

Lineare Algebra II

Beispiel affine Quadriken

Aufgabe. Es sei $q: \mathcal{A}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right) := 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 + 2x_1 + 6x_3 + 4x_4 + 4.$$

Bestimmen Sie eine affine Matrix $T \in \text{Aff}_4(\mathbb{R})$ so, dass das zu $r: \mathcal{A}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto q(TP)$ gehörige Polynom in reeller affiner Normalform ist.

Lösung. Es sei $q_h: \mathbb{R}^{5 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 + 2x_1x_5 + 6x_3x_5 + 4x_4x_5 + 4x_5^2$ und es sei

$$A := {}_e\Psi_{q_h}^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Der affine Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \\ & \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Mit $T \in \text{Aff}_4(\mathbb{R})$ definiert durch

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}^{\text{tr}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$T^{\text{tr}}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$r\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_4$$

für $x \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, d.h. das zu r gehörige Polynom ist $X_1^2 - X_2^2 + 2X_4 \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, also in reeller affiner Normalform.