

Lineare Algebra II Probeklausur

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{U} \leq \mathbb{F}_5^{4 \times 1}$ definiert durch

$$\mathcal{U} := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und es sei $A \in \mathbb{F}_5^{4 \times 4}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $\Phi: \mathbb{F}_5^{4 \times 1} \times \mathbb{F}_5^{4 \times 1} \rightarrow \mathbb{F}_5, (x, y) \mapsto x^{\text{tr}} A y$ die durch A definierte symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{F}_5^{4 \times 1}$.

- Berechnen Sie eine Basis von $\mathcal{U}^\perp$.
- Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{F}_5^{4 \times 1}$ bzgl. Φ .
- Berechnen Sie eine Basis des Radikals $(\mathbb{F}_5^{4 \times 1})^\perp$ bzgl. Φ .

Geben Sie Ihre Ergebnisse so an, dass die Vertreter der Elemente in $\mathbb{F}_5$ in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ sind.

Aufgabe 2. Es sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und es sei $\Phi: \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto \text{Spur}(X^{\text{tr}} A Y)$.

- Zeigen Sie, dass Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist.
- Bestimmen Sie die Signatur von Φ .

Aufgabe 3. Es seien Permutationen $\pi, \sigma \in S_9$ gegeben durch $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 9 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ und $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 9 & 4 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

- Schreiben Sie π und σ in Zykelschreibweise.
- Berechnen Sie π^{-1} .
- Berechnen Sie $\pi \circ \sigma$ und π^3 .
- Berechnen Sie $\text{sign}(\pi^2 \circ \sigma^2)$.
- Bestimmen Sie die Bahn von $(1, 2)(3, 4)$ unter der Konjugationsoperation auf S_5 .
- Berechnen Sie den Stabilisator von $(2, 3)$ unter der Konjugationsoperation auf S_4 .

Geben Sie alle Ergebnisse in Zykelschreibweise an.

Aufgabe 4. Es sei G eine Gruppe und X eine Menge, auf der G via $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$ operiert. Ferner sei ein Element $x \in X$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\text{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 5. Wir betrachten den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}[X]_{\text{Grad} \leq 3}$ als euklidischen Vektorraum, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\Phi: \mathbb{R}[X]_{\text{Grad} \leq 3} \times \mathbb{R}[X]_{\text{Grad} \leq 3} \rightarrow \mathbb{R}, (p, q) \mapsto \int_{-1}^1 p(x)q(x) \, dx.$$

Es sei $\mathcal{A} := \{p \in \mathbb{R}[X]_{\text{Grad} \leq 3} \mid p(0) = 1\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein euklidischer affiner Raum ist. Bestimmen Sie $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ und die Operation von $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ auf $\mathcal{A}$.
- (b) Bestimmen Sie eine affine Basis des affinen Unterraums

$$\mathcal{U} := \langle 4X^3 + X^2 + 1, 2X^3 + 2X^2 + 1, X^3 + X^2 + 1, 5X^3 + 2X^2 + 1 \rangle_{\mathcal{A}}$$

von $\mathcal{A}$.

- (c) Bestimmen Sie den Abstand von $\mathcal{U}$ aus (b) und $\mathcal{W} := \langle 8X^3 - 5X + 1, 5X^3 + X^2 - 5X + 1 \rangle_{\mathcal{A}}$.

Aufgabe 6. Es seien $P_i, Q_j \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, definiert durch

$$\begin{aligned} P_1 &:= (1 : 2 : -1 : -2 : 1), & P_2 &:= (-1 : 2 : -1 : 3 : 2), & P_3 &:= (-1 : 10 : -5 : 5 : 8), \\ P_4 &:= (1 : 6 : -3 : -1 : 4), & P_5 &:= (0 : 4 : -1 : 2 : 3), & P_6 &:= (2 : 0 : 0 : -5 : 0), \\ Q_1 &:= (-1 : 4 : 0 : 6 : 1), & Q_2 &:= (2 : 4 : 1 : 0 : 1), & Q_3 &:= (-4 : 4 : -1 : 7 : 1), \\ Q_4 &:= (-3 : 0 : -1 : -4 : 0), \end{aligned}$$

und es seien $\mathcal{U} := \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \rangle_{\mathbb{P}}$ und $\mathcal{W} := \langle Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \rangle_{\mathbb{P}}$ projektive Unterräume von $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

- (a) Berechnen Sie das Doppelverhältnis

$$DV(P_1, P_2, P_3, P_4).$$

- (b) Bestimmen Sie eine projektive Basis von $\mathcal{U}$. Welche Dimension hat $\mathcal{U}$?
- (c) Bestimmen Sie $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.

Aufgabe 7. Es sei K ein Körper mit $2 \neq 0$ in K und es sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über K mit $\dim \mathcal{A} = 2$. Ferner seien Punkte $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} = \langle A, B, C, D \rangle$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ gegeben. Zeigen Sie, dass sich die Verbindungsgeraden $\langle A, D \rangle_{\mathcal{A}}$ und $\langle B, C \rangle_{\mathcal{A}}$ in einem Punkt M mit $TV(A, D, M) = \frac{1}{2}$ schneiden.

Aufgabe 8. Es sei $p \in \mathbb{R}[X]$ gegeben durch $p := X_1^2 + X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3 + X_3^2 + X_1$. Bestimmen Sie die euklidische affine Normalform von p .

Aufgabe 9. Es sei $A \in \mathbb{F}_7^{5 \times 5}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Smith-Normalform von $XI_5 - A$.
- (b) Bestimmen Sie die Frobenius-Normalform von A .
- (c) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A .
- (d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A .

Geben Sie Ihre Ergebnisse so an, dass die Vertreter der Elemente in $\mathbb{F}_7$ in $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ sind.

Aufgabe 10.

- (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X - 1)^3(X + 2)^2$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordan-Normalformen von A (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke) und geben Sie in allen Fällen die zugehörige Frobenius-Normalform, das Minimalpolynom sowie die Dimensionen aller Eigenräume von A an.
- (b) Bestimmen Sie alle Isomorphietypen abelscher Gruppen von Ordnung 432.

Aufgabe 11. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}^{3 \times 1}$ mit

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 &\equiv 1 \pmod{2\mathbb{Z}}, \\ -2x_1 - 8x_2 + 6x_3 &\equiv -1 \pmod{4\mathbb{Z}}, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 &\equiv 0 \pmod{4\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 12. Zeigen Sie: Es ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Hinweis: Konstruieren Sie eine geeignete bilineare Abbildung $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und verwenden Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts.