

Lineare Algebra II

Beweis von PLESKEN, Bemerkung 5.16

Bemerkung. Es sei $\tilde{\mathcal{V}}$ ein endlich erzeugter reeller Vektorraum und es seien q und $\tilde{q}$ quadratische Formen auf $\tilde{\mathcal{V}}$ so, dass $\text{Null}^P(q) = \text{Null}^P(\tilde{q})$ gilt. Wenn q oder $\tilde{q}$ indefinit ist, dann ist $\tilde{q} = aq$ für ein $a \in \mathbb{R}^\times$; insbesondere sind dann also q und $\tilde{q}$ beide indefinit.

Beweis. Es sei o.B.d.A. q indefinit, der andere Fall ist analog. Ferner sei $n := \dim \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$, es sei (n_+, n_-, n_0) die Signatur der Polarisation Ψ_q und es seien $I_+ := \{0, \dots, n_+ - 1\}$, $I_- := \{n_+, \dots, n_+ + n_- - 1\}$ und $I_0 := \{n_+ + n_-, \dots, n\}$. Nach Proposition (1.46) gibt es dann eine Basis $B = (B_0, \dots, B_n)$ mit

$${}_B\Psi_q^B = \begin{pmatrix} I_{n_+} & & \\ & I_{n_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $a := \tilde{q}(B_0)$. Wir wollen zeigen, dass

$${}_B\Psi_{\tilde{q}}^B = \begin{pmatrix} aI_{n_+} & & \\ & aI_{n_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Hierzu betrachten wir geeignete Elemente von $\text{Null}^P(q) = \text{Null}^P(\tilde{q})$.

Da B eine Orthogonalbasis von $\mathcal{V}$ ist, gilt zunächst

$$q\left(\sum_{i=0}^n a_i B_i\right) = \sum_{i=0}^n q(a_i B_i) = \sum_{i=0}^n a_i^2 q(B_i) = \sum_{i=0}^{n_+-1} a_i^2 - \sum_{i=n_+}^{n_++n_--1} a_i^2$$

für alle $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, n\}$. Wir zeigen nun die behauptete Gleichheit in fünf Schritten:

- (a) Als erstes haben wir $q(B_{i_+} + B_{i_-}) = 0$ und $q(B_{i_+} - B_{i_-}) = 0$ für $i_+ \in I_+$, $i_- \in I_-$, also auch

$$0 = \tilde{q}(B_{i_+} + B_{i_-}) = \tilde{q}(B_{i_+}) + 2\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{i_-}) + \tilde{q}(B_{i_-})$$

sowie analog $\tilde{q}(B_{i_+}) - 2\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{i_-}) + \tilde{q}(B_{i_-}) = 0$. Dies impliziert $\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{i_-}) = 0$ und $\tilde{q}(B_{i_-}) = -\tilde{q}(B_{i_+})$ für $i_+ \in I_+$, $i_- \in I_-$. Insbesondere folgt $\tilde{q}(B_{i_-}) = -\tilde{q}(B_0) = -a$ für $i_- \in I_-$ und damit $\tilde{q}(B_{i_+}) = -\tilde{q}(B_{n_+}) = a$ für $i_+ \in I_+$.

- (b) Für $i_0 \in I_0$ gilt $q(B_{i_0}) = 0$, also auch $\tilde{q}(B_{i_0}) = 0$.

- (c) Als nächstes haben wir $q(B_{i_+} + B_{i_-} + B_{i_0}) = 0$ und $q(B_{i_+} - B_{i_-} + B_{i_0}) = 0$ für $i_+ \in I_+$, $i_- \in I_-$ und $i_0 \in I_0$, also auch

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{q}(B_{i_+} + B_{i_-} + B_{i_0}) = \tilde{q}(B_{i_+}) + \tilde{q}(B_{i_-}) + \tilde{q}(B_{i_0}) + 2\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{i_-}) + 2\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{i_0}) + 2\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_-}, B_{i_0}) \\ &= 2(\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{i_0}) + \Psi_{\tilde{q}}(B_{i_-}, B_{i_0})) \end{aligned}$$

sowie analog $2(\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{i_0}) - \Psi_{\tilde{q}}(B_{i_-}, B_{i_0})) = 0$. Es folgt $\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{i_0}) = 0$ und $\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_-}, B_{i_0}) = 0$ für $i_+ \in I_+$, $i_- \in I_-$ und $i_0 \in I_0$.

- (d) Weiter ist $q(B_{i_+} + B_{j_+} + \sqrt{2}B_{n_+}) = 0$ für $i_+, j_+ \in I_+$ mit $i_+ \neq j_+$, also auch

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{q}(B_{i_+} + B_{j_+} + \sqrt{2}B_{n_+}) \\ &= \tilde{q}(B_{i_+}) + \tilde{q}(B_{j_+}) + 2\tilde{q}(B_{n_+}) + 2\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{j_+}) + 2\sqrt{2}\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{n_+}) + 2\sqrt{2}\Psi_{\tilde{q}}(B_{j_+}, B_{n_+}) \\ &= 2\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{j_+}) \end{aligned}$$

und damit $\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_+}, B_{j_+}) = 0$. Analog haben wir $\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_-}, B_{j_-}) = 0$ für $i_-, j_- \in I_-$ mit $i_- \neq j_-$.

(e) Schließlich gilt $q(B_{i_0} + B_{j_0}) = 0$ für $i_0, j_0 \in I_0$ mit $i_0 \neq j_0$, also auch

$$0 = \tilde{q}(B_{i_0} + B_{j_0}) = \tilde{q}(B_{i_0}) + 2\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_0}, B_{j_0}) + \tilde{q}(B_{j_0}) = 2\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_0}, B_{j_0})$$

und damit $\Psi_{\tilde{q}}(B_{i_0}, B_{j_0}) = 0$.

Insgesamt haben wir in der Tat

$${}_B\Psi_{\tilde{q}}{}^B = \begin{pmatrix} aI_{n_+} & & \\ & aI_{n_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} I_{n_+} & & \\ & I_{n_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix} = a_B\Psi_q{}^B = {}_B a\Psi_q{}^B = {}_B\Psi_{aq}{}^B,$$

also auch $\tilde{q} = aq$. Wegen $q \neq 0$ und $\text{Null}^P(q) = \text{Null}^P(\tilde{q})$ ist ferner auch $\tilde{q} \neq 0$ und damit insbesondere $a \neq 0$, d.h. $a \in \mathbb{R}^\times$. $\square$