Prof. Dr. Gabriele Nebe
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2009/10
04.03.2010

Lineare Algebra II

Klausur (1. Termin)

Aufgabe 1 (16 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{U} \leq \mathbb{F}_3^{4\times 1}$ definiert durch

$$\mathcal{U} := \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

und es sei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $\Phi\colon \mathbb{F}_3^{4\times 1} \times \mathbb{F}_3^{4\times 1} \to \mathbb{F}_3, (x, y) \mapsto x^{\mathrm{tr}} A y$ die durch A definierte symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{F}_3^{4\times 1}$.

(a) Berechnen Sie eine Basis von $\mathcal{U}^{\perp}$.

(b) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{F}_3^{4\times 1}$ bzgl. Φ.

(c) Ist Φ ausgeartet? Berechnen Sie eine Basis des Radikals $(\mathbb{F}_3^{4\times 1})^{\perp}$ bzgl. Φ.

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{F}_3^{4\times 1}/(\mathbb{F}_3^{4\times 1})^{\perp}$.

Geben Sie Ihre Ergebnisse so an, dass die Vertreter der Elemente in $\mathbb{F}_3$ in $\{-1, 0, 1\}$ sind.

Aufgabe 2 (12 Punkte)**.** Es seien Permutationen $\pi, \sigma \in \mathrm{S}_9$ gegeben durch $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 4 & 6 & 8 & 5 & 7 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 9 & 7 & 8 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Schreiben Sie π und σ in Zykelschreibweise.

(b) Berechnen Sie σ^{-1}.

(c) Berechnen Sie $\pi^5 \circ \sigma^2$.

(d) Berechnen Sie $\mathrm{sign}(\pi \circ \sigma \circ \pi)$.

(e) Geben Sie alle Elemente von S_3 mit Signum 1 an.

(f) Bestimmen Sie die Bahn von $(1, 2, 3) \in \mathrm{S}_4$ unter der Konjugationsoperation von S_4.

(g) Berechnen Sie den Stabilisator von $(1, 2, 3) \in \mathrm{S}_3$ unter der Konjugationsoperation von S_3.

Geben Sie alle Ergebnisse in Zykelschreibweise an.

Aufgabe 3 (7 Punkte)**.** Es sei G eine Gruppe und $x \in G$. Zeigen Sie, dass $C := \{g \in G \mid gx = xg\}$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 4 (16 Punkte)**.** Es seien $P_i, Q_j \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, definiert durch

$$\begin{aligned} &P_1 := (1 : 2 : -2 : 1 : 0), && P_2 := (0 : -1 : -3 : 2 : 1), && P_3 := (1 : 1 : -5 : 4 : -1), \\ &P_4 := (-1 : 3 : -1 : 1 : 3), && P_5 := (-1 : 1 : 11 : -8 : -1), && \\ &Q_1 := (2 : 7 : 5 : -4 : -3), && Q_2 := (4 : 11 : 1 : -2 : -3), && Q_3 := (0 : 0 : 0 : 2 : 4), \\ &Q_4 := (0 : 0 : 0 : 3 : 2), && && \end{aligned}$$

und es seien $\mathcal{U} := \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle_{\mathrm{p}}$ und $\mathcal{W} := \langle Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \rangle_{\mathrm{p}}$ projektive Unterräume von $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

(a) Berechnen Sie das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$.

(b) Bestimmen Sie eine projektive Basis von $\mathcal{U}$. Welche Dimension hat $\mathcal{U}$?

(c) Bestimmen Sie eine projektive Basis von $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.

Aufgabe 5 (7 Punkte)**.** Es seien K ein Körper und $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über K und es seien Punkte $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ genau dann gilt, wenn $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ ist.

Aufgabe 6 (22 Punkte)**.** Es sei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Smith-Normalform von $X\mathrm{I}_4 - A$.

(b) Bestimmen Sie die Frobenius-Normalform von A.

(c) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

(d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

Geben Sie Ihre Ergebnisse so an, dass die Vertreter der Elemente in $\mathbb{F}_3$ in $\{-1, 0, 1\}$ sind.

Aufgabe 7 (12 Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie ein Vertretersystem der Ähnlichkeitsklassen derjenigen Matrizen in $\mathbb{C}^{7\times 7}$, deren charakteristisches Polynom gleich $(X-3)^3(X+3)^2(X-1)(X+1)$ ist und deren Minimalpolynom Grad 6 hat.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphietypen abelscher Gruppen von Ordnung 100.

Aufgabe 8 (8 Punkte)**.** Es seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass $R \otimes_R M \cong M$ ist.