Zusammenfassung: Geometrie.

Gabriele Nebe und Sebastian Thomas

Lineare Algebra II, WS 2009/10
nach dem Skript von Prof. W. Plesken

Affine Geometrie

Definition.

Ein affiner Raum ist eine Menge $\mathcal{A}$, auf der ein K-Vektorraum $\mathcal{V}$ regulär operiert. Genauer ist ein affiner Raum ein Tripel $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \tau)$ mit

$$\tau : \mathcal{V} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, (V, P) \mapsto \tau_V(P) =: P + V.$$

$\mathcal{V}$ heißt auch der Translationsraum von $\mathcal{A}$.

Jeder Punkt $P \in \mathcal{A}$ liefert also eine Bijektion $\mathcal{V} \to \mathcal{A}$, $V \mapsto P + V$.
Daher definiert man die Dimension $\operatorname{Dim} \mathcal{A} := \operatorname{Dim} \mathcal{V}$.
Der eindeutig bestimmte Vektor $V \in \mathcal{V}$ mit $\tau_V(P) = Q$ wird mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet.

Definition.

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ heißt affiner Teilraum von $\mathcal{A}$, falls $\mathcal{T}(\mathcal{B}) := \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in \mathcal{B}\}$ ein Teilraum von $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ ist.

Der affine Standardraum

Ist $\tilde{\mathcal{V}}$ ein K-Vektorraum mit $\varphi \in \tilde{\mathcal{V}}^* \setminus \{0\}$, so setzen wir

$$\mathcal{A}_\varphi(\tilde{\mathcal{V}}) := \varphi^{-1}(\{1\}).$$

Für $P \in \mathcal{A}_\varphi(\tilde{\mathcal{V}})$ und $V \in \mathcal{V} := \mathrm{Kern}(\varphi)$ ist $P + V \in \mathcal{A}_\varphi(\tilde{\mathcal{V}})$ und $(\mathcal{A}_\varphi(\tilde{\mathcal{V}}), \mathcal{V}, \tau)$ ist ein affiner Raum.
Ist $\tilde{\mathcal{V}} = K^{(n+1)\times 1}$ und $\varphi \in (K^{(n+1)\times 1})^*$ die Projektion auf die letzte Komponente, so heißt

$$\mathcal{A}_n(K) := \mathcal{A}_\varphi(K^{(n+1)\times 1}) = \{\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \mid X \in K^{n\times 1}\}$$

der n-dimensionale affine Standardraum.

Affine Abbildungen

Definition.

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ affine Räume über den K-Vektorräumen $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$. $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ heißt affine Abbildung, falls eine lineare Abbildung $\overline{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ existiert mit $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overline{f}(\overrightarrow{PQ})$ für alle $P, Q \in \mathcal{A}$. $\overline{f}$ heißt auch der lineare Anteil von f.

Bemerkung.

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ affine Räume mit Translationsvektorraum $\mathcal{V} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{V}' = \mathcal{T}(\mathcal{A}')$ und $P_0 \in \mathcal{A}$ fest gewählt.

- Jede affine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ist eindeutig festgelegt durch ihren linearen Anteil $\overline{f}$ und $f(P_0)$.
- Für jeden Punkt $Q_0 \in \mathcal{A}'$ und jede lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ gibt es genau eine affine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mit $f(P_0) = Q_0$ und $\overline{f} = \varphi$.
- Es ist f injektiv (surjektiv, bijektiv), genau dann, wenn $\overline{f}$ injektiv (surjektiv, bijektiv) ist.

Die affine Gruppe

Definition.

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) := \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \mid f \text{ affin und bijektiv}\}$$

ist bzgl. Komposition eine Gruppe, genannt die affine Gruppe von $\mathcal{A}$.

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{T}(\mathcal{A})) : f \mapsto \overline{f}$$

ist ein Epimorphismus von Gruppen mit Kern

$$\{\tau_V \mid V \in \mathfrak{T}(\mathcal{A})\} \cong \mathfrak{T}(\mathcal{A}).$$

In Matrizen.

$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}_n(K))$ kann mit der Matrixgruppe

$$\mathrm{Aff}_n(K) := \{\left(\begin{array}{c|c} A & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \mid A \in \mathrm{GL}_n(K), t \in K^{n\times 1}\} \leq \mathrm{GL}_{n+1}(K)$$

identifiziert werden. Anwenden der affinen Abbildungen übersetzt sich in Linksmultiplikation mit der entsprechenden Matrix.

Affine Unabhängigkeit

Definition.

$P \in \mathcal{A}^k$ heißt affin unabhängig, falls für jeden affinen Raum $\mathcal{A}'$ über K und jedes Tupel $Q \in (\mathcal{A}')^k$ eine affine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mit $f(P_i) = Q_i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ existiert. Ein maximal affin unabhängiges System P in $\mathcal{A}$ heißt auch affine Basis von $\mathcal{A}$.

Ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varphi(\tilde{\mathcal{V}})$ für $\varphi \in \tilde{\mathcal{V}}^* \setminus \{0\}$, so ist $P \in \mathcal{A}^k$ affin unabhängig genau dann, wenn $P \in \tilde{\mathcal{V}}^k$ linear unabhängig ist.
Ist $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}) = \mathrm{Dim}(\tilde{\mathcal{V}}) - 1 = n$, so ist P eine affine Basis von $\mathcal{A}$ genau dann, wenn $k = n + 1$, also genau dann, wenn P eine Basis von $\tilde{\mathcal{V}}$ ist.

Satz.

Ist $\mathcal{A}$ ein endlich-dimensionaler affiner Raum, so operiert $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ regulär auf der Menge der affinen Basen von $\mathcal{A}$.

Invarianten der affinen Gruppe

Punkte, Punktepaare, Tripel.

- $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ ist transitiv auf $\mathcal{A}$.
- $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ hat genau zwei Bahnen auf $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, die Menge $\mathcal{A}^2_{\text{gen}}$ der affin unabhängigen Paare und $\{(P_1, P_1) \mid P_1 \in \mathcal{A}\}$.
- $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ operiert transitiv auf der Menge $\mathcal{A}^3_{\text{gen}}$ der affin unabhängigen Tripel in $\mathcal{A}^3$ (nicht entartete Dreiecke), falls $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}) > 1$.
- Eine trennende Invariante für die Operation von $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ auf der Menge $\mathcal{A}^3_{\text{spez}} := \{P = (P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^3 \mid P_1 \neq P_2, P \text{ kollinear}\}$ ist das Teilverhältnis. Dabei ist das Teilverhältnis $\mathrm{TV}(P)$ von $P \in \mathcal{A}^3_{\text{spez}}$ definiert als das eindeutige $a \in K$ mit $\overrightarrow{P_1P_3} = a\overrightarrow{P_1P_2}$.

Klausurtypische Fragestellungen der affinen Geometrie

- Test auf affine Unabhängigkeit
- Bestimmung affiner Basen und der Dimension affiner Unterräume
- gegenseitige Lage affiner Unterräume (parallel, windschief, ...)
- Bestimmung des Schnitts affiner Unterräume
- Bestimmung affiner Abbildungen bei vorgegebenen Werten
- Berechnung von Teilverhältnissen
- Test auf Affinität bei vorgegebenen Mengen und Abbildungen
- einfache geometrische Beweise

Beispiele für Themen in der Zwischenprüfung

- Definition und Beispiel für affinen Raum
- Definition und Beispiel für affinen Teilraum
- Definition und Beispiel für affine Abbildungen
- Bahnen der affinen Gruppe
- Invarianten für Operationen der affinen Gruppe
- Definition affin unabhängig, affines Erzeugnis
- Definition und Umgang mit Koordinaten
- kleinere Beweise

Euklidische affine Geometrie

Definition.

- Ein euklidischer affiner Raum $\mathcal{E}$ ist ein endlich-dimensionaler reeller affiner Raum, dessen Translationsraum $\mathcal{V} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$ ein euklidischer Vektorraum, also mit einem positiv definiten Skalarprodukt Φ ausgestattet, ist.
- Die euklidische Metrik d auf $\mathcal{E}$ ist definiert durch

$$d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R} : (P, Q) \mapsto \sqrt{\Phi(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})} = |\overrightarrow{PQ}|.$$

- Sind $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ euklidische affine Räume, so heißt eine affine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ isometrische Einbettung, falls sie die Metriken respektiert, also

$$d(P, Q) = d'(f(P), f(Q)) \text{ für alle } P, Q \in \mathcal{E},$$

wobei d' die euklidische Metrik von $\mathcal{E}'$ ist.
Ist f noch zusätzlich surjektiv, also bijektiv, so heißt f Isometrie.
- $\mathrm{Iso}(\mathcal{E}) = \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid f \text{ Isometrie}\}$ heißt die euklidische Bewegungsgruppe von $\mathcal{E}$.

Der euklidische affine Standardraum

- $\mathcal{E}_n := \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ mit dem Standardskalarprodukt auf $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^{n\times 1}$.
- $d(\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$
- $\mathrm{Iso}(\mathcal{E}_n) \cong \mathrm{Iso}_n(\mathbb{R}) := \{\left(\begin{array}{c|c} A & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \mid A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}), t \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$

Orthonormale k-Beine.

Ein $k+1$-Tupel

$$P \in \mathcal{E}^{k+1} \text{ mit } (\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}) \text{ ONSystem in } \mathcal{T}(\mathcal{E})$$

heißt orthonormales k-Bein in $\mathcal{E}$.

- Ist $\mathrm{Dim}(\mathcal{E}) = n$, so ist $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_n$, genauer liefert jedes orthonormale n-Bein $(P_0, P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ eine Isometrie $\kappa : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_n$ durch $\kappa(P_0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\kappa(P_i) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}_i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Euklidische affine Geometrie

Satz.

- Es gibt orthonormale k-Beine in $\mathcal{E}$ genau dann, wenn $k \leq \operatorname{Dim} \mathcal{E} = n$. Jedes orthonormale k-Bein kann zu einem orthonormalen n-Bein ergänzt werden (Gram-Schmidt).
- Jeder affine Teilraum eines affinen euklidischen Raumes ist wieder ein euklidischer Raum und die natürliche Inklusion ist eine isometrische Einbettung.
- (Wittscher Fortsetzungssatz)
  Jede Isometrie von einem affinen Teilraum eines EUKLIDischen Raumes $\mathcal{E}$ auf einen anderen lässt sich zu einer Isometrie von $\mathcal{E}$ auf sich fortsetzen.
- Für $f \in \operatorname{Aff}(\mathcal{E})$ ist $f \in \operatorname{Iso}(\mathcal{E})$ genau dann, wenn $\overline{f} \in \mathrm{O}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$,
- $\operatorname{Iso}(\mathcal{E})$ operiert regulär auf der Menge der orthonormalen n-Beine in $\mathcal{E}$, wenn $n = \operatorname{Dim}(\mathcal{E})$.

Operation auf Punkten

Abstand, Teilverhältnis, Kongruenzsätze.

Eine trennende Invariante der Operation von $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$

- auf $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ ist der Abstand.
- auf $\mathcal{E}^3_{\text{spez}} = \{(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{E}^3 \mid P_1 \neq P_2, (P_1, P_2, P_3)$ kollinear$\}$ ist der Abstand und das Teilverhältnis: $d(P_1, P_2), \mathrm{TV}(P_1, P_2, P_3)$.
- auf nicht entarteten Dreiecken sind gegeben durch die Kongruenzsätze, z.B.

(SSS) $d(P_1, P_2), d(P_2, P_3), d(P_3, P_1)$ oder
(WSW) $\angle(P_1, P_2, P_3), d(P_1, P_2), \angle(P_3, P_1, P_2)$.

Operation auf Teilräumen

Operation auf Teilräumen.

$\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ operiert transitiv auf der Menge der k-dimensionalen affinen Teilräume von $\mathcal{E}$.
$\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ operiert auf der Menge

$$\mathcal{T}R(\mathcal{E}, k, \ell) := \{(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \mid \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = k, \mathrm{Dim}(\mathcal{C}) = \ell\}.$$

Eine trennende Invariante der Operation ist gegeben durch Abstand und Hauptwinkel der Translationsräume

$$\mathcal{T}R(\mathcal{E}, k, \ell) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\min(k,\ell)}, (\mathcal{B}, \mathcal{C}) \mapsto (d(\mathcal{B}, \mathcal{C}), A(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

Klausurtypische Fragestellungen der euklidischen affinen Geometrie

- Bestimmung des Abstands affiner Unterräume
- Bestimmung von orthogonalen und orthonormalen Beinen
- Bestimmung von Längen und Winkeln im Dreieck
- Test einer Abbildung auf Isometrie
- einfache geometrische Beweise

Beispiele für Themen in der Zwischenprüfung

- Definition und Beispiel euklidischer affiner Räume und Teilräume
- Definition von Isometrie
- Invarianten der Bewegungsgruppe $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$
- Kongruenzsätze
- kleinere Beweise
- Vergleich mit affiner Geometrie

Projektive Geometrie

Definition.

Sei $\tilde{\mathcal{V}} \neq \{0\}$ ein K-Vektorraum, $n+1 := \mathrm{Dim}(\tilde{\mathcal{V}})$.

- $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) := \{\langle V\rangle \mid V \in \tilde{\mathcal{V}} \setminus \{0\}\}$ heißt der projektive Raum zu $\tilde{\mathcal{V}}$.
- $\mathrm{Dim}\,\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) := n$.
- $f : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) \to \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{W}})$ heißt projektive Abbildung, falls eine injektive lineare Abbildung $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{V}} \to \tilde{\mathcal{W}}$ existiert mit

  $$f(\langle V\rangle) = \langle \tilde{f}(V)\rangle \text{ für alle } V \in \tilde{\mathcal{V}} \setminus \{0\}.$$

  Wir schreiben $f =: [\tilde{f}]$.
- Eine bijektive projektive Abbildung heißt Projektivität. Die Gruppe aller Projektivitäten von $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ auf sich wird mit $\mathrm{PGL}(\tilde{\mathcal{V}})$ bezeichnet und heißt die projektive lineare Gruppe von $\tilde{\mathcal{V}}$.
- $[\ \ ] : \mathrm{GL}(\tilde{\mathcal{V}}) \to \mathrm{PGL}(\tilde{\mathcal{V}}),\ \tilde{f} \mapsto [\tilde{f}]$ ist ein Epimorphismus von Gruppen. Es ist $[\ \ ]^{-1}(\{[\tilde{f}]\}) = \{a\tilde{f} \mid 0 \neq a \in K\}$.

Der projektive Standardraum

Die Punkte von $\mathcal{P}_n(K) := \mathcal{P}(K^{(n+1)\times 1})$ werden mit

$$(a_1 : a_2 : \ldots : a_{n+1}) := \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \rangle$$

bezeichnet. Beachte $(ka_1 : ka_2 : \ldots : ka_{n+1}) = (a_1 : a_2 : \ldots : a_{n+1})$ für alle $k \in K^*$. Die Elemente von $\mathrm{PGL}(K^{(n+1)\times 1}) =: \mathrm{PGL}_{n+1}(K)$ werden durch Matrizen aus $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ repräsentiert, welche bis auf Vielfache mit Elementen aus K^* festgelegt sind.

$\epsilon : \mathcal{A}_n(K) \to \mathcal{P}_n(K), \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto (a_1 : \ldots : a_n : 1)$ ist eine Einbettung des affinen Raums in den projektiven Raum mit

$$\mathcal{P}_n(K) = \mathrm{Bild}(\epsilon) \cup \{(a_1 : \ldots : a_n : 0) \mid (a_1 : \ldots : a_n) \in \mathcal{P}_{n-1}(K)\}$$

$\hat{\epsilon} : \ \mathrm{Aff}_n(K) \to \mathrm{PGL}_{n+1}(K), \left(\begin{array}{c|c} A & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left[\begin{array}{c|c} A & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ ist injektiv.

Projektive Koordinatensysteme und Teilräume

Definition.

Sei $\tilde{\mathcal{V}}$ ein K-Vektorraum. Eine Projektivität von $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ auf $\mathcal{P}_n(K)$ ist ein projektives Koordinatensystem von $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$.

Definition.

Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ heißt projektiver Teilraum von $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$, falls $\tilde{\mathcal{U}} := \{V \mid \langle V \rangle \in \mathcal{U}\} \cup \{0\}$ ein Teilraum von $\tilde{\mathcal{V}}$ ist. Dann ist $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{U}})$ und $\mathrm{Dim}(\mathcal{U}) = \mathrm{Dim}(\tilde{\mathcal{U}}) - 1$.
Sind $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$, so definiert man das projektive Erzeugnis

$$\langle P_0, \ldots, P_k \rangle_{\mathsf{p}} := \mathcal{P}(\langle P_0 \cup \ldots \cup P_k \rangle).$$

Dimensionsformel.

Für projektive Teilräume $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leq \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ gilt genauso wie für Teilräume von Vektorräumen die Dimensionsformel

$$\mathrm{Dim}\,\mathcal{U} + \mathrm{Dim}\,\mathcal{W} = \mathrm{Dim}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + \mathrm{Dim}\langle \mathcal{U} \cup \mathcal{W} \rangle_{\mathsf{p}}.$$

Projektive Unabhängigkeit und projektive Basen

Definition.

Ein k-Tupel $P \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})^k$ heißt projektiv unabhängig, falls es einen $(k-1)$-dimensionalen projektiven Teilraum erzeugt.
Ist $\mathrm{Dim}(\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})) = n$, so heißt ein $(n+2)$-Tupel $P \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})^{n+2}$ eine projektive Basis, wenn jedes $(n+1)$-Tupel, welches durch Weglassen eines Punktes P_i entsteht, immer projektiv unabhängig ist.

Projektive Basen.

Sei $\mathrm{Dim}(\tilde{\mathcal{V}}) = n+1$ und $P_1, \ldots P_{n+2} \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$. Äquivalent sind:

- $(P_1, \ldots, P_{n+2})$ ist eine projektive Basis von $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$.
- $P_i = \langle B_i \rangle$ für $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ für eine Basis $(B_1, \ldots, B_{n+1})$ von $\tilde{\mathcal{V}}$ und $P_{n+2} = \langle \sum_{i=1}^{n+1} a_i B_i \rangle$ mit allen $a_i \neq 0$.
- Es gibt genau ein projektives Koordinatensystem $\kappa : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) \to \mathcal{P}_n(K)$ mit $\kappa(P_i) = \langle \mathrm{e}_i \rangle$ für $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ und $\kappa(P_{n+2}) = \langle \mathrm{e}_1 + \ldots + \mathrm{e}_{n+1} \rangle$.

Invarianten der projektiven Gruppe

Satz

Sei $\operatorname{Dim} \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) = n$.

- $\operatorname{PGL}(\tilde{\mathcal{V}})$ operiert transitiv auf

$$\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})^{n+1}_{\mathsf{gen}} := \{P \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})^{n+1} \mid \langle P \rangle_{\mathsf{p}} = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})\}$$

  mit nicht-trivialem Stabilisator $\operatorname{Stab}_{\operatorname{PGL}(\tilde{\mathcal{V}})}(P)$ für jedes $P \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})^{n+1}_{\mathsf{gen}}$.
- $\operatorname{PGL}(\tilde{\mathcal{V}})$ operiert regulär auf der Menge der projektiven Basen $P \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})^{n+2}$.

Invarianten der projektiven Gruppe

Doppelverhältnis.

$\mathrm{PGL}(\tilde{\mathcal{V}})$ operiert auf $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})^4_{\mathsf{spez}} :=$

$$\{P \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})^4 \mid \langle P_1, P_2\rangle_{\mathsf{p}} = \langle P_1, P_3\rangle_{\mathsf{p}} = \langle P_2, P_3\rangle_{\mathsf{p}} = \langle P\rangle_{\mathsf{p}} \neq \{P_1\}\}$$

mit dem Doppelverhältnis DV als trennende Invariante, wobei $\mathrm{DV}(P) := \frac{a}{b}$, falls $(a : b)$ das Bild von P_4 unter der Projektivität $\langle P\rangle_{\mathsf{p}} \to \mathcal{P}(1, K)$ ist, die (P_1, P_2, P_3) auf $((1:0), (0:1), (1:1))$ abbildet.

Zusammenhang Doppelverhältnis und Teilverhältnis.

Für $P \in \mathcal{A}_1(K)^3_{\mathsf{spez}}$

$$\mathrm{TV}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{DV}((1:0), \langle P_1\rangle, \langle P_2\rangle, \langle P_3\rangle).$$

Das Dualitätsprinzip

Sei $\tilde{\mathcal{V}}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum.

- Die Annihilatorkorrespondenz $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}^{\perp} := \{f \in \tilde{\mathcal{V}}^* \mid f(W) = 0 \text{ für alle } W \in \mathcal{W}\}$ ist eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen der Menge der Teilräume von $\tilde{\mathcal{V}}$ und denen von $\tilde{\mathcal{V}}^*$, die eine entsprechende Korrespondenz für die projektiven Räume $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) \cong \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}^*)$ induziert.
-

Punkt	Hyperebene
k-dim proj. Teilraum	$(n-k-1)$-dim. proj. Teilraum
enthält	ist enthalten
Durchschnitt	projektives Erzeugnis

- Zu jedem Satz gehört ein entsprechender dualer Satz. Beispiel:
  - In jeder projektiven Ebene schneiden sich zwei verschiedene Geraden in genau einem Punkt.
  - Duale Aussage: In jeder projektiven Ebene ist das projektive Erzeugnis zweier verschiedener Punkte eine Gerade.

Der Satz von Desargues und sein dualer

Sei $\operatorname{Dim} \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) = 2$.

Satz von Desargues.

Seien $S, P, Q, R, P', Q', R' \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ sieben Punkte so, dass $\langle S, P, P' \rangle_{\mathrm{p}}$, $\langle S, Q, Q' \rangle_{\mathrm{p}}$ und $\langle S, R, R' \rangle_{\mathrm{p}}$ drei Geraden sind. Dann sind die Punkte in $\langle P, Q \rangle_{\mathrm{p}} \cap \langle P', Q' \rangle_{\mathrm{p}}$, $\langle Q, R \rangle_{\mathrm{p}} \cap \langle Q', R' \rangle_{\mathrm{p}}$ und $\langle P, R \rangle_{\mathrm{p}} \cap \langle P', R' \rangle_{\mathrm{p}}$ kollinear.

Duale Aussage.

Es seien sieben Geraden s, p, q, r, p', q', r' in $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ so gegeben, dass sich s, p, p' und s, q, q' sowie s, r, r' in jeweils einem Punkt schneiden. Dann gehen $\langle (p \cap q) \cup (p' \cap q') \rangle_{\mathrm{p}}$, $\langle (q \cap r) \cup (q' \cap r') \rangle_{\mathrm{p}}$ und $\langle (p \cap r) \cup (p' \cap r') \rangle_{\mathrm{p}}$ durch einen gemeinsamen Punkt.

Klausurtypische Fragestellungen der projektiven Geometrie

- Test auf projektive Unabhängigkeit
- Bestimmung projektiver Basen und der Dimension projektiver Unterräume
- Bestimmung des Schnitts projektiver Unterräume
- Bestimmung projektiver Abbildungen bei vorgegebenen Werten
- Berechnung von Doppelverhältnissen
- Test auf Projektivität bei vorgegebenen Mengen und Abbildungen
- einfache geometrische Beweise

Beispiele für Themen in der Zwischenprüfung

- Definition und Beispiel projektiver Raum und Teilraum
- Definition projektive Unabhängigkeit und projektive Basis
- Definition projektive Abbildung, $\mathrm{PGL}(\tilde{V})$
- Invarianten der projektiven Gruppe
- Vergleich mit affiner Geometrie
- kleinere Beweise

Projektive Quadriken

Definition.

Sei $\tilde{\mathcal{V}} \neq \{0\}$ ein K-Vektorraum. Ist $\Phi \in \mathrm{Bifo}_{\mathsf{sym}}(\tilde{\mathcal{V}})$ eine symmetrische Bilinearform, so heißt die Abbildung

$$q_\Phi : \tilde{\mathcal{V}} \to K : V \mapsto \Phi(V, V)$$

eine quadratische Form auf $\tilde{\mathcal{V}}$ und

$$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(q_\Phi) := \{\langle V \rangle \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) \mid q_\Phi(V) = 0\}$$

heißt die projektive Quadrik zu q_Φ.

Äquivalenz projektiver Quadriken.

$\mathrm{GL}(\tilde{\mathcal{V}})$ operiert auf $\mathrm{Bifo}_{\mathsf{sym}}(\tilde{\mathcal{V}})$ durch

$$(g, \Phi) \mapsto g\Phi \text{ mit } g\Phi : \tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{V}} \to K : (V, W) \mapsto \Phi(g^{-1}(V), g^{-1}(W)),$$

so dass gilt: $\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(q_{g\Phi}) = g(\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(q_\Phi))$.

Reelle projektive Quadriken

Projektive Hauptachsentransformation.

Sei $K := \mathbb{R}$. Die Bahnen von $\mathrm{GL}(\tilde{\mathcal{V}})$ auf $\mathrm{Bifo}_{\mathsf{sym}}(\tilde{\mathcal{V}})$ haben die Signatur (a_+, a_-, a_0) mit $a_+ + a_- + a_0 = \mathrm{Dim}\,\tilde{\mathcal{V}}$ als trennende Invariante. Die resultierenden Bahnen auf $\{\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(q_\Phi) \mid \Phi \in \mathrm{Bifo}_{\mathsf{sym}}(\tilde{\mathcal{V}})\}$ sind dadurch gekennzeichnet, dass a_+ und a_- noch zusätzlich vertauscht werden können.

Zweidimensionale reelle projektive Quadriken

Signatur (a_+, a_-, a_0)	Nullstellenmenge	Vertreter
$(3,0,0), (0,3,0)$	leer	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$
$(2,1,0), (1,2,0)$	Kegel	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$
$(2,0,1), (0,2,1)$	Punkt	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 + x_2^2)$
$(1,1,1)$	Geradenpaar	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 - x_2^2)$
$(1,0,2), (0,1,2)$	(Doppel-)gerade	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2)$
$(0,0,3)$	proj. Ebene	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(0)$

Dreidimensionale reelle projektive Quadriken

Signatur (a_+, a_-, a_0)	Nullstellenmenge	Vertreter
$(4,0,0), (0,4,0)$	leer	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$
$(3,1,0), (1,3,0)$	Kegel	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)$
$(2,2,0)$	Kegel	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$
$(3,0,1), (0,3,1)$	Punkt	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$
$(2,1,1), (1,2,1)$	zylindrischer Kegel	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$
$(2,0,2), (0,2,2)$	Gerade	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 + x_2^2)$
$(1,1,2)$	Ebenenpaar	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2 - x_2^2)$
$(1,0,3), (0,1,3)$	(Doppel-)Ebene	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(x_1^2)$
$(0,0,4)$	proj. Raum	$\mathrm{Null}^{\mathsf{p}}(0)$

Affine Quadriken

Polynomfunktionen.

Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über K.

- Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_n(K) : P \mapsto \begin{pmatrix} X(P) \\ 1 \end{pmatrix}$ ein affines Koordinatensystem von $\mathcal{A}$, so definiert

$$\epsilon : K[x_1, \dots, x_n] \to K^{\mathcal{A}} : x_i \mapsto X_i$$

  einen K-Algebrenhomomorphismus (Einsetzungshomomorphismus), dessen Bild $K[X_1, \dots, X_n]$ die K-Algebra der Polynomfunktionen von $\mathcal{A}$ heißt.
- $K[X_1, \dots, X_n]$ ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.
- Für $M \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ heißt

$$\mathrm{Null}^{\mathsf{a}}(M) := \{P \in \mathcal{A} \mid f(P) = 0 \text{ für alle } f \in M\}$$

  die Nullstellenmenge von M.

Affine Quadriken

Äquivalenz affiner Nullstellengebilde.

$\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ operiert auf $K[X_1, \ldots, X_n]$ durch Algebrenautomorphismen vermöge $(g, p) \mapsto p \circ g^{-1}$ Dabei gilt $\mathrm{Null}^{\mathsf{a}}(gp) = g(\mathrm{Null}^{\mathsf{a}}(p))$.

Sei $2 \cdot 1 \neq 0$ in K.

Polynome vom Grad 2.

$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n F_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2F_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n 2 f_i x_i + c \in K[x_1, \ldots, x_n]_{\leq 2}$. Dann ist

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 1) \left(\begin{array}{c|c} F & f \\ \hline f^{tr} & c \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Affine Quadriken

Operation von $\mathrm{Aff}_n(K)$ auf Polynomen von Grad 2.

$\mu : K_{\text{sym}}^{(n+1)\times(n+1)} \to K[x_1, \ldots, x_n]_{\leq 2} : M \mapsto p_M$

$$p_M(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_n, 1) M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

ist ein Vektorraumisomorphismus auf den Raum der Polynome vom Grad ≤ 2. $\mathrm{Aff}_n(K)$ operiert auf $K_{\text{sym}}^{(n+1)\times(n+1)}$ durch $(g, M) \mapsto g^{-tr} M g^{-1}$, und μ ist mit der Operation von $\mathrm{Aff}_n(K)$ vertauschbar.

Homogenisierung

Definition.

Sei $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Die Homogenisierung von p ist das eindeutige Polynom $p_{\mathsf{h}} = p_{\mathsf{h}}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, welches sich aus p dadurch ergibt, dass man jedes vorkommende Monom m durch $m x_{n+1}^{\operatorname{grad} p - \operatorname{grad} m}$ ersetzt.

Satz.

Sei $\tilde{\mathcal{V}}$ ein K-Vektorraum und $\varphi \in \tilde{\mathcal{V}}^* \setminus \{0\}$. Weiter sei $\kappa : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) \to \mathcal{P}_n(K)$ ein homogenes Koordinatensystem, welches sich auf ein affines Koordinatensystem $\mathcal{A}_\varphi(\tilde{\mathcal{V}}) \to \mathcal{A}_n(K)$ einschränkt. Für $p \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ gilt $p = p_{\mathsf{h}}(x_1, \ldots, x_n, 1)$ und daher

$$\mathrm{Null}(p_{\mathsf{h}}) \cap \mathcal{A}_\varphi(\tilde{\mathcal{V}}) = \mathrm{Null}^{\mathsf{a}}(p).$$

Klassifikation der reellen affinen Quadriken

Definition.

Eine affine Quadrik ist die Nullstellenmenge $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(p)$ für eine quadratische Polynomfunktion $p \in K^{\mathcal{A}}$.

Affine Hauptachsentransformation.

Sei $Q \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ eine affine Quadrik. Dann finden wir ein Koordinatensystem von $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ so, dass eine Gleichung von Q in diesen Koordinaten eine der folgenden ist:

$$p_{n,r,s,\epsilon,\tau} := \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 + 2\epsilon x_n + \tau \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$$

mit $r + s \leq n, 0 < r \geq s \geq 0, \epsilon \in \{0, 1\}$ mit $\epsilon = 0$ falls $r + s = n$, $\tau \in \{-1, 0, 1\}$ mit $\tau = 0$ falls $\epsilon = 1$. Mit dieser Maßgabe sind nur die folgenden Möglichkeiten bei nicht leeren Quadriken äquivalent: $p_{n,r,r,\epsilon,\tau}$ und $p_{n,r,r,\epsilon,-\tau}$. Die leeren Quadriken korrespondieren zu den Fällen $(s, \epsilon, \tau) = (0, 0, 1)$.

Dreidimensionale reelle affine Quadriken

(r, s, ϵ, τ)	Nullstellenmenge	Vertreterpolynom
$(3, 0, 0, -1)$	Ellipsoid	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$
$(2, 1, 0, 0)$	Doppelkegel	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
$(2, 1, 0, -1)$	einschaliges Hyperboloid	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$
$(2, 1, 0, 1)$	zweischaliges Hyperboloid	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1$
$(2, 0, 0, -1)$	elliptischer Zylinder	$x_1^2 + x_2^2 - 1$
$(2, 0, 1, 0)$	elliptisches Paraboloid	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$
$(1, 1, 0, -1)$	hyperbolischer Zylinder	$x_1^2 - x_2^2 - 1$
$(1, 1, 0, 0)$	sich schneidendes Ebenenpaar	$x_1^2 - x_2^2$
$(1, 1, 1, 0)$	hyperbolisches Paraboloid	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3$
$(1, 0, 0, -1)$	paralleles Ebenenpaar	$x_1^2 - 1$
$(1, 0, 1, 0)$	parabolischer Zylinder	$x_1^2 + 2x_3$

Klassifikation der reellen euklidischen Quadriken

Euklidische Hauptachsentransformation.

Sei $Q \subset \mathcal{E}_n$ eine Quadrik. Dann finden wir ein orthonormales Koordinatensystem von $\mathcal{E}_n$, so dass eine Gleichung von Q in diesen Koordinaten eine der folgenden ist:

$$p_{n,r,s,a,b,\epsilon,\tau} := \sum_{i=1}^{r} (x_i/a_i)^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} (x_i/b_i)^2 + 2\epsilon x_n + \tau \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

mit $r + s \leq n, 0 < r \geq s, \epsilon \in \{0, 1\}$ mit $\epsilon = 0$ falls $r + s = n$, $\tau \in \{-1, 0, 1\}$ mit $\tau = 0$ falls $\epsilon = 1$ und $a = (a_1, \ldots, a_r) \in (\mathbb{R}_{>0})^r, b = (b_{r+1}, \ldots, b_{r+s}) \in (\mathbb{R}_{>0})^s$ beide monoton steigend. Erzeugt die Quadrik ganz $\mathcal{E}_n$ als affinen Raum, so sind die a_i und b_i durch die Quadrik eindeutig bestimmt.

Klausurtypische Fragestellungen für Quadriken

- Bestimmung der Normalform affiner (projektiver) Quadriken und Angabe des Typs
- Bestimmung des Schnitts affiner (projektiver) Quadriken
- Bestimmung des Schnitts einer affinen (projektiven) Quadrik mit einem affinen (projektiven) Teilraum
- Bestimmung der Tangenten einer affinen (projektiven) Quadrik in einem vorgegebenen Punkt

Beispiele für Themen in der Zwischenprüfung.

- Wiedererkennen einer gegebenen Quadrik
- Skizze (affin, projektiv)
- Prinzip der Homogenisierung mit Beweis
- Operation der affinen Gruppe auf der Polynomalgebra
- Operation der projektiven Gruppe auf homogenen Polynomen
- kleinere Beweise