Zur Frobenius-Normalform.

Sei $\mathcal{V}$ ein K -Vektorraum, $\alpha, \gamma \in \text{End}(\mathcal{V})$, $B \in \mathcal{V}^n$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und $A = {}^B\alpha^B$, $C = {}^B\gamma^B \in K^{n \times n}$ die Matrizen von α bzw. γ bezüglich der Basis B

- 1) $\mathcal{V}$ wird zu einem $K[x]$ -Modul durch $p(x)V := p(\alpha)(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$, $p(x) \in K[x]$. Diesen $K[x]$ -Modul bezeichnen wir mit $\mathcal{V}_\alpha$.
- 2) Die Abbildung $\epsilon : K[x]^{n \times 1} \rightarrow \mathcal{V}_\alpha$ vom freien $K[x]$ -Modul von Rang n auf den $K[x]$ -Modul $\mathcal{V}_\alpha$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \mapsto p_1(\alpha)(B_1) + \dots + p_n(\alpha)(B_n)$$

ist ein $K[x]$ -Modul-Epimorphismus mit

$$\text{Kern}(\epsilon) = \text{Bild}(\widetilde{xI_n - A})$$

Der Kern wird also von den Spalten der Matrix $xI_n - A \in K[x]^{n \times n}$ erzeugt. Also ist

$$\mathcal{V}_\alpha \cong K[x]^{n \times 1} / \text{Bild}(\widetilde{xI_n - A})$$

- 3) Die Endomorphismen α und γ sind konjugiert in $\text{GL}(\mathcal{V})$ genau dann wenn es ein $g \in \text{GL}(\mathcal{V})$ gibt mit $g \circ \alpha = \gamma \circ g$, genau dann wenn $\mathcal{V}_\alpha$ und $\mathcal{V}_\gamma$ als $K[x]$ -Moduln isomorph sind, also nach 2) genau dann wenn $xI_n - A$ und $xI_n - C$ dieselben Invariantenteiler haben.
- 4) Sind $p_1, \dots, p_k$ die nichttrivialen Invariantenteiler von $xI_n - A$, also $p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_k \in K[x]$, $p_1 \notin K[x]^* = K^*$, so ist A in $\text{GL}_n(K)$ konjugiert zu

$$M := \text{diag}(M_{p_1}, \dots, M_{p_k})$$

wobei M_p die Begleitmatrix von p bezeichnet. M heisst die **Frobenius-Normalform** von A .

Beweis.

- 1) ist nur eine Definition.
- 2) ϵ ist ein $K[x]$ -Modulhomomorphismus (die Multiplikation mit x auf dem freien $K[x]$ -Modul $K[x]^{n \times 1}$ überträgt sich vermöge ϵ zum Anwenden des Endomorphismus α). ϵ ist surjektiv, da die Bilder der Standardbasisvektoren von $K[x]^{n \times 1}$ (also der Einheitspalten) eine K -Basis von $\mathcal{V}$ bilden.

Zum Kern von ϵ :

Zunächst einmal liegen die Spalten von $xI_n - A$ im Kern, das braucht man sich nur klarzumachen:

Die i -te Spalte von $xI_n - A$ ist $(-A_{1i}, \dots, -A_{i-1,i}, x - A_{ii}, \dots, -A_{ni})^{tr}$ und wird unter ϵ abgebildet auf $\alpha(B_i) - \sum_{j=1}^n A_{ji}B_j = 0$.

Umgekehrt sei $V := (p_1(x), \dots, p_n(x))^{tr} \in \text{Kern}(\epsilon)$. Wir entwickeln die p_i nach Potenzen

in x und fassen ihre Koeffizienten als Vektoren in $K^{n \times 1}$ zusammen. Dadurch bekommen wir

$$V = \sum_{i=0}^d x^i V_i \text{ wobei } V_i \in K^{n \times 1}, d = \max_i(\text{Grad}(p_i)).$$

Den Vektor $x^d V_d$ können wir schreiben als

$$x^d V_d = (xI_n - A)x^{d-1} V_d + x^{d-1} A V_d$$

als Summe eines Vektors im Bild von $\widetilde{xI_n - A}$ und eines Vektors in $x^{d-1} K^{n \times 1}$. Somit können wir durch Addition von Vektoren aus dem Bild von $xI_n - A$ den maximalen Grad der Polynome $p_i(x)$ solange erniedrigen, bis dieser gleich 0 ist, und also $V = V_0 \in K^{n \times 1} \cap \text{Kern}(\epsilon) = \{0\}$.

3) Solch ein konjugierender Automorphismus $g \in \text{GL}(\mathcal{V})$ ist eine bijektive K -lineare Abbildung

$$g : \mathcal{V}_\alpha (= \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V}_\gamma (= \mathcal{V}) \text{ mit } g(p(x) \cdot_\alpha V) = g(p(\alpha)(V)) = p(\gamma)g(V) = p(x) \cdot_\gamma V$$

also ein $K[x]$ -Modul-Isomorphismus von $\mathcal{V}_\alpha$ nach $\mathcal{V}_\gamma$. Der Rest folgt aus 2) und dem Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Euklidischen Ringen.

4) $p_1 \cdots p_k = \chi_\alpha$ hat also Grad n und somit ist $M \in K^{n \times n}$. Nach 3) sind M und A konjugiert genau dann wenn $xI_n - M$ und $xI_n - A \in K[x]^{n \times n}$ dieselben Invariantenteiler haben. Dabei treten keine Invariantenteiler 0 auf, da $\det(xI_n - A) = \chi_\alpha \neq 0$. Also hat $xI_n - A$ genau $n - k$ Invariantenteiler, die Einheiten in $K[x]$ sind. Es bleibt also zu zeigen, dass die nichttrivialen (also die Nichteinheiten) Invariantenteiler von $xI_n - M$ genau $p_1, \dots, p_k$ sind. Dazu benutzen wir wieder 1) und 2): Sei also $\mu \in \text{End}(\mathcal{V})$ der Endomorphismus von $\mathcal{V}$ mit ${}^B \mu^B = M$ und betrachte den $K[x]$ -Modul $\mathcal{V}_\mu$. Die Blockdiagonalgestalt von M impliziert eine Zerlegung von $\mathcal{V}_\mu$ als eine direkte Summe μ -invarianter Teilmoduln $\mathcal{V}_\mu = \mathcal{U}_{\mu_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_{\mu_k}$, wobei jedes $\mathcal{U}_{\mu_i}$ eine Basis $X_i (\subset B)$ hat, bezüglich der $\mu_i := \mu|_{\mathcal{U}_{\mu_i}}$ die Matrix $M_{p_i} = {}^{X_i} \mu_i^{X_i}$ besitzt. Jetzt genügt es also zu zeigen, dass $\mathcal{U}_{\mu_i} \cong K[x]/(p_i(x)K[x])$ ist. Den Isomorphismus als $K[x]$ -Moduln erhält man aus

$$\varphi : K[x] \rightarrow \mathcal{U}_{\mu_i}, x \mapsto (X_i)_1$$

indem man beachtet, dass $\text{Kern}(\varphi) = p_i(x)K[x]$ ist.