rangle \cong R \oplus e_2R.$$

- Im verbleibenden Fall ist $\mathcal{O}_K/2\mathcal{O}_K \cong \mathbb{F}_2[x]/(x^2) =: R$ und man findet als geeignete Teilmoduln von $R \oplus R$ die Moduln $\langle(1,a)\rangle$ mit $a \in \{1, 1+x\} = R^*$ und $\big\langle(1,1),(0,x)\big\rangle$.

In jedem der drei Fälle sind die Urbilder der vier verschiedenen Teilmoduln genau die vier im Satz beschriebenen Gitter.

Wir möchten nun die Steinitzklassen der Gitter in $\mathcal{Z}_\Lambda(M)$ bestimmen. Da es sich um Teilgitter von $M = I \oplus J$ handelt, können wir nach Satz 3.2.3 annehmen, dass ganze Ideale $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ existieren mit $L = \mathfrak{c}_1 I \oplus \mathfrak{c}_2 J$ für $L \in \mathcal{Z}_\Lambda(M)$ und somit $\mathrm{St}(L) = [I][J][S]$ mit $[S] := [\mathfrak{c}_1][\mathfrak{c}_2]$. Am Beispiel des Gitters $M_1 = \{(a,b) \in I \oplus J \mid \varphi(a+2I) = b+2J\}$ im Fall, dass $2\mathcal{O}_K$ träge ist, erläutern wir nun das Vorgehen, dessen Ergebnisse wir danach nur noch zusammengefasst angeben.

Man betrachte die Abbildung

$$f\ :\ I \to (I \oplus J)/M_1,\ x \mapsto (x,0) + M_1,$$

die klarerweise ein surjektiver Homomorphismus von $\mathcal{O}_K$-Moduln ist. Wir bestimmen $\ker(f)$ zu $2I$. Folglich ist $M/M_1 \cong I/2I \cong \mathcal{O}_K/2\mathcal{O}_K$ und somit $\mathrm{St}(M_1) = \mathrm{St}(M)$. Die übrigen Gitter ergeben die Ergebnisse in der folgenden Tabelle.

L	$\mathrm{St}(L)$
2 träge	
M_1	$\mathrm{St}(M)$
M_ω	$\mathrm{St}(M)$
M_{ω^2}	$\mathrm{St}(M)$
$(2) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2'$ zerlegt	
M_φ	$\mathrm{St}(M)[\mathfrak{p}_2]$
$M_{\varphi'}$	$\mathrm{St}(M)[\mathfrak{p}_2']$
M_ψ	$\mathrm{St}(M)$
$(2) = \mathfrak{p}_2^2$ verzweigt	
M_φ	$\mathrm{St}(M)[\mathfrak{p}_2]$
M_ψ	$\mathrm{St}(M)$
$M_{\psi\circ(1+\pi)}$	$\mathrm{St}(M)$

Damit ist die Aussage bewiesen. $\square$

Mit Hilfe des gerade bewiesenen Lemmas möchten wir nun die Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu V_4 zählen. Dazu bestimmen wir zunächst die Normalisatoren von V_4 beziehungsweise Λ sowie von Γ.

Lemma 4.2.7 *Es ist $N_{\mathrm{GL}_2(K)}(\Lambda) = N_{\mathrm{GL}_2(K)}(\Gamma) \cong (K^* \times K^*) \rtimes C_2$, wobei die Untergruppe $K^* \times K^*$ durch Diagonalmatrizen als Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K)$ realisiert wird. Zudem operiert eine C_2 durch $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Beweis: Die Ordnungen Λ und Γ bestehen ausschließlich aus Diagonalmatrizen. Bei Λ genügen die zwei Diagonaleinträge jeweils der Bedingung, zueinander kongruent modulo $2\mathcal{O}_K$ zu sein. Diese Bedingung ist invariant unter $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Dass die Normalisatoren von Λ und Γ nur aus Diagonalmatrizen bestehen können rechnet man leicht nach. Dann ist aber klar, dass sie alle Diagonalmatrizen aus $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ umfassen und übereinstimmen. $\square$

Dieses Lemma hat die folgende einfache Konsequenz.

Korollar 4.2.8 *Sei $N := N_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}(\Gamma)$. Die N-Bahnen auf der Menge der Γ-Gitter in $K \oplus K$ werden vertreten durch*

$$\{\mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{a}_j \mid 1 \leq i \leq j \leq h_K\},$$

sodass es genau $\binom{h_K+1}{2}$ Bahnen gibt.

Nun wenden wir uns den Bahnen des Normalisators von Λ auf der Menge der Λ-Gitter zu.

Lemma 4.2.9 *Auf der Menge der Λ-Gitter operiert $N := N_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}(\Lambda)$ mit $4\binom{h_K}{2} + 4h_K = 4\binom{h_K+1}{2}$ Bahnen, falls 2 in $\mathcal{O}_K$ verzweigt oder zerlegt ist. Ist 2 träge, so operiert N mit $4\binom{h_K}{2} + 3h_K$ Bahnen.*

Beweis: Ist L ein Λ-Gitter, so liegt es in $\mathcal{Z}_\Lambda(\Gamma L)$ und ΓL liegt in einer der $\binom{h_K+1}{2}$ N-Bahnen von Γ-Gittern. Die 4 in $\mathcal{Z}_\Lambda(\Gamma L)$ enthaltenen Gitter liegen in verschiedenen Bahnen unter N, falls 2 nicht träge ist. Sonst bildet $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, falls $I = J$ ist, M_ω auf M_{ω^2} ab, sodass die Behauptung folgt. $\square$

Wir möchten unser Augenmerk nun auf diejenigen Kleinschen Vierergruppen richten, die nicht maximal sind, um schließlich die maximal endlichen Untergruppen isomorph zu V_4 zählen zu können.
Zunächst untersuchen wir, welche V_4 in Untergruppen isomorph zu D_8 enthalten sind.

Bemerkung 4.2.10 *Diejenigen Γ-Gitter $M = I \oplus J$, auf denen $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ operiert, sind genau die Gitter mit $I = J$. In diesem Fall operiert σ auf allen Λ-Gittern in $\mathcal{Z}_\Lambda(M)$, vorausgesetzt, dass 2 nicht träge ist. Ist 2 träge in $\mathcal{O}_K$, so operiert σ auf M und $M_1 \in \mathcal{Z}_\Lambda(M)$, nicht jedoch auf M_ω und M_{ω^2}.*

Beweis: Dies rechnet man leicht nach. □

Die Matrixgruppe, die von $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, ist isomorph zu D_8. Also haben wir durch die Untersuchung der Operation von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf den Λ-Gittern einen Überblick über die Gruppen D_8, falls wir wissen, in wievielen Konjugiertenklassen von D_8 eine Konjugiertenklasse von V_4 jeweils liegen kann.

Dass es reicht, die Operation von σ zu untersuchen, um die D_8-Gitter zu bestimmen, zeigt die folgende Bemerkung.

Bemerkung 4.2.11 *Es sei $G = \langle -I_2, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\rangle \cong V_4$. Die Elemente in $N_{\mathrm{GL}_2(K)}(G)$, welche zusammen mit G eine Gruppe isomorph zu D_8 erzeugen, sind von der Form $\sigma_a := \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $a \in K^*$.*
Es sei nun L ein G-Gitter, welches eine Operation durch σ_a zulässt, also $L = L\sigma_a$. Wie zuvor ist L in einem eindeutigen Γ-Gitter $M = I \oplus J$ enthalten und erzeugt dieses als Γ-Gitter. Also hat man $L \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = I$ und $L \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = J$.
Ferner gilt

$$I = L\sigma_a \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = L \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right) = Ja^{-1}.$$

I und J müssen also notwendig in derselben Idealklasse liegen. Daher sind sie unter der Operation von $N_{\mathrm{GL}_2(K)}(G)$ als identisch anzunehmen. Dann zeigt diese Rechnung aber auch $I = a^{-1}I$ und somit $a \in \mathcal{O}_K^*$. Es ist also legitim, lediglich die Operation von $\sigma = \sigma_1$ zu untersuchen.

Definition 4.2.12 *Sei $G \leq \mathrm{GL}(L) \leq \mathrm{GL}_2(K)$ endlich. Wir vereinbaren die folgenden Bezeichnungen.*

$$C_{\mathrm{GL}(L)}(G) := \{X \in \mathrm{GL}(L) \mid Xg = gX \ \forall\ g \in G\},$$

der Zentralisator von G in $\mathrm{GL}(L)$.

$$Z_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)}(G) := \{X \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L) \mid Xg = gX \ \forall\ g \in G\},$$

die Zentralisatorordnung von G in $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$ *sowie*

$$Z_{K^{2\times 2}}(G) := \{X \in K^{2\times 2} \mid Xg = gX \ \forall\ g \in G\},$$

die Zentralisatoralgebra von G in $K^{2\times 2}$.

Bemerkung 4.2.13 *$C_{\mathrm{GL}(L)}(G)$ ist eine Untergruppe von endlichem Index in $N_{\mathrm{GL}(L)}(G)$.*
$Z_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)}(G)$ ist eine $\mathcal{O}_K$-Teilordnung von G mit Einheitengruppe $C_{\mathrm{GL}(L)}(G)$.
$Z_{K^{2\times 2}}(G)$ ist eine K-Teilalgebra von $K^{2\times 2}$.

Der Beweis des folgenden Lemmas basiert auf [BNZ73, Theorem (3.41)].

Lemma 4.2.14 *Eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu V_4 in* $\mathrm{GL}(L)$ *liegt in höchstens einer Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu D_8. Genauer treten die beiden Fälle*

$$N_{\mathrm{GL}(L)}(V_4) \cong V_4 \text{ oder } N_{\mathrm{GL}(L)}(V_4) \cong D_8$$

auf.

Beweis: Sei $G \leq \mathrm{GL}(L)$, $G \cong V_4$. Wir behaupten zunächst, dass der Zentralisator $C_{\mathrm{GL}(L)}(G)$ endlich ist. Dazu betrachten wir die Zentralisatorordnung $Z_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)}(G)$, bei der es sich um den Durchschnitt $Z_{K^{2\times 2}}(G) \cap \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$ handelt. Insbesondere ist $Z_{\mathrm{End}(L)}(G)$ also eine $\mathcal{O}_K$-Ordnung in der K-Algebra $Z_{K^{2\times 2}}(G)$. Diese Zentralisatoralgebra ist durch Operation der $\mathrm{GL}_2(K)$ konjugiert zur Zentralisatoralgebra $Z_{K^{2\times 2}}(\langle -I_2, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\rangle)$, für die man den Isomorphietyp leicht bestimmt. Es handelt sich um $K \oplus K$. Diese Algebra hat eine eindeutig bestimme $\mathcal{O}_K$-Maximalordnung, nämlich $\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$, deren Einheitengruppe endlich ist (in den vorliegenden Fällen ist es eine Gruppe isomorph zu $C_2 \times C_2$). Somit ist der Zentralisator $C_{\mathrm{GL}(L)}(G)$ eine Untergruppe dieser endlichen Gruppe und daher selbst endlich.
Man beachte nun, dass eine V_4 in einer D_8, in der sie liegt, Normalteiler ist, sodass der endliche Normalisator dieser V_4 in diesem Fall eine D_8 enthalten muss. Da über den Körpern, die wir betrachten, die D_8 aber maximal endlich ist, ist der Normalisator der V_4 gerade die D_8, in der sie enthalten ist und die Behauptung folgt. □

Korollar 4.2.15 *Es sei $G \leq \mathrm{GL}(L)$ und $G \cong D_8$. Die zwei Untergruppen von G, die isomorph zu V_4 sind, sind in* $\mathrm{GL}(L)$ *nicht zueinander konjugiert.*

Beweis: Seien U_1 und U_2 die zwei fraglichen Untergruppen. Ein U_1 auf U_2 konjugierendes Element $X \in \mathrm{GL}(L)$ mit $XU_1X^{-1} = U_2$ würde bewirken, dass $U_2 \leq X^{-1}GX$. Jedoch ist auch $U_2 \leq G$, sodass nach Lemma 4.2.14 $X^{-1}GX = G$ gilt und $X \in G$ gilt. Dies ist jedoch nicht möglich, da U_1 und U_2 in G Normalteiler sind. □

Damit können wir nun die $\mathrm{GL}(L)$-Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu D_8 zählen, indem wir die Anzahl der Bahnen von V_4-Gittern unter dem Normalisator der V_4 zählen und prüfen, welche von ihnen eine Operation einer D_8 zulassen. Indem wir diese Anzahl halbieren, erhalten wir die Anzahl der Konjugiertenklassen von D_8, da in jeder D_8 genau zwei $\mathrm{GL}(L)$-Konjugiertenklassen von V_4 liegen.

Proposition 4.2.16 *Die Anzahl von Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen in* $\mathrm{GL}(L)$*, die isomorph zu* D_8 *sind, ergibt sich in Abhängigkeit vom Zerlegungsverhalten vom 2 in* $\mathcal{O}_K$ *wie folgt.*

- 2 *träge: In diesem Fall gibt es* s_K *Konjugiertenklassen in* $\mathrm{GL}(L)$ *mit* $\mathrm{St}(L) \in \mathcal{C}\ell_K^2$.
- $2 = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2'$ *zerlegt:*
  - $\mathfrak{p}_2$ *Hauptideal:* $2s_K$ *Konjugiertenklassen in* $\mathrm{GL}(L)$ *mit* $\mathrm{St}(L) \in \mathcal{C}\ell_K^2$.
  - $\mathfrak{p}_2$ *nicht Hauptideal und* $[\mathfrak{p}_2] \notin \mathcal{C}\ell_K^2$*:* s_K *Konjugiertenklassen in* $\mathrm{GL}(L)$ *mit* $\mathrm{St}(L) \in \mathcal{C}\ell_K^2$,
s_K *Konjugiertenklassen in* $\mathrm{GL}(L)$ *mit* $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_2]\mathcal{C}\ell_K^2$.
  - $\mathfrak{p}_2$ *nicht Hauptideal und* $[\mathfrak{p}_2] \in \mathcal{C}\ell_K^2$*:* $2s_K$ *Konjugiertenklassen in* $\mathrm{GL}(L)$ *mit* $\mathrm{St}(L) \in \mathcal{C}\ell_K^2$.
- $2 = \mathfrak{p}_2^2$ *verzweigt:*
  - $\mathfrak{p}_2$ *Hauptideal: dieser Fall tritt nicht auf, da wir* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ *ausgeschlossen haben.*
  - $\mathfrak{p}_2$ *nicht Hauptideal und* $[\mathfrak{p}_2] \notin \mathcal{C}\ell_K^2$*:* $\frac{3s_K}{2}$ *Konjugiertenklassen in* $\mathrm{GL}(L)$ *mit* $\mathrm{St}(L) \in \mathcal{C}\ell_K^2$,
$\frac{s_K}{2}$ *Konjugiertenklassen in* $\mathrm{GL}(L)$ *mit* $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_2]\mathcal{C}\ell_K^2$.
  - $\mathfrak{p}_2$ *nicht Hauptideal und* $[\mathfrak{p}_2] \in \mathcal{C}\ell_K^2$*:* $2s_K$ *Konjugiertenklassen in* $\mathrm{GL}(L)$ *mit* $\mathrm{St}(L) \in \mathcal{C}\ell_K^2$.

Beweis: Wir unterscheiden die verschiedenen Fälle für das Zerlegungsverhalten von 2 unter Berücksichtigung der Bemerkung 4.2.10 und des Satzes 4.2.6.

- 2 träge: In diesem Fall lassen zwei der Gitter in jedem $\mathcal{Z}_\Lambda(M)$ eine Operation einer D_8 zu, sodass jedes Q_K-Vielfache von $\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ zwei D_8-Gitter liefert, woraus wir also $\frac{2s_K}{2} = s_K$ Konjugiertenklassen von D_8 erhalten.

- $(2) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2'$ zerlegt: Nun haben wir jeweils 4 D_8-Gitter in $\mathcal{Z}_\Lambda(M)$ für jedes geeignete M. Davon haben zwei die Steinitzklasse $\mathrm{St}(M)[\mathcal{O}_K]$, sowie jeweils eines die Klasse $\mathrm{St}(M)[\mathfrak{p}_2]$ und $\mathrm{St}(M)[\mathfrak{p}_2']$.
  Ist also $\mathfrak{p}_2$ ein Hauptideal, so haben wir $4s_K$ Bahnen freier Gitter, woraus wir $2s_K$ Konjugiertenklassen von D_8 erhalten.
  Sonst erhalten wir, falls $[\mathfrak{p}_2]$ kein Quadrat in $\mathcal{C}\ell_K$ ist, $2s_K$ Bahnen von D_8-Gittern mit Steinitzklasse $[\mathcal{O}_K]$ unter dem Normalisator der V_4 und somit s_K Konjugiertenklassen von D_8 in $\mathrm{GL}(L)$ mit $\mathrm{St}(L) \in \mathcal{C}\ell_K^2$. Bahnen von Gittern mit Steinitzklasse $[\mathfrak{p}_2]$ werden vertreten durch die Q_K-Vielfachen der Gitter M_φ mit $M = \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ sowie die Q_K-Vielfachen von $M_{\varphi'}$ mit $M = \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_2$. Dann ist nämlich $\mathrm{St}(M_{\varphi'}) = \mathrm{St}(M)[\mathfrak{p}_2'] = [\mathfrak{p}_2]^2[\mathfrak{p}_2'] = [\mathfrak{p}_2]$. Mithin haben wir also auch in $\mathrm{GL}(L)$ mit $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_2]\mathcal{C}\ell_K^2$ s_K Konjugiertenklassen von D_8.
  Ist $[\mathfrak{p}_2]$ ein Quadrat, so finden wir neben den Q_K-Vielfachen von M und M_ψ (mit $M = \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$) noch die Q_K-Vielfachen von M_φ mit $M = J \oplus J$ und $M_{\varphi'}$ mit $M = P \oplus P$ als Vertreter von $\mathcal{O}_K$-freien D_8-Gittern unter der Operation des Normalisators der V_4. Dabei seien J und P Ideale in $\mathcal{O}_K$ mit $[J]^2 = [\mathfrak{p}_2']$ und $[P]^2 = [\mathfrak{p}_2]$. Dies liefert insgesamt also $2s_K$ Konjugiertenklassen von D_8 in $\mathrm{GL}(L)$ mit $\mathrm{St}(L) \in \mathcal{C}\ell_K^2$.
  Die $\mathrm{GL}(L)$ der Gitter mit $\mathrm{St}(L) \in [\mathfrak{p}_2]\mathcal{C}\ell_K^2$ sind nach Lemma 4.1.6 zueinander konjugiert. Daher finden wir dort die gleiche Anzahl von Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu D_8.

- $(2) = \mathfrak{p}_2^2$ verzweigt: Dann ist s_K eine gerade Zahl, da $\mathcal{C}\ell_K/\mathcal{C}\ell_K^2$ das Element $[\mathfrak{p}_2]$ von Ordnung 2 enthält. In $\mathcal{Z}_\Lambda(M)$ liegen nun 3 Gitter der Klasse $\mathrm{St}(M)$ und eines von der Klasse $\mathrm{St}(M)[\mathfrak{p}_2]$.
  Sei zunächst $[\mathfrak{p}_2]$ kein Quadrat. Dann gibt es zu jedem Q_K-Vielfachen von $\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ 3 freie D_8-Gitter, sodass wir $\frac{3s_K}{2}$ Konjugiertenklassen haben. D_8-Gitter mit Steinitzklasse $[\mathfrak{p}_2]$ finden wir als Q_K-Vielfache von M_φ mit $M = \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$.
  Ist $[\mathfrak{p}_2] \in \mathcal{C}\ell_K^2$, so finden wir neben den bereits bekannten $3s_K$ Bahnen freier Gitter noch die Q_K-Vielfachen von M_φ mit $M = J \oplus J$ und $[J]^2 = [\mathfrak{p}_2]$, sodass wir hier auf eine Gesamtanzahl von $2s_K$ für die Konjugiertenklassen kommen.

□

An diesem Punkt kennen wir die Anzahlen der Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu D_{12}, D_8 und V_4. Während die ersten beiden stets maximal endliche Untergruppen sind, ist dies für die Kleinsche Vierergruppe nicht der Fall. Eine solche Untergruppe kann in Gruppen isomorph zu D_8 oder D_{12} liegen. Um die Anzahl der Konjugiertenklassen maximal endlicher Gruppen isomorph zu V_4 zu bestimmen müsste man Überlegungen darüber anstellen, in wievielen Konjugiertenklassen von D_{12} eine V_4 liegen kann und welche V_4-Gitter sowohl D_8- als auch D_{12}-Operationen zulassen. Dies scheint eine aufwendige und technische Aufgabe zu sein, was den Nutzen dieser Zählmethode fraglich erscheinen lässt und die Vorzüge des algorithmischen Zugangs aus dem vorigen Kapitel aufzeigt. Wir verfolgen den hier vorgestellten Ansatz daher an dieser Stelle nicht weiter.

5. Rechnerische Ergebnisse in Dimension 2

In diesem Abschnitt stellen wir die rechnerisch ermittelten Ergebnisse der Arbeit in Dimension 2 vor. Zunächst beschreiben wir die minimalen Klassen und maximal endlichen Untergruppen über den Körpern $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, die andere maximale Untergruppen als die übrigen imaginärquadratischen Zahlkörper liefern.

Daraufhin präsentieren wir die Daten für einige Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d > 3$. Die Ergebnisse werden allerdings mit steigender Diskriminante d_K unübersichtlich, sodass wir schließlich nur noch eine Übersichtstabelle über die Anzahlen der Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen angeben, um jeweils die Nicht-Isomorphie gewisser $\mathrm{GL}(L)$ über einem festen Körper K ausschließen zu können.

Wir nutzen für die Angabe unserer Ergebnisse den Satz 3.3.21 und die darauf folgende Bermerkung aus, aufgrund derer wir nicht immer $h_K = |\mathcal{C}\ell_K|$ verschiedene Gitter betrachten müssen, sondern uns auf $s_K = |\mathcal{C}\ell_K/\mathcal{C}\ell_K^2|$ viele Gitter beschränken können.

5.1. Laufzeit

Die folgende Tabelle enthält die Rechenzeiten, die benötigt wurden, um Vertretersysteme der minimalen Klassen auf dem freien Gitter $\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$ zu bestimmen. Die Rechnungen wurden auf einem Intel Core i7 mit 3,0 GHz und 16 GB Arbeitsspeicher durchgeführt.

Die Zahlkörper sind hier nach ihrer Diskriminante geordnet. Es scheint, dass mit dem Betrag der Diskriminante von K die für den Voronoi-Algorithmus und zur Bestimmung der minimalen Klassen benötigte Rechenzeit anwächst, ohne dass irgendeine Art von Monotonie behauptet wird.

K	d_K	Rechenzeit
$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	-3	0,490s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	-4	0,680s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	-7	0,580s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	-8	0,920s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	-1	0,810s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	-15	1,370s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$	-19	1,560s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$	-20	1,260s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$	-23	1,770s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$	-24	3,030s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-10})$	-40	3,290s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-13})$	-52	10,290s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$	-56	11,730s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$	-68	21,130s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$	-84	56,940s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-22})$	-88	14,370s
$\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$	-104	55,190s

5.2. Minimale Klassen und maximal endliche Untergruppen

5.2.1. $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

$d_K = -3$
$\mathcal{C}\ell_K \cong \{1\}$, $h_K = s_K = 1$
2 träge, $[\mathfrak{p}_2] \in \mathcal{C}\ell_K^2$
3 verzweigt, $[\mathfrak{p}_3] \in \mathcal{C}\ell_K^2$
$\mathrm{St}(L_0) = [\mathcal{O}_K]$

C	$\dim(\pi_G(C))$	$G = \mathrm{Aut}_L(C)$	maximal
$L = L_0$			
Perfektionskorang 0			
P_1	1	$C_3 \times \mathrm{SL}(2,3)$	✓
Perfektionskorang 1			
C_1	1	$C_6 \times S_3$	✓
Perfektionskorang 2			
D_1	1	$C_6 \wr C_2$	✓

5.2.2. $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$

$d_K = -4$
$\mathcal{C}\ell_K \cong \{1\}$, $h_K = s_K = 1$
2 verzweigt, $[\mathfrak{p}_2] \in \mathcal{C}\ell_K^2$
3 träge, $[\mathfrak{p}_3] \in \mathcal{C}\ell_K^2$,
$\mathrm{St}(L_0) = [\mathcal{O}_K]$

<table>
<tr><th>C</th><th>$\dim(\pi_G(C))$</th><th>$G = \mathrm{Aut}_L(C)$</th><th>maximal</th></tr>
<tr><td colspan="4">$L = L_0$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Perfektionskorang 0</td></tr>
<tr><td>P_1</td><td>1</td><td>$(\mathrm{SL}(2,3) \curlyvee C_4).C_2$</td><td>✓</td></tr>
<tr><td colspan="4">Perfektionskorang 1</td></tr>
<tr><td>C_1</td><td>1</td><td>$C_4 \times S_3$</td><td>✓</td></tr>
<tr><td colspan="4">Perfektionskorang 2</td></tr>
<tr><td>D_1</td><td>1</td><td>$(Q_8 \curlyvee C_4).C_2$</td><td>✓</td></tr>
</table>

5.2.3. $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$

$d_K = -8$
$\mathcal{C}\ell_K \cong \{1\}$, $h_K = s_K = 1$
2 verzweigt, $[\mathfrak{p}_2] \in \mathcal{C}\ell_K^2$
3 zerlegt, $[\mathfrak{p}_3] \in \mathcal{C}\ell_K^2$
$\mathrm{St}(L_0) = [\mathcal{O}_K]$

C	$\dim(\pi_G(C))$	$G = \mathrm{Aut}_L(C)$	maximal
$L = L_0$			
Perfektionskorang 0			
P_1	1	$\mathrm{GL}(2,3)$	✓
Perfektionskorang 1			
C_1	1	D_{12}	✓
C_2	1	QD_{16}	✓
Perfektionskorang 2			
D_1	1	D_8	✓

Bemerkung 5.2.1 *Bei der angegebenen Gruppe QD_{16} handelt es sich um die sogenannte Quasidiedergruppe von Ordnung 16. Diese hat die Präsentation*

$$\left\langle a, x \mid a^8, x^2, xax^{-1} = a^3 \right\rangle .$$

Sie ist isomorph zu $\Gamma\mathrm{L}(1,9)$, der vollen semilinearen Gruppe vom Grad 1 über dem Körper $\mathbb{F}_9$.

5.2.4. $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$

$d_K = -20$
$\mathcal{C}\ell_K \cong C_2$, $h_K = s_K = 2$
2 verzweigt, $[\mathfrak{p}_2] \notin \mathcal{C}\ell_K^2$
3 zerlegt, $[\mathfrak{p}_3] \notin \mathcal{C}\ell_K^2$
$\mathrm{St}(L_0) = [\mathcal{O}_K]$, $\mathrm{St}(L_1) = [\mathfrak{p}_2] = [\mathfrak{p}_3]$

C	$\dim(\pi_G(C))$	$G = \mathrm{Aut}_L(C)$	maximal
$L = L_0$			
Perfektionskorang 0			
P_1	1	C_6	$\times$
P_2	1	Q_8	$\checkmark$
Perfektionskorang 1			
C_1	1	D_{12}	$\checkmark$
C_2	2	C_2	$\times$
C_3	1	D_{12}	$\checkmark$
C_4	1	D_8	$\checkmark$
Perfektionskorang 2			
D_1	1	D_8	$\checkmark$
D_2	1	D_8	$\checkmark$
D_3	1	V_4	$\checkmark$
$L = L_1$			
Perfektionskorang 0			
P_1	1	$\mathrm{SL}(2,3)$	$\checkmark$
Perfektionskorang 1			
C_1	1	D_8	$\checkmark$
C_2	1	D_{12}	$\checkmark$
C_3	1	D_{12}	$\checkmark$
Perfektionskorang 2			
D_1	1	V_4	$\checkmark$

5.2.5. $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$

$d_K = -24$
$\mathcal{C}\ell_K \cong C_2$, $h_K = s_K = 2$
2 verzweigt, $[\mathfrak{p}_2] \notin \mathcal{C}\ell_K^2$
3 verzweigt, $[\mathfrak{p}_3] \notin \mathcal{C}\ell_K^2$
$\mathrm{St}(L_0) = [\mathcal{O}_K]$, $\mathrm{St}(L_1) = [\mathfrak{p}_2] = [\mathfrak{p}_3]$

C	$\dim(\pi_G(C))$	$G = \mathrm{Aut}_L(C)$	maximal
$L = L_0$			
Perfektionskorang 0			
P_1	1	$\mathrm{SL}(2,3)$	✓
Perfektionskorang 1			
C_1	1	D_{12}	✓
C_2	1	D_{12}	✓
C_3	1	C_4	×
C_4	1	D_8	✓
Perfektionskorang 2			
D_1	1	D_8	✓
D_2	1	D_8	✓
D_3	1	V_4	✓
$L = L_1$			
Perfektionskorang 0			
P_1	1	Q_8	✓
P_1	1	$C_3 \rtimes C_4$	✓
Perfektionskorang 1			
C_1	1	D_8	✓
C_2	2	C_4	×
C_3	1	C_4	×
C_4	1	D_{12}	✓
Perfektionskorang 2			
D_1	1	V_4	✓
D_2	1	V_4	✓

5.2.6. $\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$

$d_K = -56$
$\mathcal{C}\ell_K \cong C_4$, $h_K = 4$, $s_K = 2$
2 verzweigt, $[\mathfrak{p}_2] \in \mathcal{C}\ell_K^2$
3 zerlegt, $[\mathfrak{p}_3] \notin \mathcal{C}\ell_K^2$
$\mathrm{St}(L_0) = [\mathcal{O}_K]$, $\mathrm{St}(L_1) = [\mathfrak{p}_3]$

C	$\dim(\pi_G(C))$	$G = \mathrm{Aut}_L(C)$	maximal
$L = L_0$			
Perfektionskorang 0			
P_1	1	C_6	×
P_2	1	C_4	×
P_3	1	C_4	×
P_4	1	C_2	×
Perfektionskorang 1			
C_1	1	D_{12}	✓
C_2	2	C_2	×
C_3	2	C_2	×
C_4	1	C_2	×
C_5	1	C_2	×
C_6	1	D_{12}	✓
C_7	2	C_2	×
C_8	1	C_2	×
C_9	1	C_2	×
C_{10}	1	C_2	×
C_{11}	1	D_8	✓
C_{12}	1	D_8	✓
Perfektionskorang 2			
D_1	1	D_8	✓
D_2	3	C_2	×
D_3	3	C_2	×
D_4	1	V_4	✓
D_5	1	V_4	✓
D_6	1	C_2	×
D_7	1	C_2	×
D_8	1	D_8	✓
D_9	1	V_4	✓
D_{10}	1	V_4	✓

C	$\dim(\pi_G(C))$	$G = \mathrm{Aut}_L(C)$	maximal
$L = L_1$			
Perfektionskorang 0			
P_1	1	$\mathrm{SL}(2,3)$	✓
P_2	1	C_4	×
P_3	1	Q_8	✓
Perfektionskorang 1			
C_1	2	C_2	×
C_2	1	D_{12}	✓
C_3	2	C_4	×
C_4	1	D_{12}	✓
C_5	1	C_4	×
C_6	1	C_2	×
C_7	2	C_4	×
Perfektionskorang 2			
D_1	1	V_4	✓
D_2	1	V_4	✓
D_3	1	V_4	✓
D_4	1	V_4	✓
D_5	1	V_4	✓
D_6	1	V_4	✓

5.2.7. Übersicht

Hier geben wir eine Übersicht über die Anzahlen von Konjugiertenklassen maximal endlicher Untergruppen.

Die mit 2 und 3 bezeichneten Spalten beschreiben jeweils das Zerlegungsverhalten in $\mathcal{O}_K$, wobei r verzweigt, d zerlegt und i träge bedeutet.

	d_K	2	3	D_8	D_{12}	V_4	$\mathrm{SL}_2(3)$	Q_8	$C_3 \rtimes C_4$
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	-7	d	i						
$\mathrm{St}(L) = [\mathcal{O}_K]$				2	1	-	-	-	1
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	-15	d	r						
$\mathrm{St}(L) = [\mathcal{O}_K]$				2	2	2	-	-	-
$\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{p}_2]$				2	1	1	-	-	1
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$	-20	r	d						
$\mathrm{St}(L) = [\mathcal{O}_K]$				3	2	1	-	1	-
$\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{p}_2] = [\mathfrak{p}_3]$				1	2	1	1	-	-
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$	-24	r	r						
$\mathrm{St}(L) = [\mathcal{O}_K]$				3	2	1	1	-	-
$\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{p}_2] = [\mathfrak{p}_3]$				1	1	2	-	1	1
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$	-40	r	i						
$\mathrm{St}(L) = [\mathcal{O}_K]$				3	2	1	-	1	-
$\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{p}_2]$				1	-	3	1	-	2
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$	-56	r	d						
$\mathrm{St}(L) = [\mathcal{O}_K]$				4	2	4	-	-	-
$\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{p}_3]$				-	2	6	1	1	-
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-21})$	-84	r	r						
$\mathrm{St}(L) = [\mathcal{O}_K]$				6	4	2	-	-	2
$\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{p}_2]$				2	-	6	-	-	-
$\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{p}_3]$				-	2	6	2	-	-
$\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{p}_5]$				-	-	8	-	2	-

6. Rechnerische Ergebnisse in Dimension 3

10.10.2013: Durch Berücksichtigung der Operation der Automorphismengruppen der perfekten Formen auf den Seiten ihrer Voronoi-Bereiche lassen sich in Dimension 3 für zwei imaginärquadratische Zahlkörper Ergebnisse erzielen, die wir hier auflisten. Es handelt sich jeweils um die minimalen Klassen über dem Gitter $\mathcal{O}_K^3$.

Angaben von Gruppen in der Form (a, b) weisen auf eine Gruppe der Ordnung a mit der Nummer b in der Small Groups Library [BEO02] hin.

Die Methoden, die im zweidimensionalen Fall überprüfen, ob die vorliegenden Gruppen maximal endlich sind, sind nicht für den dreidimensionalen Fall implementiert, sodass die Ergebnisse in dieser Hinsicht unvollständig sind.

6.1. $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

$d_K = -3$
$\mathcal{C}\ell_K \cong \{1\}$, $h_K = s_K = 1$
2 träge, $[\mathfrak{p}_2] \in \mathcal{C}\ell_K^2$
3 verzweigt, $[\mathfrak{p}_3] \in \mathcal{C}\ell_K^2$
$\mathrm{St}(L_0) = [\mathcal{O}_K]$

C	$\dim(\pi_G(C))$	$G = \mathrm{Aut}_L(C)$	maximal
		$L = L_0$	
		Perfektionskorang 0	
1	1	$(1296, 2895)$	✓
2	1	$(1296, 2895)$	✓
		Perfektionskorang 1	
1	1	$C_6 \times C_6$	
2	2	$C_6 \times \mathrm{SL}_2(3)$	$\times$
		Perfektionskorang 2	
1	2	$C_6 \times C_6$	$\times$
2	1	$C_3 \times C_6 \times S_3$	
3	1	$C_6 \times C_3$	
		Perfektionskorang 3	
1	2	$C_3 \times C_6 \times S_3$	$\times$
2	2	C_{18}	$\times$
3	1	$C_6 \times C_6$	
4	1	$C_6 \times S_4$	
		Perfektionskorang 4	
1	2	$C_6 \times C_6$	$\times$
2	1	$C_6 \times D_8$	
3	1	$C_3 \times C_6 \times \mathrm{SL}_2(3)$	
		Perfektionskorang 5	
1	1	$C_6 \times S_4$	
2	1	$C_6 \times C_6 \times S_3$	
		Perfektionskorang 6	
1	1	$(1296, 2895)$	✓

6.1.1. $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$

$d_K = -4$
$\mathcal{C}\ell_K \cong \{1\}$, $h_K = s_K = 1$
2 verzweigt, $[\mathfrak{p}_2] \in \mathcal{C}\ell_K^2$
3 träge, $[\mathfrak{p}_3] \in \mathcal{C}\ell_K^2$,
$\mathrm{St}(L_0) = [\mathcal{O}_K]$

C	$\dim(\pi_G(C))$	$G = \mathrm{Aut}_L(C)$	maximal
		$L = L_0$	
		Perfektionskorang 0	
1	1	$(384, 5557)$	✓
		Perfektionskorang 1	
1	1	$C_4 \times C_4$	
		Perfektionskorang 2	
1	1	C_{12}	
2	1	$C_4 \times C_4$	
3	1	C_{12}	
		Perfektionskorang 3	
1	1	$C_4 \times S_4$	
2	1	C_{12}	
3	1	$C_4 \times C_2$	
4	1	C_{12}	
5	1	$C_4 \times C_4 \times C_2$	
		Perfektionskorang 4	
1	1	$C_4 \times D_8$	
2	1	$C_4 \times C_2$	
3	1	$C_4 \times C_4$	
4	1	$(384, 5642)$	✓
		Perfektionskorang 5	
1	1	$C_4 \times C_4 \times S_3$	
2	1	$C_4 \times S_4$	
3	1	$C_4 \times S_3$	
		Perfektionskorang 6	
1	1	$(384, 5557)$	✓
2	1	$(384, 5557)$	✓

A. Quellcode der Implementierung

Dieses Kapitel enthält den Quellcode des implementierten Algorithmus im Druck. Das Hauptprogramm trägt die Bezeichnung `minimalclasses`. Es greift auf die zwei Dateien `functions` und `datafunctions` zurück. Erstere enthält der Übsichlichtkeit halber ausgelagerte Funktionen, während letztere Funktionen enthält, die auf Daten zugreifen, die während der Laufzeit von `minimalclasses` erstellt werden. Zusätzlich ist eine Datei `initialize` enthalten, die ebenfalls aus dem Hauptprogramm ausgelagert wurde, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Zudem sind die Dateien `GVoronoi`, `testconjugacy` und `checkdata` enthalten. In der Datei `GVoronoi` liegen einige einfache Routinen für G-invariante Voronoi-Theorie, auf die in dem Programmbestandteil `testconjugacy` zurückgegriffen wird, welcher Methoden beinhaltet, um zu testen, ob zwei endliche Untergruppen maximal endlich oder zueinander konjugiert sind.

Nach dem Laden von `minimalclasses` ist eine Liste `Representatives` hinterlegt, welche Vertreter der minimalen Klassen, aufsteigend sortiert nach dem Perfektionskorang und mit den perfekten Klassen beginnend, enthält. Der Aufruf von `checkdata` mit Hilfe des `load`-Befehls von Magma gibt die Isomorphietypen der Automorphismengruppen der minimalen Klassen im Format der Small Groups Library, die Dimension des von $\pi_G(C)$ erzuegten Raums (vergleiche Satz 3.5.5) und eine Information darüber aus, ob die entsprechende Automorphismengruppe maximal endlich ist.

Zusätzlich ist nach Ablauf des Programms eine Liste `OKGENS` hinterlegt, welche ein Erzeugendensystem von $\mathrm{GL}(L)$ als Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ enthält.

Diese Algorithmen sind auch unter

`http://www.math.rwth-aachen.de/~Oliver.Braun/`

verfügbar.[1]

[1] 10.10.2013: Unter dieser Adresse ist auch der aktualisierte Quellcode zu finden, der Berechnungen in

A.1. minimalclasses

```
//Minimal classes
//Oliver Braun

//Algorithm to compute minimal classes and maximal finite subgroups

clear;

//n less or equal 3, K imaginary quadratic number field, fractional ideal arbitrary, to be chosen below
//via the variable steinitz and the numbering of the ideal classes provided by magma

n:=2;

d:=-21;
steinitz:=1;

print "*********************************************************";
print "Voronoi algorithm and minimal classes";
print "For imaginary quadratic field " cat IntegerToString(d);
print "Lattice " cat IntegerToString(steinitz);
print "*********************************************************";


load initialize;
load functions;

//Find a first perfect form

Pini:=MatrixRing(K,n)!1;
Pini[n][n]:=1/Norm(p2);
Pinie:=spurform(Pini);
Pinie2:=spurform(w*Pini);

Lini:=LatticeWithGram(Pinie);
Sini:=minvecs(Pini);
Rini:=prank(Pini);
```

Dimension 3 ermöglicht.

```
count:=1;

while Rini lt n^2 and count lt 100 do
 count:=count+1;
 dir:=findperp(Sini);

 tsup:=1000;
 tinf:=0;
 t:=(tsup+tinf)/2;

 bool:=false;
 count2:=1;

 while not bool and count2 lt 100 do

  count2:=count2+1;
  M:=1;
  Pt:=Pini+t*dir;
  while M eq 1 do
   if IsPositiveDefinite(spurform(Pt)) then
    Lt:=LatticeWithGram(spurform(Pt));
    M:=hermitianmin(Pt);
    if M eq 1 then
     tinf:=t;
     t:=(tinf+tsup)/2;
     Pt:=Pini+t*dir;
    end if;
   else
    tsup:=t;
    t:=(tinf+tsup)/2;
    Pt:=Pini+t*dir;
   end if;
  end while;

  St:=minvecs(Pt);

  tt:=Rationals()!
      Min([(idealnorm(v)-K!((v*Pini*HermitianTranspose(v))[1,1]))/(K!((v*dir*HermitianTranspose(v))[1,1])) : v in St]);
  bool:=false;
  if tt lt t and tt gt 0 then
   Pc:=Pini+tt*dir;
```

```
    Pce:=spurform(Pc);
    Lc:=LatticeWithGram(Pce);
    M:=hermitianmin(Pc);
    if M eq 1 then
     bool:=true;
    else
     tsup:=tt;
     t:=(tinf+tsup)/2;
     Pt:=Pini+t*dir;
    end if;
   else
    tsup:=t;
    t:=(tsup+tinf)/2;
    Pt:=Pini+t*dir;
   end if;
  end while;

  Pini:=Pc;
  Pinie:=spurform(Pini);

  Lini:=LatticeWithGram(Pinie);
  Sini:=minvecs(Pini);
  Rini:=prank(Pini);
end while;

if Rini ne n^2 then
 error "In FirstPerfect: the form Rini is not perfect.";
end if;

//Enumerate perfect neighbours in order to obtain a set of
    representatives
//of perfect Hermitian forms

perfectlist:=[Pini];          //List of representatives of perfect
    forms
vectlist:=[**];               //List of shortest vectors of perfect
    forms
facelist:=[**];               //List of facets of V-domains of p.
    forms; given by shortest vectors
facevectList:=[**];           //Perpendicular form to shortest
    vectors defining the respective facet
Dim2facevectList:=[**];       //
FaceFormList:=[**];           //List of forms defined by those
```

```
shortest vectors, which define the respective facet
AutList:=[**];                //List of Aut-Groups of the inverse FaceForms
Dim2FormList:=[**];           //
Dim2FaceList:=[**];           //
Dim2AutList:=[**];            //

numberoffaces:=[];            //List of number of faces of V-domains of p. forms
E:={**};                      //multiset encoding the Voronoi graph of perfect forms
Todo:=[Pini];                 //List of perfect forms to be treated with Voronoi

PerfectNeighbourList:=[**];   //List of perfect neighbours of all (mod GL) perfect forms

CriticalValueList:=[**];      //List of critical rho values (from Voronoi's algorithm)
FacetVectorList:=[**];        //List of facet vectors (from Voronoi's algorithm)

while(#Todo gt 0) do
 P:=Todo[1];
 Pe:=spurform(P);
 L:=LatticeWithGram(Pe);
 m:=hermitianmin(P);
 Sk:=minvecs(P);
 Sproj:=[projzeileNorm(v) : v in Sk];
 Append(~vectlist,Sk);

 Exclude(~Todo,Todo[1]);

 if perfrank(Sk) ne n^2 then
  error "In enumerating perfect neighbours: p-rank of potential neighbour is too small.";
 end if;

 G:=aut(P);
 G:=ChangeRing(G,Rationals());

 DonQhull:=Open("DonneePourQhull","w");
 Puts(DonQhull, IntegerToString(n^2) cat " RBOX c");
```

```
Puts(DonQhull, IntegerToString(#Sproj+1) );
Puts(DonQhull, &cat ["0 " : i in [1..n^2] ] );
for st in [ &cat [RealToString(Injec(n)) cat " " : n in Eltseq(X)]
    : X in Sproj] do
 Puts(DonQhull,st);
end for;
delete DonQhull;

//INSERT DIRECTORY OF QHULL HERE
System("/home3/castor/tmp/kirschme/qhull/bin/qhull -Fv <
    DonneePourQhull >SommetsParFace");

Faces:=[];
SomFac:=Open("SommetsParFace","r");
nbface := StringToInteger(Gets(SomFac));
for i in [1..nbface] do
 Faces:=Append(Faces, Remove([StringToInteger(n) : n in Split(Gets(
    SomFac)," ")],1));
end for;
delete SomFac;
Faces:=[ Exclude(F,0) : F in Faces | 0 in F];
Faces:=[ {n : n in F} : F in Faces];
Append(~numberoffaces,#Faces);
Append(~facelist,Faces);
FaceForms:=[];
AutFF:=[];
facevect:=[];
for F in Faces do
 FF:=Parent(Pini) ! 0;
 for k in F do
  Fk:= HermitianTranspose(Sk[k])*Sk[k];
  FF := FF+ Fk;
 end for;
 gL:=findperp2([Sk[k] : k in F]);
 if #gL eq 1 then
  Append(~facevect,gL);
 end if;
end for;
Append(~facevectList,facevect);

count:=0;

//print Faces;
```

```

PerfectNeighbours:=[**];     //List of perfect neighbours of P being treated
CriticalValues:=[**];        //List of critical rho-values of P
while(#Faces gt 0) do
 count:=count+1;
 F1:=findperp1([Sk[n] : n in Faces[1]]);
 Append(~FacetVectorList,F1);   //[??]
 Exclude(~Faces,Faces[1]);

 sgn:=Sign(&+ [Rationals()!auswerten(F1,x) : x in Sk]);
 F1:=sgn*F1;

 tsup:=10000;
 tinf:=0;
 t:=(tinf+tsup)/2;
 minimcont:=0;
 while minimcont ne 1 do
  coherent:=false;
  while not coherent do
   Pt:=P+t*F1;
   M:=1;
   while M eq 1 do
    if IsPositiveDefinite(spurform(Pt)) then
     M:=hermitianmin(Pt);
     if M eq 1 then
      tinf:=t;
      t:=(tinf+tsup)/2;
      Pt:=P+t*F1;
     end if;
    else
     tsup:=t;
     t:=(tinf+tsup)/2;
     Pt:=P+t*F1;
    end if;
   end while;
   St:=minvecs(Pt);
   SFace:=[ s : s in Sk | auswerten(F1,s) eq 0];

   Cond:=[projzeileNorm(s) : s in SFace] cat [projzeileNorm(s) : s in St];
   Uns:=Vector( #Cond , [ F!(idealnorm(v)) : v in SFace ] cat [F!(idealnorm(v)) : v in St] );
```

```
     Cond:=Transpose(Matrix(Cond));

     coherent:=IsConsistent(Cond,Uns);
     if not coherent then
      tsup:=t;
      t:=(tinf+tsup)/2;
      Pt:=P+t*F1;
     end if;
    end while;
    Pcont:=ListToSmallMatrixNorm(Solution(Cond,Uns));
    Pconte:=spurform(Pcont);
    Lcont:=LatticeWithGram(Pconte);
    //Scont:=ShortVectors(Lcont,hermitianmin(Pcont)/mmax,hermitianmin
        (Pcont)*mmax);
    Scontk:=minvecs(Pcont);

    minimcont:=hermitianmin(Pcont);

    tsup:=t;
    t:=(tinf+tsup)/2;
    Pt:=P+t*F1;
   end while;

   Append(~PerfectNeighbours,Pcont);

   //Determine critical value rho:
   C:=Pcont-P;
   I:=0; J:=0;
   for i in [1..n] do
    for j in [1..n] do
     if C[i][j] ne 0 then
      I:=i; J:=j;
      break i;
     end if;
    end for;
   end for;
   Append(~CriticalValues , sgn*(C[I][J])/(F1[I][J]) );


   iso:=false;
   for i in [1..#perfectlist] do
    if isisom(Pcont,perfectlist[i]) then
     iso:=true;
```

```
     Include(~E,<Position(perfectlist,P),i>);
    end if;
   end for;
   if not iso then
    Append(~perfectlist,Pcont);
    Append(~Todo,Pcont);
    Include(~E,<Position(perfectlist,P),Position(perfectlist,Pcont)>);
   end if;
  end while;
  Append(~PerfectNeighbourList,PerfectNeighbours);
  Append(~CriticalValueList,CriticalValues);
end while;

//Calculation of perfect forms ends here

autlist:=[#aut(p) : p in perfectlist];
//print autlist;
//Write lists in order to identify automorphism groups with GAP
if Maximum(autlist) lt 2000 then
 L1:=Open("Liste1","w");
 Puts(L1, "Liste1:=[");
 for i in [1..#perfectlist] do
  if i ne #perfectlist then
   Puts(L1, IntegerToString(IdentifyGroup(aut(perfectlist[i]))[1]) cat " , ");
  else
   Puts(L1, IntegerToString(IdentifyGroup(aut(perfectlist[i]))[1]));
  end if;
 end for;
 Puts(L1, " ];");
 delete L1;

 L2:=Open("Liste2","w");
 Puts(L2, "Liste2:=[");
 for i in [1..#perfectlist] do
  if i ne #perfectlist then
   Puts(L2, IntegerToString(IdentifyGroup(aut(perfectlist[i]))[2]) cat " , ");
  else
   Puts(L2, IntegerToString(IdentifyGroup(aut(perfectlist[i]))[2]));
  end if;
 end for;
```

```
 Puts(L2, " ];");
 delete L2;

end if;

FaceTupleList:=[**];                              //This will contain the tuples of faces of codim>1
Representatives:=[* perfectlist *];               //Representatives of all minimal classes
FaceTupleListOfRepresentatives:=[* [] *];         //We need this to check the dimension of the intersection

print "Starting the computation of minimal classes. Please be patient.";

//n=2

if n eq 2 then

 //Generate the tuples
 for i in [1..#perfectlist] do
  FaceTuples:=[**];
  S:=minvecs(perfectlist[i]);
  for j in [1..#facelist[i]] do
   for k in [j+1..#facelist[i]] do
    Intersection:=facelist[i][j] meet facelist[i][k];
    if #Intersection gt 1 then
     if #findperp2([S[l] : l in Intersection]) eq 2 then
      Append(~FaceTuples,[j,k]);
      if k gt #facelist[i] then print "Error."; end if;
     end if;
    end if;
   end for;
  end for;
  Append(~FaceTupleList,FaceTuples);
 end for;
 FaceTupleList:= [* FaceTupleList *];         //This is a bit clumsy; now FTL[1] is the data for codim 2

 //Compute corank 1 classes:

 TempList:=[**];
 for i in [1..#perfectlist] do
```

```
 for j in [1..#CriticalValueList[i]] do
  Append(~TempList , perfectlist[i]+(CriticalValueList[i][j]/2)*facevectList[i][j][1] );
 end for;
end for;

MinClassReps:=[TempList[1]];
for x in TempList do
 isi:=false;
 for y in MinClassReps do
  if AreEquivalentMinimalClasses(x,y) then
   isi:=true;
  end if;
 end for;
 if not isi then
  Append(~MinClassReps,x);
 end if;
end for;

Append(~Representatives,MinClassReps);
print "Corank 1 done.";

//Compute classes of corank >= 2

codim:=2;

while n^2-codim ge n do
 TempList:=[**];
 for i in [1..#perfectlist] do
  for j in [1..#FaceTupleList[codim-1][i]] do
   T:=MatrixRing(K,n)!perfectlist[i];
   for k in FaceTupleList[codim-1][i][j] do
    T:=T+(CriticalValueList[i][k]/(2*codim))*facevectList[i][k][1];
   end for;
   Append(~TempList,T);
  end for;
 end for;

 MinClassReps:=[TempList[1]];
 for x in TempList do
  isi:=false;
  for y in MinClassReps do
   if AreEquivalentMinimalClasses(x,y) then
```

```
      isi:=true;
     end if;
    end for;
    if not isi then
     Append(~MinClassReps,x);
    end if;
   end for;

   Append(~Representatives,MinClassReps);
   codim:=codim+1;
  end while;
end if;


//n=3

if n eq 3 then
 //Generate the tuples
 print "n=3";
 print "Starting to assemble the tuples";

 for i in [1..#perfectlist] do
  FaceTuples:=[**];
  S:=minvecs(perfectlist[i]);
  for j in [1..#facelist[i]] do
   for k in [j+1..#facelist[i]] do
    Intersection:=facelist[i][j] meet facelist[i][k];
    if #Intersection gt 1 then
     if #findperp2([S[l] : l in Intersection]) eq 2 then
      Append(~FaceTuples,[j,k]);
      if k gt #facelist[i] then print "Error."; end if;
     end if;
    end if;
   end for;
  end for;
  Append(~FaceTupleList,FaceTuples);
 end for;
 FaceTupleList:= [* FaceTupleList *];        //This is a bit clumsy;
    now FTL[1] is the data for codim 2

 codim:=3;
 print "Now I've set codim to 3. FaceTupleList has " cat
    IntegerToString(#FaceTupleList) cat " entries at present.";
```

```
print "Representatives has " cat IntegerToString(#Representatives) cat " entries at present.";
while n^2-codim ge limit do
 print "Now doing it for Codim " cat IntegerToString(codim);
 FaceTuplesInCodim:=[**];
 for i in [1..#perfectlist] do
  FaceTuples:=[**];
  S:=minvecs(perfectlist[i]);
  for j in [1..#FaceTupleList[codim-2][i]] do
   Intersection:=facelist[i][FaceTupleList[codim-2][i][j][1]];
   for l in FaceTupleList[codim-2][i][j] do
    Intersection:=facelist[i][l] meet Intersection;
   end for;
   for k in [1..#facelist[i]] do
    IntersectionTemp:=facelist[i][k] meet Intersection;
    if #IntersectionTemp gt 1 then
     if #findperp2([S[l] : l in IntersectionTemp]) eq codim then
      L:=FaceTupleList[codim-2][i][j];
      Append(~L,k);
      Append(~FaceTuples, L  );
     end if;
    end if;
   end for;
  end for;
  Append(~FaceTuplesInCodim,FaceTuples);
 end for;
 Append(~FaceTupleList,FaceTuplesInCodim);
 codim:=codim+1;
end while;
print "Tuples done. FaceTupleList has " cat IntegerToString(#FaceTupleList) cat " entries.";
//Compute corank 1 classes:
print "Starting the computation of codim 1 classes.";
TempList:=[**];
for i in [1..#perfectlist] do
 for j in [1..#CriticalValueList[i]] do
  Append(~TempList , perfectlist[i]+(CriticalValueList[i][j]/2)*facevectList[i][j][1] );
 end for;
end for;

print "TempList done. Starting equivalence testing for codim 1.";

```

```
MinClassReps:=[TempList[1]];
for x in TempList do
 isi:=false;
 for y in MinClassReps do
  if AreEquivalentMinimalClasses(x,y) then
   isi:=true;
  end if;
 end for;
 if not isi then
  Append(~MinClassReps,x);
 end if;
end for;

Append(~Representatives,MinClassReps);
print "Corank 1 done.";
//Compute classes of corank >= 2

codim:=2;

print "Starting codim" cat IntegerToString(codim) cat " computations.";

while n^2-codim ge limit do
 TempList:=[**];
 for i in [1..#perfectlist] do
  for j in [1..#FaceTupleList[codim-1][i]] do
   T:=MatrixRing(K,n)!perfectlist[i];
   for k in FaceTupleList[codim-1][i][j] do
    T:=T+(CriticalValueList[i][k]/(2*codim))*facevectList[i][k][1];
   end for;
   if not IsPositiveDefinite(spurform(T)) then print "Error, not pos.def.";end if;
   if pcorank(T) ne codim then print "Wrong pcorank at " cat IntegerToString(j); break i; codim:=n^3; end if;
   Append(~TempList,T);
  end for;
 end for;

 print "TempList for Codim " cat IntegerToString(codim) cat " done. It has " cat IntegerToString(#TempList) cat " entries. Starting equivalence testing.";

 MinClassReps:=[TempList[1]];
```

```
  counter:=1;
  for x in TempList do
   counter+:=1;
   isi:=false;
   for y in MinClassReps do
    if AreEquivalentMinimalClasses(x,y) then
     isi:=true;
    end if;
   end for;
   if not isi then
    Append(~MinClassReps,x);
   end if;
   if counter mod Floor(#TempList/5) eq 0 then
    print "Ca. #TempList/5 forms checked. Please remain patient.";
   end if;
  end for;

  Append(~Representatives,MinClassReps);
  print "Codim " cat IntegerToString(codim) cat " done.";
  codim:=codim+1;
 end while;
end if;

//Create a generating set of GL(L) as Z-matrices
X:=[];
for p in perfectlist do
 X:=X cat [MatrixRing(Integers(),2*n)!x : x in Generators(aut(p))];
end for;
for L in PerfectNeighbourList do
 for A in L do
  for p in perfectlist do
   a,b:=isisom(A,p);
   if a then
    Append(~X,MatrixRing(Integers(),2*n)!b);
   end if;
  end for;
 end for;
end for;
//"Clean up" X:
while MatrixRing(Integers(),2*n)!1 in X do
 Remove(~X,Position(X,MatrixRing(Integers(),2*n)!1));
end while;
ZGENS:=X;                  //Z-generating system
```

```
OKGENS:=matbas(X);       //OK-generating system

load mydatafunctions;
print "Data assembled.";
load testconjugacy;
```

A.2. initialize

```
K<w>:=QuadraticField(d);

if d mod 4 eq 1 then
 tau:=(1+w)/2;
else
 tau:=w;
end if;
C,f:=ClassGroup(K);
Idealvertreter:=[];
for c in C do Append(~Idealvertreter,f(c)); end for;

mmax:=Maximum([Norm(p) : p in Idealvertreter]);

if d ne -1 then
 F<sqrtd>:=QuadraticField(-d);
 Injec:=hom<F -> RealField() | Sqrt(-d)>;
else
 F:=Rationals();
 sqrtd:=1;
 Injec:=hom<F -> RealField() |>;
end if;

//Choose a suitable representative for a (the considered lattice is
   O_K^{n-1} + a) from Idealvertreter
p1:=Idealvertreter[1];
p2:=Idealvertreter[steinitz];

//Z-base for a:
if p2 eq p1 then ZB:=[1,tau]; else ZB:=Basis(p2); end if;

//Z-base for L

B:=[];
for k in [1..(n-1)] do
 v:=KMatrixSpace(K,1,n)!0;
 for i in [1..2] do
  if i eq 1 then
   v[1][k]:=K!1;
  else
   v[1][k]:=tau;
  end if;
```

```
   Append(~B,v);
  end for;
end for;

for i in [1..2] do
 v:=KMatrixSpace(K,1,n)!0;
 if i eq 1 then
  v[1][n]:=ZB[1];
 else
  v[1][n]:=ZB[2];
 end if;
 Append(~B,v);
end for;

//Determine normalized R-base of space of Hermitian forms

BasHermNorm:=[];
for i in [1..n] do
 res:=MatrixRing(K,n)!0;
 res[i][i]:=1;
 Append(~BasHermNorm,res);
 for j in [i+1..n] do
  for k in [1..2] do
   res:=MatrixRing(K,n)!0;
   if k eq 1 then
    res[i][j]:=1/2;
    res[j][i]:=1/2;
    Append(~BasHermNorm,res);
   else
    res[i][j]:=w/2;
    res[j][i]:=-w/2;
    Append(~BasHermNorm,res);
   end if;
  end for;
 end for;
end for;
```

A.3. `functions`

```
spurform:=function(A);
 res:=MatrixRing(Rationals(),2*n) ! 0;
 for i in [1..2*n] do
  for j in [1..2*n] do
   res[i][j]:=Rationals()!Trace(K!(B[i]*A*HermitianTranspose(B[j]))
       [1][1]);
  end for;
 end for;
 res:=(1/2)*res;
 return res;
end function;

auswerten:=function(A,x);
 x:=KMatrixSpace(K,1,n)!x;
 z:=K!0; N:=K!0; I:=ideal<Integers(K)|0>;
 z:=K!((x*A*HermitianTranspose(x))[1][1]);
 for i in [1..n-1] do
  I:=I+x[1][i]*p1;
 end for;
 I:=I+x[1][n]*(p1/p2);
 N:=Norm(I);
 return z/N;
end function;

kuerzen:=function(A,m,S);
 res:=[];
 for i in [1..#S] do
  x:=Vector(S[i][1]);
  xk:=KMatrixSpace(K,1,n)!0;
  for j in [1..2*n] do
   xk:=xk+x[j]*B[j];
  end for;
  if auswerten(A,xk) eq m then
   Append(~res,xk);
  end if;
 end for;
 return res;
end function;

vektorkuerzen:=function(x);
 res:=KMatrixSpace(K,1,n)!0;
```

```
  for j in [1..2*n] do
   res:=res+x[j]*B[j];
  end for;
  return res;
end function;

idealnorm:=function(x);
 N:=0;
 I:=ideal<Integers(K) | 0>;
 for i in [1..n-1] do
  I:=I+x[1][i]*(p1);
 end for;
 I:=I+x[1][n]*(p1/p2);
 N:=Norm(I);
 return N;
end function;

hermitianmin:=function(A);
 L:=LatticeWithGram(spurform(A));
 minL:=Minimum(L);
 S:=ShortVectors(L,minL/mmax,minL*mmax);
 m:=Min([auswerten(A,vektorkuerzen(s[1])) : s in S]);
 return m;
end function;

function perfrank(M);
 VV:=[];
 for m in M do s:=Matrix(m[1]);
  v:=HermitianTranspose(s)*Matrix(s);
  Append(~VV, ElementToSequence(v));
 end for;
 return Rank(Matrix(VV)) ;
end function;

function prank(M);
 L:=LatticeWithGram(spurform(M));
 m:=hermitianmin(M);
 S:=ShortVectors(L,m/mmax,m*mmax);
 Sk:=kuerzen(M,m,S);
 return perfrank(Sk);
end function;

function pcorank(M)
```

```
 return n^2-prank(M);
end function;

RemoveMultiples:=function(M);
 V:=VectorSpace(K,n);
 out:=[];
 Append(~out,M[1]);
 for m in M do;
 ismultiple:=false;
  for v in out do;
   if Vector(m) in sub<V|[Vector(v)]> then;
    ismultiple:=true;
   end if;
  end for;
  if not ismultiple then;
   Append(~out,m);
  end if;
 end for;
 return out;
end function;

minvecs:=function(A);
 L:=LatticeWithGram(spurform(A));
 m:=hermitianmin(A);
 S:=ShortVectors(L,m/mmax,m*mmax);
 Sk:=kuerzen(A,m,S);
 Sk:=RemoveMultiples(Sk);
 return Sk;
end function;

isisom:=function(M,N);
 Me:=spurform(M);
 Ne:=spurform(N);
 mul1:=Lcm([Denominator(x) : x in Eltseq(Me)]);
 mul2:=Lcm([Denominator(x) : x in Eltseq(Ne)]);
 Me:=ChangeRing(mul1*mul2*Me,Integers());
 Ne:=ChangeRing(mul1*mul2*Ne,Integers());
 LM:=LatticeWithGram(Me);
 LN:=LatticeWithGram(Ne);

 Me2:=spurform(tau*M);
 Ne2:=spurform(tau*N);

```

```
 mul1:=Lcm([Denominator(x) : x in Eltseq(Me2)]);
 mul2:=Lcm([Denominator(x) : x in Eltseq(Ne2)]);
 Me2:=ChangeRing(mul1*Me2,Integers());
 Ne2:=ChangeRing(mul2*Ne2,Integers());

 a,b:=IsIsometric(LM,[Me2],LN,[Ne2]);

 if a then
  return a,b;
 else
  return false,"No isometry";
 end if;
end function;

function projzeileNorm(v);
 p:=HermitianTranspose(v)*Matrix(v);
 liste:=[];
 for i in [1..n] do
  Append(~liste,F!(p[i][i]));
  for j in [i+1..n] do
   Append(~liste, F!(( p[i][j]+Conjugate(p[i][j]) )/2));
   Append(~liste, sqrtd*(F!((p[i][j]-Conjugate(p[i][j]))/(2*w))) );
  end for;
 end for;
 return liste;
end function;

function MatrixToLine(A);
 liste:=[];
 p:=A;
 for i in [1..n] do
  Append(~liste,F!(p[i][i]));
  for j in [i+1..n] do
   Append(~liste, F!(( p[i][j]+Conjugate(p[i][j]) )/2));
   Append(~liste, sqrtd*(F!((p[i][j]-Conjugate(p[i][j]))/(2*w))) );
  end for;
 end for;
 return liste;
end function;

function ListToSmallMatrixNorm(list);
 L:=list;
 change:=false;
```

```
 if n eq 2 then
  if not (L[1] in Rationals() and L[2] in Rationals() and L[4] in
     Rationals()) then
   change:=true;
  end if;
 end if;
 if n eq 3 then
  if not (L[1] in Rationals() and L[2] in Rationals() and L[4] in
     Rationals() and L[6] in Rationals() and L[7] in Rationals() and
      L[9] in Rationals()) then
   change:=true;
  end if;
 end if;
 if change then
  L:=sqrtd*L;
 end if;
 res:=MatrixRing(K,n)!0;
 for i in [1..n^2] do
  if L[i] in Rationals() then
   res:=res+L[i]*BasHermNorm[i];
  else
   res:=res+(K!(L[i]/sqrtd))*BasHermNorm[i];
  end if;
 end for;
 return res;
end function;

findperp2 := function(L)  //Finde senkrechte herm. Form zu
   Projektionen auf Vektoren in Liste L, Output Liste aller
   senkrechten
 Cond:=[projzeileNorm(l) : l in L];
 Cond:=Transpose(Matrix(Cond));

 if Dimension(Kernel(Cond)) eq 0 then
  error "In findperp2: kernel of projection matrix is zero-
     dimensional.";
 end if;

 dirlist:=Basis(Kernel(Cond));

 dir:=[ MatrixRing(K,n)!ListToSmallMatrixNorm(d) : d in dirlist];

 return dir;
```

```
end function;

findperp1 := function(L)  //Finde senkrechte herm. Form zu Projektionen auf Vektoren in Liste L, falls Senkrechtraum 1-dimensional
 Cond:=[projzeileNorm(l) : l in L];
 Cond:=Transpose(Matrix(Cond));

 if Dimension(Kernel(Cond)) ne 1 then
  error "In findperp1: dimension of kernel not equal to 1.";
 end if;

 dirlist:=Kernel(Cond).1;
 dir:=MatrixRing(K,n)!ListToSmallMatrixNorm(dirlist);

 return MatrixRing(K,n)!dir;
end function;

findperp := function(L)  //Finde senkrechte herm. Form zu Projektionen auf Vektoren in Liste L, Output ein senkr. Element
 Cond:=[projzeileNorm(l) : l in L];
 Cond:=Transpose(Matrix(Cond));

 if Dimension(Kernel(Cond)) eq 0 then
  error "In findperp: kernel of projection matrix is zero-dimensional.";
 end if;

 dirlist:=Kernel(Cond).1;

 dir:=MatrixRing(K,n)!ListToSmallMatrixNorm(dirlist);

 return MatrixRing(K,n)!dir;
end function;

findperpmatrix:=function(L,A)
 //Find perpendicular Hermitian matrix to those in the list
 //s.t. the result has trace 1 with A
 Cond:=[MatrixToLine(x) : x in L];
 Cond:=Transpose(Matrix(Cond));

 if Dimension(Kernel(Cond)) eq 0 then
  error "In findperpmatrix: kernel of cond matrix is zero-
```

```
        dimensional.";
  end if;

  dirlist:=Basis(Kernel(Cond));
  dir:=[MatrixRing(K,n)!ListToSmallMatrixNorm(d) : d in dirlist];
  ddir:=[x : x in dir | Trace(x*A) ne 0];
  if #ddir eq 0 then
   error "In findperpmatrix: no suitable vector found.";
  end if;
  return ddir[1];
end function;

RealToString := function(r)
    if Sign(r) eq -1 then
       str := "-";
    else
       str := "";
    end if;
    r:=Abs(r);
    p := Integers()! Floor(r) ;
    str := str cat IntegerToString(p) cat ".";
    for i := 1 to 15 do
       r:=10*(r-p);
       p := Integers()! Floor(r) ;
       str := str cat IntegerToString(p);
    end for;
return str;
end function;

aut := function(A);
 Ae:=spurform(A);
 mul:=Lcm([Denominator(x) : x in Eltseq(Ae)]);
 Ae:=ChangeRing(mul*Ae,Integers());

 Ae2:=spurform(tau*A);
 mul:=Lcm([Denominator(x) : x in Eltseq(Ae2)]);
 Ae2:=ChangeRing(mul*Ae2,Integers());

 L:=LatticeWithGram(Ae);

 G:=AutomorphismGroup(L,[Ae2]);

 return G;
```

```
end function;

matbas:=function(GG);
 //Internal method
 //Convert (2n)*(2n) matrice over Z into n*n matrices over O_K
 //Input&Output: List
 n:=NumberOfRows(GG[1]) div 2;
 MM:=[];
 for g in GG do
  M:=MatrixRing(K,n) ! 0;
   for i in [1..n-1] do
    for j in [1..n-1] do
     M[i][j]:= g[2*i-1][2*j-1] + g[2*i-1][2*j] * tau;
    end for;
    M[i][n]:= ZB[1]*g[2*i-1][2*n-1] + ZB[2]*g[2*i-1][2*n]  ;
   end for;
   for j in [1..n-1] do
    M[n][j]:= g[2*n-1][2*j-1]/ZB[1]+tau*g[2*n-1][2*j]/ZB[1];
   end for;
  M[n][n]:=g[2*n-1][2*n-1]+ZB[2]/ZB[1]*g[2*n-1][2*n];
   Append(~MM,M);
 end for;
 return MM;
end function;

RealPart:=function(x)
 return (1/2)*(x+Conjugate(x));
end function;

ImaginaryPart:=function(x)
 return (1/(2*w))*(x-Conjugate(x));
end function;

matbas2:=function(L)
 //Internal method
 //Convert n*n matrices into (2n)*(2n) matrices over Z
 //[For matrix groups]
 res:=[];
 //Define Basis matrices for p1 and p2
 BM1:=MatrixRing(K,2)![[1,0],[RealPart(tau),ImaginaryPart(tau)]];
 BM2:=MatrixRing(K,2)![[RealPart(ZB[1]),ImaginaryPart(ZB[1])] ,
       [RealPart(ZB[2]) , ImaginaryPart(ZB[2])]];
 for x in L do
```

```
  M:=KMatrixSpace(K,0,2*n)![];
  //Compute images of basis vectors under x:
  ims:=[b*x : b in B];
  for i in [1..2*n] do
   //Compute their coefficients in the Z-basis:
   v:=ims[i][1];
   coeffs:=KMatrixSpace(K,1,0)![];
   for k in [1..n-1] do
    coeffs:=HorizontalJoin(coeffs,Solution(BM1,KMatrixSpace(K,1,2)![RealPart(v[k]),ImaginaryPart(v[k])]));
   end for;
   coeffs:=HorizontalJoin(coeffs,Solution(BM2,KMatrixSpace(K,1,2)![RealPart(v[n]),ImaginaryPart(v[n])]));
   M:=VerticalJoin(M,coeffs);
  end for;
  Append(~res,MatrixRing(Integers(),2*n)!M);
 end for;
 return res;
end function;

matbas3:=function(L)
 //Internal method
 //Convert n*n matrices into (2n)*(2n) matrices over Z
 //[For arbitrary matrices]
 res:=[];
 //Define Basis matrices for p1 and p2
 BM1:=MatrixRing(K,2)![[1,0],[RealPart(tau),ImaginaryPart(tau)]];
 //BM2:=MatrixRing(K,2)![[RealPart(ZB[1]),ImaginaryPart(ZB[1])] ,
 //       [RealPart(ZB[2]) , ImaginaryPart(ZB[2])]];
 //Use the standard vector space basis instead of the Z-basis for p2
 BM2:=BM1;
 for x in L do
  M:=KMatrixSpace(K,0,2*n)![];
  //Compute images of basis vectors under x:
  ims:=[b*x : b in B];
  for i in [1..2*n] do
   //Compute their coefficients in the Z-basis:
   v:=ims[i][1];
   coeffs:=KMatrixSpace(K,1,0)![];
   for k in [1..n-1] do
    coeffs:=HorizontalJoin(coeffs,Solution(BM1,KMatrixSpace(K,1,2)![RealPart(v[k]),ImaginaryPart(v[k])]));
   end for;
```

```
   coeffs:=HorizontalJoin(coeffs,Solution(BM2,KMatrixSpace(K,1,2)![RealPart(v[n]),ImaginaryPart(v[n])]));
   M:=VerticalJoin(M,coeffs);
  end for;
  //Here: MatrixRing(Rationals(),...) [for arbitrary matrices over K]
  Append(~res,MatrixRing(Rationals(),2*n)!M);
 end for;
 return res;
end function;

ConvertGroupToNumberField:=function(G)
 //Convert Z-Group into O_K-Group
 Generators:=SetToIndexedSet(Generators(G));
 ZGENS:=[Generators[i] : i in [1..#Generators]];
 OKGENS:=matbas(ZGENS);
 OG:=sub<GL(n,K)|OKGENS>;
 return OG;
end function;

ConvertGroupToIntegers:=function(G)
 //Convert O_K-Group into Z-Group
 Generators:=SetToIndexedSet(Generators(G));
 OKGENS:=[Generators[i] : i in [1..#Generators]];
 ZGENS:=matbas2(OKGENS);
 ZG:=sub<GL(2*n,Integers())|ZGENS>;
 return ZG;
end function;

IsInGL:=function(A)
 //tests whether A is in GL(L)
 bool:=true;
 for i in [1..n-1] do
  for j in [1..n-1] do
   if not (A[i,j] in Integers(K)) then
    bool:=false;
   end if;
  end for;
  if not (A[i,n] in p2) then
   bool:=false;
  end if;
 end for;
 for j in [1..n-1] do
```

```
   if not (A[n,j]) in (ideal<Integers(K)|1>/p2) then
    bool:=false;
   end if;
  end for;
  if not A[n,n] in Integers(K) then
   bool:=false;
  end if;
  if not 1/Determinant(A) in Integers(K) then
   bool:=false;
  end if;
  return bool;
end function;

CanonicalFormOfMinimalClass:=function(F)
 //returns the canonical form T_C for the minimal class of F
 T:=MatrixRing(K,n)!0;
 M:=minvecs(F);
 for x in M do
  T:=T+HermitianTranspose(x)*x;
 end for;
 return T;
end function;

StabilizerOfMinimalClass:=function(F)
 //returns the Automorphism Group of the minimal class of F
 return ConvertGroupToNumberField(aut(CanonicalFormOfMinimalClass(F)^(-1)));
end function;

AreEquivalentMinimalClasses:=function(A,B)
 //tests whether the two classes represented by A and B are equivalent mod GL
 return isisom((CanonicalFormOfMinimalClass(A))^(-1),(CanonicalFormOfMinimalClass(B))^(-1));
end function;

// A procedure to produce all elements of given norm in an ideal P over the integers of a number field

ElementsOfNorm:=function(norm,P)
 OK:=Integers(K);
 Gram:=MatrixRing(Integers(),2)![[2,Trace(tau)],[Trace(tau),2*Norm(tau)]];
```

```
 L:=LatticeWithGram(Gram);
 S:=ShortVectors(L,2*norm,2*norm);
 output:=[s[1][1]+s[1][2]*tau: s in S];
 output:=[x: x in output | x in P];
 return output;
end function;

AllMinVecs:=function(F)
 //Computes "all" minimal vectors of a form
 S:=minvecs(F);
 output:={s: s in S};
 for v in S do
  v10:=true;
  if v[1][1] ne 0 then
   X:=[w/v[1][1]: w in ElementsOfNorm(Norm(v[1][1]),p1)];
   v10:=false;
  end if;
  if v10 then
   X:=[w/v[1][2]: w in ElementsOfNorm(Norm(v[1][2]),p2)];
  else
   X:=[x:x in X| x*v[1][2] in p2];
  end if;
  output:=output join {x*v: x in X};
 end for;
 output:=output join {-x : x in output};
 return [v: v in output];
end function;

AllMinVecsList:=function(LL)
 //Computes "all" minimal vectors from a list of vectors
 S:=LL;
 output:={s: s in S};
 for v in S do
  v10:=true;
  if v[1][1] ne 0 then
   X:=[w/v[1][1]: w in ElementsOfNorm(Norm(v[1][1]),p1)];
   v10:=false;
  end if;
  if v10 then
   X:=[w/v[1][2]: w in ElementsOfNorm(Norm(v[1][2]),p2)];
  else
   X:=[x:x in X| x*v[1][2] in p2];
  end if;
```

```
  output:=output join {x*v: x in X};
 end for;
 output:=output join {-x : x in output};
 return [v: v in output];
end function;

ReynoldsProjection:=function(G,A)
 //return the value of A under the Reynolds operator of G
 res:=MatrixRing(K,n)!0;
 for g in G do
  res:=res+g*A*HermitianTranspose(g);
 end for;
 return (1/(#G))*res;
end function;
```

A.4. datafunctions

```
//Function which serve to access and use the assembled data.

HasOneDimensionalIntersection:=function(A)
 //this function has to be in this file because it requires
    Representatives in order to be properly loaded
 //test whether the minimal class C represented by A has one-
    dimensional intersection
 //with the space of Aut(C)-invariant forms

 //This should only work for elements of the list "Representatives"
 if prank(A) eq n^2 then
  return true;
 end if;

 G:=StabilizerOfMinimalClass(A);
 P:=[**];
 for i in [1..#(Representatives[1])] do
  if minvecs(A) subset minvecs(Representatives[1][i]) then
   Append(~P,Representatives[1][i]);
  end if;
 end for;
 PG:=[**];
 for p in P do
  PGF:=MatrixRing(K,n)!0;
  for g in G do
   PGF:=PGF+g*p*HermitianTranspose(g);
  end for;
  Append(~PG,PGF);
 end for;
 PGS:=[KMatrixSpace(K,1,n^2)!ElementToSequence(p) : p in PG];

 CG:=MatrixRing(K,n)!0;
 for g in G do
  CG:=CG+g*A*HermitianTranspose(g);
 end for;
 CGS:=KMatrixSpace(K,1,n^2)!ElementToSequence(CG);

 for p in PGS do
  CGS:=VerticalJoin(CGS,p);
 end for;

```

```
 return Rank(CGS) eq 1;
end function;

DimensionOfIntersection:=function(A)
 //A needs to be in Representatives!

 if prank(A) eq n^2 then
  //A is perfect
  return 1;
 end if;

 //Determine the perfect forms above A:
 PP:=[];
 for i in [1..#Representatives[1]] do
  if minvecs(A) subset minvecs(Representatives[1][i]) then
   Append(~PP,Representatives[1][i]);
  end if;
 end for;

 //Apply the Reynolds-Operator to PP
 G:=StabilizerOfMinimalClass(A);
 PPG:=[ReynoldsProjection(G,x) : x in PP];

 PPGQ:=matbas3(PPG);

 V:=sub<KMatrixSpace(Rationals(),2*n,2*n) | PPGQ>;

 return Dimension(V);
end function;
```

A.5. GVoronoi

```
GMinimalProjections:=function(G,A)
 L:=minvecs(A);
 res:=[];
 for v in L do
  Gv:=MatrixRing(K,n)!0;
  for g in G do
   gg:=ChangeRing(g,K);
   Gv:=Gv+HermitianTranspose(v*gg)*(v*gg);
  end for;
  Append(~res,Gv);
 end for;
 rres:=[res[1]];
 for r in res do
  if not r in sub<KMatrixSpace(K,n,n)|rres> then
   Append(~rres,r);
  end if;
 end for;
 return rres;
end function;

GProjection:=function(G,v)
 res:=MatrixRing(K,n)!0;
 for g in G do
  gg:=ChangeRing(g,K);
  res:=res+HermitianTranspose(v*gg)*(v*gg);
 end for;
 return res;
end function;

Gprank:=function(G,A)
 P:=GMinimalProjections(G,A);
 P:=matbas3(P);
 return Dimension(sub<KMatrixSpace(Rationals(),2*n,2*n)|P>);
end function;
```

A.6. testconjugacy

```
load GVoronoi;

TestConjugacy:=function(F1,F2)
 //test conjugacy of automorphism groups of two minimal
 //classes (from the list REPRESENTATIVES)

 G1:=StabilizerOfMinimalClass(F1);
 G2:=StabilizerOfMinimalClass(F2);

 if not IdentifyGroup(G1) eq IdentifyGroup(G2) then
  return false;
 end if;

 L1:=[ReynoldsProjection(G1,x) : x in BasHermNorm];
 L1:=matbas3(L1);
 V:=sub<KMatrixSpace(Rationals(),2*n,2*n)|L1>;
 BG1:=Basis(V);
 BG1:=matbas(BG1);
 dim1:=Dimension(V);

 L2:=[ReynoldsProjection(G2,x) : x in BasHermNorm];
 L2:=matbas3(L2);
 V:=sub<KMatrixSpace(Rationals(),2*n,2*n)|L2>;
 BG2:=Basis(V);
 BG2:=matbas(BG2);
 dim2:=Dimension(V);

 FG1:=ReynoldsProjection(G1,F1);
 FG1:=(1/hermitianmin(FG1))*FG1;
 FG2:=ReynoldsProjection(G2,F2);
 FG2:=(1/hermitianmin(FG2))*FG2;

 if dim1 eq dim2 and dim1 eq 1 then
  if not isisom(FG1,FG2) then
   return false;
  end if;
 end if;

 if prank(FG1) eq n and prank(FG2) eq n then
  //In this case the Voronoi domain has only dead ends
  if Gprank(G1,FG1) eq dim1 and Gprank(G2,FG2) eq dim2 then
```

```
    if not isisom(FG1,FG2) then
     return false;
    end if;
   end if;
  end if;
  return "Unknown.";
end function;

IsMaximalFinite:=function(A)
 //tests maximal finiteness of Stabilizer for Representatives
 if not HasOneDimensionalIntersection(A) then
  return false;
 end if;

 G1:=StabilizerOfMinimalClass(A);
 FG:=ReynoldsProjection(G1,A);
 FG:=(1/hermitianmin(FG))*FG;
 G2:=StabilizerOfMinimalClass(FG);
 if not G1 subset G2 then
  return "Error in IsMaximalFinite: G1 is not contained in G2.";
 end if;
 if #G1 lt #G2 then
  return "G2 is a proper supergroup.";
 end if;
 if IdentifyGroup(G1) eq <2,1> then
  return false;
 end if;

 L1:=[ReynoldsProjection(G1,x) : x in BasHermNorm];
 L1:=matbas3(L1);
 V:=sub<KMatrixSpace(Rationals(),2*n,2*n)|L1>;
 BG1:=Basis(V);
 BG1:=matbas(BG1);
 dim1:=Dimension(V);

 if dim1 eq 1 then
  return true;
 end if;

 if Gprank(G1,FG) lt dim1 then
  //F not G-perfect
  return "Error in IsMaximalFinite: F is not G-perfect.";
 end if;
```

```

if prank(FG) eq n then
 //In this case F is the only G-perfect form and
 //there are no other well-rounded G-minimal classes
 return true;
end if;

if Gprank(G1,FG) ge dim1 and prank(FG) ge n then
 //In this case there may be well rounded minimal classes
 FF:=GMinimalProjections(G1,FG);
 if #FF gt 2 then
  return "Unknown.";
 end if;
 //Determine G-facets and G-facet vectors
 F1:=[FF[1]]; F2:=[FF[2]];
 perp1:=findperpmatrix(F1,FF[2]); perp2:=findperpmatrix(F2,FF[1]);
 R1:=ReynoldsProjection(G1,perp1); R2:=ReynoldsProjection(G1,perp2);
 R1:=Sign(Rationals()!(Trace(R1*FF[2])))*R1;
 R2:=Sign(Rationals()!(Trace(R2*FF[1])))*R2;
 //Check for dead ends
 dead1:=false; dead2:=false;
 L1:=[x : x in minvecs(FG) | matbas3([GProjection(G1,x)])[1] in sub<KMatrixSpace(Rationals(),2*n,2*n)|matbas3(F1)>];
 L2:=[x : x in minvecs(FG) | matbas3([GProjection(G1,x)])[1] in sub<KMatrixSpace(Rationals(),2*n,2*n)|matbas3(F1)>];
 if Dimension(sub<KMatrixSpace(K,1,n)|L1>) lt n then
  //F1 is a dead end
  dead1:=true;
  print "dead1";
  FG1:=FG+R1;
  GG1:=StabilizerOfMinimalClass(FG1);
  if #GG1 gt #G1 and G1 subset GG1 then
   return false;
  end if;
 end if;
 if Dimension(sub<KMatrixSpace(K,1,n)|L2>) lt n then
  //F2 is a dead end
  dead2:=true;
  print "dead2";
  FG2:=FG+R2;
  GG2:=StabilizerOfMinimalClass(FG2);
  if #GG2 gt #G1 and G1 subset GG2 then
```

```
      return false;
    end if;
  end if;
  if dead1 and dead2 then
    //in this case FG is the only G-perfect form but
    //there were no supergroups found in the previous steps
    return true;
  end if;

  //Now: consider the case in which at least one of the facets is
      not a dead end.
  t:=1; counter:=0;
  while not (IsPositiveDefinite(spurform(FG+t*R1)) and hermitianmin(
      FG+t*R1) eq 1) do
    t:=t/2;
    if counter gt 100 then
      return "Error, counter.";
    end if;
    counter:=counter+1;
  end while;
  print "Found something.";
  GG1:=StabilizerOfMinimalClass(FG+t*R1);
  if #GG1 gt #G1 and G1 subset GG1 then
    return false;
  end if;
  print "#GG1=" cat IntegerToString(#GG1);

  t:=1; counter:=0;
  while not (IsPositiveDefinite(spurform(FG+t*R2)) and hermitianmin(
      FG+t*R2) eq 1) do
    t:=t/2;
    if counter gt 100 then
      return "Error, counter.";
    end if;
    counter:=counter+1;
  end while;
  print "Found something 2.";
  GG2:=StabilizerOfMinimalClass(FG+t*R2);
  if #GG2 gt #G1 and G1 subset GG2 then
    return false;
  end if;
  print "#GG2=" cat IntegerToString(#GG2);
end if;
```

```

  return "Unknown.";
end function;
```

A.7. checkdata

```
load testconjugacy;

[[IdentifyGroup(StabilizerOfMinimalClass(x)) : x in Representatives[
    i]] : i in [1..#Representatives]];
[[DimensionOfIntersection(x) : x in Representatives[i]] : i in [1..#
    Representatives]];
[[*IsMaximalFinite(x) : x in Representatives[i]*] : i in [1..#
    Representatives]];
```

B. Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die Arbeit selbstständig verfasst zu haben und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Aachen, im September 2013

Literaturverzeichnis

[BEO02] Besche, H. U., Bettina Eick, and Eamonn O'Brien. „The small groups library." Available with GAP 4 (2002).

[Bra12] Oliver Braun: *Perfekte Gitter über imaginärquadratischen Zahlkörpern*, Bachelorarbeit, RWTH Aachen, 2012

[BC13] Oliver Braun, Renaud Coulangeon: *Perfect Lattices for Imaginary Quadratic Number Fields*, `arXiv:1304.0559[math.NT]`

[BCP97] Wieb Bosma, John Cannon, and Catherine Playoust: *The Magma algebra system. I. The user language.* J. Symbolic Comput., 24(3-4):235-265, 1997

[BDH96] Barber, C.B., Dobkin, D.P., and Huhdanpaa, H.T., „The Quickhull algorithm for convex hulls," ACM Trans. on Mathematical Software, 22(4):469-483, Dec 1996, http://www.qhull.org.

[Bat01] Christian Batut: *Classification of quintic eutactic forms.*, Mathematics of computation 70.233 (2001): 395-417.

[Bli17] H.F. Blichfeldt: *Finite collineation groups*, Chicago, 1917

[BNZ73] H. Brown, J. Neubüser und H. Zassenhaus, *On integral groups. III. Normalizers.* Mathematics of Computation 27.121 (1973), 167-182

[Cou01] Renaud Coulangeon: *Voronoï theory over algebraic number fields*, in *Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires*, Monogr. Enseign. Math., vol. 37, Enseignement Math., Geneva, 2001

[Cou04] Renaud Coulangeon: *Invariants d'Hermite, théorie de Voronoï et designs sphériques*, Habilitationsschrift, Universität Bordeaux, 2004

[CN13] Renaud Coulangeon, Gabriele Nebe: *Maximal finite subgroups and minimal classes*, `arXiv:1304.2597[math.NT]`

[Hum49] Pierre Humbert, *Réduction de formes quadratiques dans un corps algébrique fini*, Comment. Math. Helv. 23 (1949), 50-63

[Joh76] Charles R. Johnson: *Hadamard's inequality for matrices with positive-definite Hermitian component*, Michigan Math. J. Volume 22, Issue 3 (1976), 225-228

[Mar03] Jacques Martinet: *Perfect Lattices in Euclidean Spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 327, Springer-Verlag, 2003

[Mey08] Bertrand Meyer: *Constantes d'Hermite et théorie de Voronoï*, Dissertation, Universität Bordeaux, 2008

[Mey09] Bertrand Meyer: *Generalised Hermite constants, Voronoi theory and heights on flag varieties*, Bull. S.M.F. 137 (2009), 127-158

[Neb09] Gabriele Nebe: *p-adic Integral Group Rings*, Vortrag in St. Johns am 05. Juni 2009, Vortragsfolien verfügbar unter `http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/talks/StJohns.pdf`.

[Neu07] Jürgen Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag, 2007

[O'M00] O. Timothy O'Meara: *Introduction to Quadratic Forms*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000, Reprint of the 1973 edition

[Opg96] Jürgen Opgenorth: *Normalisatoren und Bravaismannigfaltigkeitenendlicher unimodularer Gruppen*, Dissertation, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachen, 1996

[Opg01] Jürgen Opgenorth: *Dual Cones and the Voronoi Algorithm*, Exp. Math. 10 (2001), 599-608

[OPS98] Jürgen Opgenorth, Wilhelm Plesken, Tilman Schulz: *Crystallographic algorithms and tables*, Acta Cryst. Sect. A 54:5 (1998), 517-531

[PR92] V. P. Platonov and A. S. Rapinchuk. Algebraic groups and number theory. Russian Mathematical Surveys, 47(2):133–161, 1992.

[PS97] Wilhelm Plesken, Bernd Souvignier: *Computing Isometries of Lattices*, Journal of Symbolic Computation 24 (1997), S. 327-334

[PS00] Wilhelm Plesken, Tilman Schulz: *Counting crystallographic groups in low dimensions*, Exp. Math. 9:3 (2000), 407-411

[Rei75] Irving Reiner: *Maximal Orders*, Academic Press London, 1975

[Wat00] Takao Watanabe: *On an analog of Hermite's constant.* J. Lie Theory 10.1 (2000): 33-52.

Index