Prof. Dr. Gabriele Nebe
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2009/10

Lineare Algebra II

Übungen

Aufgabe 1 (Orthogonalität)**.** Es seien $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leq \mathbb{F}_5^{4\times 1}$ definiert durch

$$\mathcal{U} := \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \text{ und } \mathcal{W} := \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Ferner sei $A \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und es sei $\Phi\colon \mathbb{F}_5^{4\times 1} \times \mathbb{F}_5^{4\times 1} \to \mathbb{F}_5, (x, y) \mapsto x^{\mathrm{tr}} A y$ die durch A definierte symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{F}_5^{4\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die Orthogonalräume $\mathcal{U}^\perp$ und $(\mathcal{U} + \mathcal{W})^\perp$.

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp$ und $\mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp$.

(c) Bestimmen Sie $(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \cap (\mathcal{U} + \mathcal{W})^\perp$ und $(\mathcal{U} + \mathcal{W}) + (\mathcal{U} + \mathcal{W})^\perp$.

(d) Bestimmen Sie das Radikal $(\mathbb{F}_5^{4\times 1})^\perp$ und zeigen Sie, dass Φ ausgeartet ist.

Aufgabe 2 (Gram-Matrix)**.** Es sei K ein Körper, $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, $B = (B_1, B_2, B_3)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und Φ eine Bilinearform auf $\mathcal{V}$ mit Gram-Matrix

$${}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} -15 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei

$$B' := (B_1 + B_3, 2B_1 - 7B_2 + 4B_3, -3B_2 + B_3).$$

(a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von $\mathcal{V}$ ist.

(b) Berechnen Sie ${}_{B'}\Phi^{B'}$.

(c) Ist Φ nicht-ausgeartet?

(d) Gibt es eine Basis B'' von $\mathcal{V}$ mit

$${}_{B''}\Phi^{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & -12 \\ 0 & -12 & -9 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 3 (bilineare und lineare Abbildungen)**.** Es seien K ein Körper und $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{W}$ Vektorräume über K. Zeigen Sie:

(a) Jede bilineare Abbildung $\beta\colon \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}$ induziert lineare Abbildungen $\beta_1\colon \mathcal{V}_1 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_2, \mathcal{W}), V_1 \mapsto \beta(V_1, -)$ und $\beta_2\colon \mathcal{V}_2 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_1, \mathcal{W}), V_2 \mapsto \beta(-, V_2)$.

(b) Es ist

$$\mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_1, \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_2, \mathcal{W})) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_2, \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_1, \mathcal{W})).$$

Aufgabe 4 (nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform)**.** Es sei K ein Körper, $\mathcal{V}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und Φ eine nicht-ausgeartete (schief-)symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$. Zeigen Sie: Für jeden Untervektorraum $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ ist

$$\mathcal{V}/\mathcal{U}^{\perp} \to \mathcal{U}^*, V + \mathcal{U}^{\perp} \mapsto \Phi(-, V)|_{\mathcal{U}}$$

ein (wohldefinierter) K-Vektorraumisomorphismus.

Aufgabe 5 (Normalformen für alternierende und symmetrische Matrizen)**.**

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ mit $T^{\mathrm{tr}}AT$ in alternierender Normalform.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & -10 & -15 \\ 4 & 8 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ mit $T^{\mathrm{tr}}AT$ in reeller symmetrischer Normalform und eine invertierbare Matrix $U \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ mit $U^{\mathrm{tr}}AU$ in komplexer symmetrischer Normalform.

Aufgabe 6 (Sylvesterscher Trägheitssatz)**.** Es sei $\mathcal{V}$ ein reeller Vektorraum, $B = (B_1, \ldots, B_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$.

(a) Zeigen Sie: Bezeichnet n_+ die Anzahl der positiven Eigenwerte von ${}_B\Phi^B$ inklusive Vielfachheiten, n_- die Anzahl der negativen Eigenwerte inklusive Vielfachheiten und n_0 die Vielfachheit des Eigenwerts 0, so ist (n_+, n_-, n_0) die Signatur von Φ.

Hinweis: Spektralsatz.

(b) Nun sei $n = 5$ und es gelte

$${}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Signatur von Φ.

Aufgabe 7 (homogene Polynome)**.** Es sei K ein Körper. Bestimmen Sie $\operatorname{Dim} K[X_1, \ldots, X_n]_{m,\mathrm{hom}}$ für $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8 (Bilinearformen, quadratische Formen, Matrizen und homogene Polynome)**.** Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum und $B = (B_1, \ldots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$.

(a) Bestimmen Sie einen K-Vektorraumisomorphismus

$$K^{n\times n} \to K[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]_{(1,1),\mathrm{hom}}.$$

Geben Sie das Inverse an.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Bifo}(\mathcal{V}) \to K[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]_{(1,1),\mathrm{hom}}, \Phi \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi(B_i, B_j) X_i Y_j$$

ein K-Vektorraumisomorphismus ist. Geben Sie das Inverse an.

Nun sei $2 \neq 0$ in K.

(c) Bestimmen Sie einen Unterraum $\mathcal{U} \leq K^{n\times n}$ und einen K-Vektorraumisomorphismus

$$\mathcal{U} \to K[X_1,\ldots,X_n]_{2,\mathrm{hom}}.$$

Geben Sie das Inverse an.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Qu}(\mathcal{V}) \to K[X_1,\ldots,X_n]_{2,\mathrm{hom}}, q \mapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Psi_q(B_i,B_j)X_iX_j$$

ein K-Vektorraumisomorphismus ist. Geben Sie das Inverse an.

Aufgabe 9 (Permutationen)**.** Es seien $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4 \in \mathrm{S}_9$ definiert durch

$$\pi_1 := \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&4&5&6&7&8&9&2&1\end{smallmatrix}\right), \pi_2 := \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&1&4&3&5&7&6&9&8\end{smallmatrix}\right), \pi_3 := (1,2,8,6)(3,9,4)(5,7), \pi_4 := (1,4)(6,7,8).$$

(a) Geben Sie die Zykeldarstellung von π_1 und π_2 sowie die klassische Darstellung von π_3 und π_4 an.

(b) Berechnen Sie $\pi_1\pi_2$, $\pi_3\pi_4$, π_3^{-1} und $\pi_4\pi_3\pi_4^{-1}$.

(c) Berechnen Sie $\operatorname{sign}\pi_2$, $\operatorname{sign}\pi_3$, $\operatorname{sign}(\pi_2\pi_3)$ und $\operatorname{sign}((\pi_3\pi_2)^{-1})$.

(d) Zeigen Sie, dass $\{1,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$ eine Untergruppe von S_4 ist.

Aufgabe 10 (Konjugation in der symmetrischen Gruppe)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $\pi \in \mathrm{S}_n$ ist die Abbildung ${}^{\pi}(-)\colon \mathrm{S}_n \to \mathrm{S}_n, \sigma \mapsto {}^{\pi}\sigma := \pi\sigma\pi^{-1}$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus. Man nennt ${}^{\pi}(-)$ die *Konjugation* von π auf S_n.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi \in \mathrm{S}_n$ eine Permutation. Zeigen Sie, dass ${}^{\pi}(-)$ Zykel auf Zykel abbildet und dabei die Zykellänge erhält. Geben Sie eine Formel für ${}^{\pi}\zeta$ für einen beliebigen Zykel $\zeta \in \mathrm{S}_n$ an.

(c) Bestimmen Sie die Bahnen von $(1,2,3,4)$ und $(1,2)(3,4)$ unter der Konjugationsoperation auf S_4.

(d) Bestimmen Sie den Stabilisator von $(4,5)$ unter der Konjugationsoperation auf S_5.

Aufgabe 11 (lineare Operationen)**.**

(a) Zeigen Sie, dass die volle lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ linear auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, (T,A) \mapsto (T^{-1})^{\mathrm{tr}} A T^{-1}$$

operiert und dass diese Operation auf $\mathbb{R}^{2\times 2}_{\mathrm{sym}}$ und $\mathbb{R}^{2\times 2}_{\mathrm{schief}}$ einschränkt.

(b) Es sei $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ beliebig und es seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der von T und den jeweiligen Operationen aus (a) induzierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^{2\times 2}_{\mathrm{sym}} \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{\mathrm{sym}}$ und $\mathbb{R}^{2\times 2}_{\mathrm{schief}} \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{\mathrm{schief}}$ bzgl. geeigneter Basen.

Zusatzaufgabe 12 (Invarianten der diagonalen Operation)**.** Es seien G eine Gruppe und X, Y und Z Mengen. Ferner seien $G \times X \to X, (g,x) \mapsto gx$ eine transitive Operation, $G \times Y \to Y, (g,y) \mapsto gy$ eine Operation und $f\colon X \times Y \to Z$ eine Invariante der diagonalen Operation von G auf $X \times Y$. Zeigen Sie: Für alle $x_0 \in X$ ist $\tilde{f}\colon Y \to Z, y \mapsto f(x_0,y)$ eine Invariante der eingeschränkten Operation von $\mathrm{Stab}_G(x_0)$ auf Y, die genau dann trennend ist, wenn f trennend ist.

Aufgabe 13 (diagonale Operation und affine Geometrie)**.** Es seien K ein Körper und $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Die volle lineare Gruppe $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ operiert auf dem Dualraum $\mathcal{V}^*$ linear und treu durch

$$\mathrm{GL}(\mathcal{V}) \times \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}^*, (\alpha,\lambda) \mapsto (\alpha^{-1})^{\mathrm{tr}}(\lambda)$$

und die Einschränkung dieser Operation auf die Menge $\mathcal{V}^* \setminus \{0\}$ liefert eine transitive Operation.

(b) Der Stabilisator jedes $\lambda \in \mathcal{V}^* \setminus \{0\}$ unter der Operation aus (a) operiert transitiv auf jeder Faser von $a \in K \setminus \{0\}$ unter λ.

(c) Die volle lineare Gruppe $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ operiert auf $\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}$ durch

$$\mathrm{GL}(\mathcal{V}) \times (\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}) \to \mathcal{V}^* \times \mathcal{V}, (\alpha, (\lambda, V)) \mapsto ((\alpha^{-1})^{\mathrm{tr}}(\lambda), \alpha(V))$$

und

$$(\mathcal{V}^* \setminus \{0\}) \times (\mathcal{V} \setminus \{0\}) \to K, (\lambda, V) \mapsto \lambda(V)$$

ist eine trennende Invariante der eingeschränkten Operation.

Aufgabe 14 (affine Unterräume)**.** Es seien $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ und $\mathcal{U}_3$ affine Unterräume von $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$\mathcal{U}_1 := \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}}, \quad \mathcal{U}_2 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}},$$
$$\mathcal{U}_3 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}}.$$

(a) Bestimmen Sie affine Basen und die Dimensionen von $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ und $\mathcal{U}_3$.

(b) Ermitteln Sie die Lage der Unterräume zueinander: Welche sind zueinander windschief oder (schwach) parallel? Welche haben Schnitte und was sind diese Schnitte?

Aufgabe 15 (affine Abbildungen)**.** Es sei K ein Körper und es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ affine Räume über K.

(a) Es sei $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine affine Abbildung. Zeigen Sie: Für alle $P \in \mathcal{A}$, $V \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ gilt $f(P+V) = f(P)+\overline{f}(V)$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $P \in \mathcal{A}$, alle $Q \in \mathcal{B}$ und alle linearen Abbildungen $\varphi\colon \mathcal{T}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}(\mathcal{B})$ gibt es genau eine affine Abbildung $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mit $f(P) = Q$ und $\overline{f} = \varphi$.

(c) Es seien $P_i \in \mathcal{A}$ und $Q_i \in \mathcal{B}$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$ gegeben und es gelte $\mathcal{A} = \langle P_0, \ldots, P_n \rangle_{\mathrm{a}}$. Zeigen Sie, dass es höchstens eine affine Abbildung $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mit $f(P_i) = Q_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ gibt.

Aufgabe 16 (affine Abbildungen)**.** Es seien $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{A}_3(\mathbb{F}_7)$ gegeben durch

$$P_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es seien $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{F}_7)$ gegeben durch

$$Q_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f\colon \mathcal{A}_3(\mathbb{F}_7) \to \mathcal{A}_2(\mathbb{F}_7)$ mit $f(P_0) = Q_0$, $f(P_1) = Q_1$, $f(P_2) = Q_2$ und $f(P_3) = Q_3$.

(b) Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f\colon \mathcal{A}_2(\mathbb{F}_7) \to \mathcal{A}_3(\mathbb{F}_7)$ mit $f(Q_0) = P_0$, $f(Q_1) = P_1$, $f(Q_2) = P_2$ und $f(Q_3) = P_3$.

(c) Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f\colon \mathcal{A}_3(\mathbb{F}_7) \to \mathcal{A}_2(\mathbb{F}_7)$ mit $f(P_1) = Q_0$, $f(P_2) = Q_1$, $f(P_3) = Q_2$ und $f(P_4) = Q_3$.

(d) Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f\colon \mathcal{A}_2(\mathbb{F}_7) \to \mathcal{A}_3(\mathbb{F}_7)$ mit $f(Q_0) = P_0$, $f(Q_1) = P_0$, $f(Q_2) = P_0$ und $f(Q_3) = P_0$.

Aufgabe 17 (Schwerpunkt)**.** Es sei K ein Körper mit $6 \neq 0$ und es sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über K. Ferner sei (A, B, C, D) ein affin unabhängiges Tupel in $\mathcal{A}$ und es bezeichne $\Theta \subseteq \mathcal{A}$ den Tetraeder mit den Ecken A, B, C und D. Es bezeichne g_A die Verbindungsgerade durch A und den Schwerpunkt S_A der A gegenüberliegenden Seite (also die Seite mit den Ecken B, C und D), etc. Zeigen Sie, dass sich die Geraden g_A, g_B, g_C und g_D in einem Punkt S schneiden, dem sogenannten *Schwerpunkt* von Θ. Bestimmen Sie das Teilverhältnis $\mathrm{TV}(A, S_A, S)$.

Aufgabe 18 (affiner Satz von Desargues)**.** Es sei K ein Körper und $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über K. Ferner seien sieben Punkte $A, B, C, A', B', C', S \in \mathcal{A}$ so gegegeben, dass $\langle S, A, A'\rangle_{\mathrm{a}}$, $\langle S, B, B'\rangle_{\mathrm{a}}$ und $\langle S, C, C'\rangle_{\mathrm{a}}$ drei Geraden in $\mathcal{A}$ sind. Zeigen Sie: Wenn $\langle A, B\rangle_{\mathrm{a}} \parallel \langle A', B'\rangle_{\mathrm{a}}$ und $\langle A, C\rangle_{\mathrm{a}} \parallel \langle A', C'\rangle_{\mathrm{a}}$ sind, dann ist auch $\langle B, C\rangle_{\mathrm{a}} \parallel \langle B', C'\rangle_{\mathrm{a}}$.

Aufgabe 19 (Abstand von affinen Unterräumen)**.**

(a) Es sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum und es seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ endlich erzeugte affine Unterräume von $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \emptyset$ ist, dann gilt $\mathrm{Dim}(\mathcal{T}(\mathcal{U}) + \mathcal{T}(\mathcal{W})) = \mathrm{Dim}\,\mathcal{T}(\langle \mathcal{U} \cup \mathcal{W}\rangle_{\mathrm{a}}) - 1$.

(b) Es sei $\mathcal{E}$ ein euklidischer affiner Raum und es seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ endlich erzeugte affine Unterräume von $\mathcal{E}$. Das Skalarprodukt auf $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ bezeichnen wir mit $(-,=)$ und die davon induzierte Norm mit $\|-\|$. Zeigen Sie:

   (i) Es sei $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \emptyset$. Ist $V \in \mathcal{T}(\langle \mathcal{U} \cup \mathcal{W}\rangle_{\mathrm{a}}) \cap (\mathcal{T}(\mathcal{U}) + \mathcal{T}(\mathcal{W}))^{\perp}$ und $V \neq 0$, so gilt

   $$\mathrm{d}(\mathcal{U}, \mathcal{W}) = \frac{|(V, \overrightarrow{PQ})|}{\|V\|}$$

   für alle $P \in \mathcal{U}$, $Q \in \mathcal{W}$.

   (ii) Der Schnitt $\mathcal{T}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{W})$ operiert auf $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ durch

   $$(\mathcal{T}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{W})) \times (\mathcal{U} \times \mathcal{W}) \to \mathcal{U} \times \mathcal{W}, (V, (P, Q)) \mapsto (P + V, Q + V)$$

   und es ist $\{(P, Q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W} \mid \mathrm{d}(P, Q) = \mathrm{d}(\mathcal{U}, \mathcal{W})\}$ eine Bahn dieser Operation.

(c) Es seien $g, R \subseteq \mathcal{E}_5$ gegeben durch

$$g := \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}} \text{ und } R := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}}.$$

Bestimmen Sie den Abstand von g und R.

Aufgabe 20 (Operation der euklidischen Gruppe auf Tripeln)**.** Es sei $\mathcal{E}$ ein euklidischer affiner Raum und bezeichne

$$\mathcal{E}^3_{\mathrm{gen}} := \{(P_0, P_1, P_2) \in \mathcal{E}^3 \mid (P_0, P_1, P_2) \text{ affin unabhängig}\} \text{ und}$$
$$\mathcal{E}^3_{\mathrm{spez}} := \{(P_0, P_1, P_2) \in \mathcal{E}^3 \mid (P_0, P_1, P_2) \text{ affin abhängig, } (P_0, P_1) \text{ affin unabhängig}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die euklidische Gruppe $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ operiert auf $\mathcal{E}^3$ durch

$$\mathrm{Iso}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, (f, (P_0, P_1, P_2)) \to (f(P_0), f(P_1), f(P_2))$$

und diese Operation schränkt auf $\mathcal{E}^3_{\mathrm{gen}}$ und $\mathcal{E}^3_{\mathrm{spez}}$ ein.

(b) Es ist $\mathcal{E}^3_{\mathrm{gen}} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (P_0, P_1, P_2) \mapsto (\mathrm{d}(P_2, P_0), \angle(P_0, P_2, P_1), \mathrm{d}(P_2, P_1))$ eine trennende Invariante der Operation von $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ auf $\mathcal{E}^3_{\mathrm{gen}}$.

(c) Es ist $\mathcal{E}^3_{\mathrm{spez}} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (P_0, P_1, P_2) \mapsto (\mathrm{TV}(P_0, P_1, P_2), \mathrm{d}(P_0, P_1))$ eine trennende Invariante der Operation von $\mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ auf $\mathcal{E}^3_{\mathrm{spez}}$.

Aufgabe 21 (Hauptwinkel)**.**

(a) Es seien affine Unterräume $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ von $\mathcal{E}_5$ gegeben durch

$$\mathcal{U} := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \rangle \text{ und } \mathcal{W} := \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle.$$

Bestimmen Sie geeignete orthogonale Beine von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ sowie $\mathrm{A}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$.

(b) Es seien affine Unterräume $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ von $\mathcal{E}_4$ gegeben durch

$$\mathcal{U} := \langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}} \text{ und } \mathcal{W} := \langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}}.$$

Bestimmen Sie $\mathrm{A}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$.

Aufgabe 22 (projektive Räume und projektive Abbildungen)**.** Es sei K ein Körper und es seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ projektive Unterräume von $\mathcal{P}_4(K)$ gegeben durch $\mathcal{U} := \langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\rangle_{\mathrm{p}}$ und $\mathcal{W} := \langle Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\rangle_{\mathrm{p}}$, wobei

$$\begin{aligned} &P_0 := (0:1:1:1:1), && P_1 := (0:1:0:0:1), && P_2 := (0:1:0:1:0), && P_3 := (0:0:1:0:1),\\ &P_4 := (0:1:1:0:0), && Q_0 := (0:1:0:1:1), && Q_1 := (0:0:1:1:1), && Q_2 := (0:1:-1:0:0),\\ &Q_3 := (1:1:1:0:1), && Q_4 := (1:0:1:0:1). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie projektive Basen von $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}$ und $\langle\mathcal{U}\cup\mathcal{W}\rangle_{\mathrm{p}}$ sowie die Dimensionen dieser projektiven Räume.

(b) Bestimmen Sie alle projektiven Abbildungen $f\colon \mathcal{P}_4(K) \to \mathcal{P}_4(K)$ mit $f(P_i) = Q_i$ und $f(Q_i) = P_i$ für alle $i \in \{0, 1, 2\}$.

Aufgabe 23 (Doppelverhältnis)**.**

(a) Es seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{A}_1(K) \subseteq K^{2\times 1}$ vier (verschiedene) Punkte in $\mathcal{A}_1(K)$. Zeigen Sie: Es gilt

$$\mathrm{DV}(\langle P_1\rangle, \langle P_2\rangle, \langle P_3\rangle, \langle P_4\rangle) = \frac{\mathrm{TV}(P_3, P_2, P_1)}{\mathrm{TV}(P_4, P_2, P_1)}.$$

(b) Es seien $P_i, Q_i, R_i \in \mathcal{P}_3(\mathbb{F}_3)$ für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &P_0 := (1:1:0:0), && P_1 := (0:0:2:2), && P_2 := (1:1:1:1), && P_3 := (2:2:1:1),\\ &Q_0 := (1:0:2:1), && Q_1 := (0:1:2:2), && Q_2 := (2:2:2:0), && Q_3 := (2:1:0:1),\\ &R_0 := (1:2:1:2), && R_1 := (2:0:1:0), && R_2 := (2:2:0:2), && R_3 := (1:1:0:1). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)$, $\mathrm{DV}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ und $\mathrm{DV}(R_0, R_1, R_2, R_3)$.

Aufgabe 24 (Annihilatorkorrespondenz)**.** Es sei K ein Körper und $\tilde{\mathcal{V}}$ ein endlich erzeugter, nicht-trivialer K-Vektorraum. Für einen Untervektorraum $\tilde{\mathcal{U}} \leq \tilde{\mathcal{V}}$ sei der *Annihilator* definiert durch $\mathrm{Ann}_{\tilde{\mathcal{V}}^*}(\tilde{\mathcal{U}}) := \{\lambda \in \tilde{\mathcal{V}}^* \mid \lambda(U) = 0 \text{ für alle } U \in \tilde{\mathcal{U}}\}$. Zeigen Sie:

(a) Es ist $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) \cong \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}^*)$.

(b) Die Abbildung $a\colon \mathcal{TR}(\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})) \to \mathcal{TR}(\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}^*)), \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{U}}) \mapsto \mathcal{P}(\mathrm{Ann}_{\mathcal{V}^*}(\tilde{\mathcal{U}}))$ ist eine inklusionsumkehrende Bijektion.

(c) Für alle $\mathcal{U} \in \mathcal{TR}(\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}))$ gilt $\mathrm{Dim}\,\mathcal{U} + \mathrm{Dim}\,a(\mathcal{U}) = \mathrm{Dim}\,\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) - 1$.

(d) Für alle $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in \mathcal{TR}(\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}))$ gilt $a(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) = \langle a(\mathcal{U}) \cup a(\mathcal{W})\rangle_{\mathrm{p}}$ und $a(\langle\mathcal{U}\cup\mathcal{W}\rangle_{\mathrm{p}}) = a(\mathcal{U}) \cap a(\mathcal{W})$.

Zusatzaufgabe 25 (affiner Anteil und projektiver Abschluss)**.** Es sei K ein Körper.
Eine *Parallelenschar von Geraden* in einem affinen Raum $\mathcal{A}$ über K sei eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Geraden $\mathcal{G}(\mathcal{A}) := \{g \mid g \text{ Gerade in } \mathcal{A}\}$ von $\mathcal{A}$ bzgl. der Parallelitätsrelation $\parallel$. Die Menge aller Parallelenscharen von Geraden in $\mathcal{A}$ werde mit $\mathcal{A}_\infty := \mathcal{G}(\mathcal{A})/\parallel$ bezeichnet, und die disjunkte Vereinigung $\overline{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}_\infty$ heiße *projektiver Abschluss* von $\mathcal{A}$.

(a) Es sei $\tilde{\mathcal{V}}$ ein endlich erzeugter, nicht-trivialer K-Vektorraum und $\mathcal{H}$ eine Hyperebene im projektiven Raum $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$, d.h. ein projektiver Unterraum von $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ mit $\operatorname{Dim} \mathcal{H} = \operatorname{Dim} \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) - 1$. Ferner sei $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) \setminus \mathcal{H}$. Definieren Sie eine Struktur eines K-affinen Raums auf $\mathcal{A}$ so, dass folgendes gilt:

   (i) Es gibt eine Bijektion $\mathcal{A}_\infty \to \mathcal{H}$.

   (ii) Für jeden projektiven Unterraum $\mathcal{U}$ in $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ mit $\mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{H}$ ist $\mathcal{U} \cap \mathcal{A}$ ein affiner Unterraum von $\mathcal{A}$ mit $\operatorname{Dim}(\mathcal{U} \cap \mathcal{A}) = \operatorname{Dim} \mathcal{U}$ und $\operatorname{Dim}(\mathcal{U} \cap \mathcal{H}) = \operatorname{Dim} \mathcal{U} - 1$. Die Abbildung

   $$\{\mathcal{U} \in \mathcal{TR}(\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})) \mid \mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{H}\} \to \mathcal{TR}(\mathcal{A}), \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U} \cap \mathcal{A}$$

   ist eine inklusionserhaltende Bijektion.

   (iii) Ein Tupel $(P_0, \ldots, P_k)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ im affinen Raum $\mathcal{A}$ ist genau dann affin unabhängig, wenn $(P_0, \ldots, P_k)$ projektiv unabhängig in $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ ist.

   (iv) Für alle $f \in \operatorname{PGL}(\tilde{\mathcal{V}})$ mit $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ ist $f|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \in \operatorname{Aff}(\mathcal{A})$, wobei $f|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, P \mapsto f(P)$ die Einschränkung bezeichne. Die Abbildung

   $$\{f \in \operatorname{PGL}(\tilde{\mathcal{V}}) \mid f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}\} \to \operatorname{Aff}(\mathcal{A}), f \mapsto f|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$$

   ist eine Bijektion.

   Man nennt $\mathcal{A}$ den *affinen Anteil* von $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ bzgl. $\mathcal{H}$.

(b) Es sei $\mathcal{H} := \{(a_1 : \ldots : a_n : 0) \mid a_i \in K \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_n(K) \setminus \mathcal{H} \cong \mathcal{A}_n(K)$ ist.

(c) Nun sei umgekehrt ein affiner Raum $\mathcal{A}$ gegeben. Zeigen Sie: Es gibt einen nicht-trivialen K-Vektorraum $\tilde{\mathcal{V}}$, eine Hyperebene $\mathcal{H}$ in $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ und eine Bijektion $f \colon \overline{\mathcal{A}} \to \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$, die zu einem affinen Isomorphismus $\mathcal{A} \to \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}) \setminus \mathcal{H}$ und einer Bijektion $\mathcal{A}_\infty \to \mathcal{H}$ einschränkt.

Aufgabe 26 (Sätze von Pappos und Brianchon)**.** Es sei K ein Körper und $\tilde{\mathcal{V}}$ ein K-Vektorraum mit $\operatorname{Dim} \tilde{\mathcal{V}} = 3$.

(a) Es seien sechs (verschiedene) Punkte $P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ gegeben. Zeigen Sie: Wenn $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle_{\mathrm{p}}$ und $\langle Q_0, Q_1, Q_2 \rangle_{\mathrm{p}}$ zwei Geraden in $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ sind, dann ist auch $\langle R_0, R_1, R_2 \rangle_{\mathrm{p}}$ mit $\langle P_1, Q_2 \rangle_{\mathrm{p}} \cap \langle P_2, Q_1 \rangle_{\mathrm{p}} = \{R_0\}$, $\langle P_0, Q_2 \rangle_{\mathrm{p}} \cap \langle P_2, Q_0 \rangle_{\mathrm{p}} = \{R_1\}$ und $\langle P_0, Q_1 \rangle_{\mathrm{p}} \cap \langle P_1, Q_0 \rangle_{\mathrm{p}} = \{R_2\}$ eine Gerade in $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$.

(b) Wie lautet die zu (a) duale Aussage?

Aufgabe 27 (projektive Quadriken)**.**

(a) Es sei $q \colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ und es sei $Q \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ die zu q gehörige projektive Quadrik. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$ so, dass die Gram-Matrix der Polarisation von $r \colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}, x \mapsto q(Tx)$ bzgl. der Standardbasis in reeller symmetrischer Normalform ist. Ist Q ein projektiver Unterraum von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$? Wenn ja, so bestimmen Sie eine projektive Basis von Q.

(b) Es sei $q \colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ und $Q \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ die zu q gehörige projektive Quadrik. Geben Sie, sofern möglich, Geraden g_i in $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ für $i \in \{1,2,3,4\}$ an mit $g_1 \cap Q = \emptyset$, $|g_2 \cap Q| = 2$, $|g_3 \cap Q| = 1$ und $g_4 \cap Q = g_4$ oder beweisen Sie in den jeweiligen Fällen deren Nicht-Existenz.

Aufgabe 28 (Tangenten an projektive Quadriken)**.**

(a) Es sei K ein Körper mit $2 \neq 0$, es sei $\tilde{\mathcal{V}}$ ein nicht-trivialer K-Vektorraum und q eine quadratische Form auf $\tilde{\mathcal{V}}$. Ferner sei $Q \subseteq \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ die zu q gehörige projektive Quadrik, $P \in Q$ ein beliebiger Punkt und $V \in \tilde{\mathcal{V}}$ mit $P = \langle V \rangle$. Zeigen Sie, dass die Menge aller Tangenten an Q durch den Punkt P gegeben ist durch

$$\{\langle P, \langle W \rangle \rangle_{\mathrm{p}} \mid W \in \{V\}^{\perp, \Psi_q} \setminus \langle V \rangle\}.$$

(b) Es sei $q \colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ und $Q \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ die zu q gehörige projektive Quadrik. Bestimmen Sie alle Tangenten an Q in $(1 : 0 : 0)$.

Aufgabe 29 (Einsetzungshomomorphismus). Es sei K ein Körper.

(a) Es sei A eine assoziative K-Algebra und es seien Elemente $a_i \in A$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass es genau einen K-Algebrenhomomorphismus $e\colon K[X_1, \dots, X_n] \to A$ mit $e(X_i) = a_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt. Man nennt e den *Einsetzungshomomorphismus* zu $(a_1, \dots, a_n)$.

(b) Es sei $e\colon K[X] \to K^K$ der Einsetzungshomomorphismus mit $e(X) = \mathrm{Id}_K$. Zeigen Sie, dass e genau dann injektiv ist, wenn K unendlich ist, und dass e genau dann surjektiv ist, wenn K endlich ist.

Aufgabe 30 (projektive Abbildung). Es sei K ein Körper und es seien $P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_4(K)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} P_0 &:= (0:1:1:1:1), & P_1 &:= (0:1:0:0:1), & P_2 &:= (0:1:0:1:0), \\ Q_0 &:= (1:0:1:0:1), & Q_1 &:= (1:0:0:0:1), & Q_2 &:= (0:1:0:0:0). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle projektiven Abbildungen $f\colon \mathcal{P}_4(K) \to \mathcal{P}_4(K)$ mit $f(P_i) = Q_i$ und $f(Q_i) = P_i$ für alle $i \in \{0, 1, 2\}$.

Aufgabe 31 (quadratische Formen zu Quadriken). Es seien $A, B, C, D \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A := (1:0:2), \quad B := (0:1:-1), \quad C := (1:1:0), \quad D := (0:0:1)$$

und es sei $Q := \langle A, B\rangle_{\mathrm{p}} \cup \langle C, D\rangle_{\mathrm{p}}$.

(a) Bestimmen Sie Projektivitäten $\kappa\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ und $\kappa'\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ mit

$$Q = \mathrm{Null}^{\mathrm{p}}_{\kappa}(X_1 X_3) = \mathrm{Null}^{\mathrm{p}}_{\kappa'}(X_1^2 - X_3^2).$$

(b) Bestimmen Sie eine quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ so, dass Q die projektive Quadrik zu q wird.

(c) Bestimmen Sie eine Linearform $\lambda\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ so, dass $\tilde{Q} \cap \mathcal{A}(\lambda)$ aus zwei parallelen Geraden besteht, wobei $\tilde{Q} := \bigcup Q$ sei.

Aufgabe 32 (Schnitte affiner Nullstellenmengen mit affinen Unterräumen). Die im Folgenden auftretenden affinen Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ seien als Teilmengen von $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ aufgefasst.

(a) Bestimmen Sie den Schnitt von $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - 1)$ mit $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_3 - c)$ für $c \in \mathbb{R}$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ besitzt der Schnitt singuläre Punkte (in $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_3 - c)$)?

(b) Bestimmen Sie den Schnitt von $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - 1)$ mit $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_2 - c)$ für $c \in \mathbb{R}$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ besitzt der Schnitt singuläre Punkte (in $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_2 - c)$)?

(c) Bestimmen Sie den Schnitt von $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}((X_1 + X_2)^2 - X_3^3 - 1)$ und $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_1 + X_2 + X_3 + 1)$.

Aufgabe 33 (Tangenten an affine Nullstellenmengen). Die im Folgenden auftretenden affinen Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{R}[X_1, X_2]$ seien als Teilmengen von $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ aufgefasst.

(a) Bestimmen Sie die Tangenten an $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_1^2 X_2 - X_2^2 - 2X_1X_2 + 3X_2 - 1)$ im Punkt P, wobei

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Tangenten an $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 - 2)$ in jedem ihrer Punkte.

Aufgabe 34 (Normalformen von affinen Quadriken).

(a) Es sei $q\colon \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}) := x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2 - x_1 + 2x_2 + x_3 + 3.$$

Bestimmen Sie eine affine Matrix $T \in \mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$ so, dass das zu $r\colon \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, P \mapsto q(TP)$ gehörige Polynom (bis auf ein konstantes Vielfaches) in reeller affiner Normalform ist.

(b) Es sei $p \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ definiert durch

$$p := -X_1^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 - X_2^2 + 2X_2X_3 - X_3^2 - 4X_1 + 2.$$

Bestimmen Sie die euklidische affine Normalform von p.

Aufgabe 35 (Linearisierung von Polynomen). Es sei K ein Körper und $p \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in K$ der Punkt

$$P_x := \begin{pmatrix} x \\ p(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2(K)$$

regulär in $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(Y - p)$ ist und dass die Tangente in P_x durch $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(Y - p(x) - p'(x)(X - x))$ gegeben ist, wobei p' die (formale) Ableitung von p bezeichne.

Aufgabe 36 (Minimalpolynom). Es sei K ein Körper und $\mathcal{V}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass es für jeden Endomorphismus φ von $\mathcal{V}$ einen Vektor $V \in \mathcal{V}$ mit $\mu_\varphi = \mu_{\varphi,V}$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $\mu_\varphi = p^m$ für ein irreduzibles Polynom p und benutzen Sie für den allgemeinen Fall die Hauptraumzerlegung.

Aufgabe 37 (Zentralisator). Es sei K ein Körper und es seien $a, b \in K$. Ferner seien $A_i \in K^{3\times 3}$ für $i \in \{1,2,3\}$ gegeben durch

$$A_1 := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Zentralisator $\mathrm{C}_{K^{3\times 3}}(A_i)$ für $i \in \{1,2,3\}$.

Aufgabe 38 (Jordan-Normalform).

(a) Es sei $A \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -5 & -2 & 3 & 3 \\ 10 & 10 & 6 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ so, dass $T^{-1}AT$ in Jordan-Normalform ist.

(b) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{7\times 7}$$

in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{F}_5$.

Aufgabe 39 (Vertretersysteme von Ähnlichkeitsklassen).

(a) Bestimmen Sie ein Vertretersystem der Ähnlichkeitsklassen in $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$.

(b) Bestimmen Sie ein Vertretersystem der Ähnlichkeitsklassen derjenigen Matrizen in $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die nicht invertierbar sind und Spur 2 haben.

Aufgabe 40 (Eigenschaften der Jordan-Normalform). Es sei K ein Körper und $A \in K^{6\times 6}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X-a)^4(X-b)^2$ für $a, b \in K$ mit $a \neq b$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordan-Normalformen von A (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke) und geben Sie in allen Fällen das Minimalpolynom von A sowie die Dimensionen aller Eigenräume von A an.

Aufgabe 41 (Ähnlichkeit der Transponierten). Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Beweisen Sie, dass A^{tr} ähnlich zu A ist.

Aufgabe 42 (lineares Differentialgleichungssystem). Bestimmen Sie alle $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^{5\times 1}$ mit

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ f_4' \\ f_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43 (lineare Rekursion)**.** Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ über $\mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$x_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0, \\ 1, & \text{falls } n = 1, \\ ax_{n-1} - abx_{n-2} + bx_{n-1}, & \text{falls } n \geq 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie eine explizite Formel für x_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis. Betrachten Sie

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

für eine geeignete Matrix A.

Aufgabe 44 (hermitesche Sesquilinearformen)**.**

(a) Es sei $\Phi\colon \mathbb{C}^{2\times 2} \times \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}, (X, Y) \mapsto \operatorname{Spur}(X^* A Y)$ mit $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1+2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass Φ eine hermitesche Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist und bestimmen Sie die Signatur von Φ.

(b) Es sei $\Psi\colon \mathbb{C}^{3\times 1} \times \mathbb{C}^{3\times 1} \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x^* B y$ mit $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ definiert durch

$$B := \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & \mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass Ψ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{3\times 1}$ ist und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^{3\times 1}$ bzgl. Ψ.

Aufgabe 45 (hermitesche und schiefhermitesche Matrizen)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $(-)^*\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ ist linear über $\mathbb{R}$ und semilinear über $\mathbb{C}$.

(b) Die Menge $\mathbb{C}^{n\times n}_{\text{herm}}$ und $\mathbb{C}^{n\times n}_{\text{schiefh}}$ bilden $\mathbb{R}$-Untervektorräume von $\mathbb{C}^{n\times n}|_{\mathbb{R}}$.

(c) Es ist $\mathbb{C}^{n\times n}_{\text{herm}} \cong \mathbb{C}^{n\times n}_{\text{schiefh}}$ über $\mathbb{R}$.

(d) Es ist $\mathbb{C}^{n\times n}|_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^{n\times n}_{\text{herm}} \oplus_{\mathrm{i}} \mathbb{C}^{n\times n}_{\text{schiefh}}$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 46 (Spektralsatz)**.** Es sei $\mathcal{V}$ ein unitärer Vektorraum, $B = (B_1, B_2, B_3)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$ und φ ein Endomorphismus von $\mathcal{V}$ mit

$${}^{B}\varphi^{B} = \begin{pmatrix} -5\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} & -3+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -3+\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass φ ein normaler Endomorphismus ist und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis C von $\mathcal{V}$ so, dass ${}^{C}\varphi^{C}$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 47 (beste Approximation und Abstand)**.** Es sei $x \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ und $\mathcal{U} \leq \mathbb{C}^{3\times 1}$ gegeben durch

$$x := \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } \mathcal{U} := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Bestimmen Sie bzgl. des Standardskalarprodukts die beste Approximation von x an $\mathcal{U}$ sowie den Abstand von x und $\mathcal{U}$.

Aufgabe 48 (Polarzerlegung)**.** Bestimmen Sie die Polarzerlegung von $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} & -1 \\ 1-\mathrm{i} & 0 & -1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 49 (Orthogonalraum bzgl. eines komplexen Skalarproduktes)**.** Es sei $\mathcal{V}$ ein unitärer Vektorraum (mit Skalarprodukt $(-,=)$) und $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$. Zeigen Sie: Es gilt

$$\mathcal{U}^\perp = \{V \in \mathcal{V} \mid \operatorname{Re}(U,V) = 0 \text{ für alle } U \in \mathcal{U}\} = \{V \in \mathcal{V} \mid \operatorname{Im}(U,V) = 0 \text{ für alle } U \in \mathcal{U}\}.$$

Aufgabe 50 (größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches)**.** Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und es seien $x, y \in R$. Ein Ringelement $d \in R$ heißt ein *größter gemeinsamer Teiler* von x und y, falls $d \mid x$ und $d \mid y$, und falls $d' \mid d$ für alle $d' \in R$ mit $d' \mid x$ und $d' \mid y$.

(a) Zeigen Sie: Ist R ein euklidischer Bereich und d ein größter gemeinsamer Teiler von x und y, so gilt $\langle d \rangle = \langle x, y \rangle$.

(b) Geben Sie eine Definition für ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von x und y. Zeigen Sie: Ist R ein euklidischer Bereich und m ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von x und y, so gilt $\langle m \rangle = \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$.

Aufgabe 51 (Norm)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}] \subseteq \mathbb{C}$ definiert durch

$$\mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}] := \{x_0 + x_1\sqrt{n}\mathrm{i} \mid x_0, x_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

Ferner definieren wir auf $\mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}]$ die *Norm* $\nu\colon \mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}] \to \mathbb{N}_0, x \to |x|^2$.

(a) Es sei ein $n \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Zeigen Sie:

- (i) Es ist $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}]$.
- (ii) Wenn $x \mid y$ gilt für $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}]$, dann gilt auch $\nu(x) \mid \nu(y)$ in $\mathbb{Z}$.
- (iii) Es gilt $\mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}] \setminus \{0\} \mid \nu(x) = 1\}$.
- (iv) Für assoziierte Ringelemente $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}]$ gilt $\nu(x) = \nu(y)$.
- (v) Wenn $\nu(x)$ für $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}]$ irreduzibel in $\mathbb{Z}$ ist, dann ist x irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{n}\mathrm{i}]$.

(b)
- (i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ ein euklidischer Ring mit Gradfunktion ν ist.
- (ii) Bestimmen Sie eine Faktorisierung von $6+12\mathrm{i}$ in irreduzible Elemente von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ (und ggf. einer Einheit).
- (iii) Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von 8 und $2 + 14\mathrm{i}$ in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

(c) Zeigen Sie:

- (i) Es sind 2, 3, $1 + \sqrt{5}\mathrm{i}$ und $1 - \sqrt{5}\mathrm{i}$ irreduzible Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}\mathrm{i}]$.
- (ii) Es besitzt 6 zwei Faktorisierungen in irreduzible Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}\mathrm{i}]$ so, dass Faktoren verschiedener Faktorisierungen paarweise nicht-assoziiert sind. Die irreduziblen Elemente aus (i) sind nicht prim.
- (iii) Es besitzen 12 und $6 + 6\sqrt{5}\mathrm{i}$ keinen größten gemeinsamen Teiler in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}\mathrm{i}]$.

Aufgabe 52 (simultane Kongruenzen)**.** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$ mit

$$\begin{aligned}
12x_1 + 5x_2 - x_3 &\equiv 11 \pmod{2\mathbb{Z}},\\
x_1 + x_2 &\equiv -2 \pmod{3\mathbb{Z}},\\
2x_1 - x_2 &\equiv 5 \pmod{3\mathbb{Z}},\\
12x_1 + 3x_2 - x_3 &\equiv 19 \pmod{6\mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 53 (Erzeugendensystem der vollen linearen Gruppe)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} \mid X \text{ invertierbar}\}$$

die *volle lineare Gruppe*. Ferner sei

$$\begin{aligned}
S := {} &\{\mathrm{Add}_n(k,l,a) \mid k,l \in \{1,\ldots,n\}, k \neq l, a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathrm{Mul}_n(k,u) \mid k \in \{1,\ldots,n\}, u \in \mathbb{Z}^\times\}\\
&\cup \{\mathrm{Ver}_n(k,l) \mid k,l \in \{1,\ldots,n\}, k \neq l\}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} \mid A = A_1 \ldots A_r \text{ mit } A_i \in S \text{ für } i \in \{1,\ldots,r\},\ r \in \mathbb{N}_0\}$.

Zusatzaufgabe 54 (Isomorphietypen endlicher abelscher Gruppen)**.** Es seien p und q Primzahlen. Bestimmen Sie alle Isomorphietypen endlicher abelscher Gruppen der Ordnungen 800, p^4 und p^4q^3.

Zusatzaufgabe 55 (Frobenius-Normalform)**.**

(a) Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ mit $\chi_A = X^n$. Zeigen Sie, dass die Frobenius-Normalform von A gleich der Jordan-Normalform von A ist (bis auf Reihenfolge der Blöcke).

(b) Bestimmen Sie die Frobenius-Normalform von

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{5\times 5}.$$

Zusatzaufgabe 56 (Adjunktionsformel)**.** Es seien K ein Körper und $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{W}$ Vektorräume über K. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{V}_1 \otimes_K \mathcal{V}_2, \mathcal{W}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_1, \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_2, \mathcal{W})) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_2, \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_1, \mathcal{W}))$$

ist. Geben Sie für die erste Isomorphie einen K-Vektorraumisomorphismus an.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.

Zusatzaufgabe 57 (Kronecker-Produkt)**.**

(a) Es sei K ein Körper und es seien $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{n\times n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A und μ ein Eigenwert von B, so ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von $A \otimes B$.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Tutoriumsaufgabe 1 (Orthogonalität)**.** Es sei $\mathcal{U} \leq \mathbb{F}_3^{4\times 1}$ definiert durch

$$\mathcal{U} := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(a) Bestimmen Sie den Orthogonalraum $\mathcal{U}^\perp$ bzgl. der Standardbilinearform auf $\mathbb{F}_3^{4\times 1}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp$ und $\mathrm{Dim}(\mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp)$.

Tutoriumsaufgabe 2 (Bilinear- und Linearformen)**.** Es sei K ein Körper, $\mathcal{V}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung $\tilde{\Phi}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*, V \mapsto \Phi(V, -)$ induziert.

(b) Bestimmen Sie Kern $\tilde{\Phi}$.

(c) Zeigen Sie, dass Φ genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn $\tilde{\Phi}$ ein Isomorphismus ist.

(d) Zeigen Sie, dass ${}_B\Phi^B = {}^{B^*}\tilde{\Phi}^B$ für jede Basis B von $\mathcal{V}$.

***Tutoriumsaufgabe 3** (Lie-Algebren)**.** Es sei K ein Körper. Eine *Lie-Algebra* über K (oder *K-Lie-Algebra*) ist ein K-Vektorraum $\mathfrak{a}$ zusammen mit einer alternierenden bilinearen Abbildung $b\colon \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, so dass gilt:

(Jac) *Jacobi-Identität.* Es ist $b(x, b(y, z)) + b(y, b(z, x)) + b(z, b(x, y)) = 0$ für alle $x, y, z \in \mathfrak{a}$.

Unter Missbrauch von Bezeichnungen schreiben wir $\mathfrak{a}$ sowohl für die Lie-Algebra als auch für den ihr zu Grunde liegenden K-Vektorraum. Die bilineare Abbildung b heißt *Lie-Klammer* (oder *Lie-Produkt*) von $\mathfrak{a}$. (Hat man eine Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ mit Lie-Klammer b gegeben, so schreibt man oft auch kurz $[x, y] := b(x, y)$ für $x, y \in \mathfrak{a}$.) Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ bildet $K^{n\times n}$ zusammen mit

$$b\colon K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K^{n\times n}, (A, B) \mapsto AB - BA$$

eine Lie-Algebra.

(b) Es bildet $\mathbb{R}^{3\times 1}$ zusammen mit

$$b\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}, (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

eine Lie-Algebra. (Hier heißt b auch *Kreuzprodukt* auf $\mathbb{R}^{3\times 1}$ und man schreibt auch $x \times y := b(x,y)$.)

Tutoriumsaufgabe 4 (Normalformen für alternierende und symmetrische Matrizen)**.**

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit $T^{\mathrm{tr}}AT$ in alternierender Normalform.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die reelle symmetrische Normalform und die komplexe symmetrische Normalform von A.

Tutoriumsaufgabe 5 (homogene und bilineare Polynome)**.** Es sei K ein Körper.

(a) Geben Sie eine Basis von $K[X_1, X_2]_{m,\mathrm{hom}}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ an.

(b) Geben Sie eine Basis von $K[X_1, X_2, X_3]_{m,\mathrm{hom}}$ für $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ an.

(c) Geben Sie eine Basis von $K[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]_{(1,1),\mathrm{hom}}$ an.

Tutoriumsaufgabe 6 (Bilinearformen, quadratische Formen, Matrizen und homogene Polynome)**.**

(a) Es sei $p := 4X_1Y_1 - 2X_1Y_2 - 2X_2Y_1 + 2X_2Y_2 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]_{(1,1),\mathrm{hom}}$ und es sei $\Phi\colon \mathbb{Q}^{2\times 1} \times \mathbb{Q}^{2\times 1} \to \mathbb{Q}, (x,y) \mapsto p(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Zeigen Sie, dass Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{Q}^{2\times 1}$ ist und bestimmen Sie die Gram-Matrix von Φ bzgl. der Standardbasis. Geben Sie die zu Φ assoziierte quadratische Form q_Φ an.

(b) Es sei $p := 5X_1^2 - 4X_1X_2 + 2X_1X_3 - 3X_2^2 + X_3^2 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]_{2,\mathrm{hom}}$ und es sei $q\colon \mathbb{Q}^{2\times 1} \to \mathbb{Q}, x \mapsto p(x_1, x_2, x_3)$. Zeigen Sie, dass q eine quadratische Form auf $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ ist und bestimmen Sie die Gram-Matrix der Polarisation Ψ_q bzgl. der Standardbasis. Bestimmen Sie das zu Ψ_q gehörige Polynom in $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]_{(1,1),\mathrm{hom}}$ bzgl. der Standardbasis.

***Tutoriumsaufgabe 7** (Operationen und lineare Operationen)**.** Es sei G, H Gruppen, X eine Menge und $\mathcal{V}$ ein Vektorraum über einem Körper K. Die Menge aller Operationen von G auf X bezeichnen wir als

$$\mathrm{Act}_G(X) := \{\omega\colon G \times X \to X \mid \omega \text{ ist eine Operation}\},$$

und die Menge aller linearen Operationen von G auf $\mathcal{V}$ bezeichnen wir als

$$\mathrm{Act}_G^{\mathbf{Vct}(K)}(\mathcal{V}) = \{\omega\colon G \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \mid \omega \text{ ist eine lineare Operation}\}.$$

Ferner bezeichnen wir die Menge aller Gruppenhomomorphismen von G nach H als

$$\mathrm{Hom}(G,H) = \{\varphi\colon G \to H \mid \varphi \text{ ist ein Gruppenhomomorphismus}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Jede Operation $\omega \in \mathrm{Act}_G(X)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\omega_1\colon G \to \mathrm{S}_X, g \mapsto \omega(g, -).$$

(b) Es ist

$$\mathrm{Act}_G(X) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathrm{S}_X).$$

(Gemeint ist eine Isomorphie als Mengen, d.h. es existiert eine Bijektion $\mathrm{Act}_G(X) \to \mathrm{Hom}(G, \mathrm{S}_X)$.)

(c) Jede lineare Operation $\omega \in \mathrm{Act}_G^{\mathbf{Vct}(K)}(X)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\omega_1 \colon G \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}), g \mapsto \omega(g, -).$$

(d) Es ist

$$\mathrm{Act}_G^{\mathbf{Vct}(K)}(\mathcal{V}) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathrm{GL}(\mathcal{V})).$$

Tutoriumsaufgabe 8 (Permutationen)**.** Es seien $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \in \mathrm{S}_6$ definiert durch

$$\pi_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right), \pi_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{smallmatrix}\right), \pi_3 = (1,3,6)(2,4), \pi_4 = (1,2,3,4,5,6).$$

(a) Geben Sie die Zykeldarstellung von π_1 und π_2 sowie die klassische Darstellung von π_3 und π_4 an.

(b) Berechnen Sie $\pi_1\pi_2$, $\pi_3\pi_4$, π_3^{-1} und $\pi_4\pi_3\pi_4^{-1}$.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{sign}\,\pi_2$, $\mathrm{sign}\,\pi_3$ und $\mathrm{sign}(\pi_2\pi_3)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\{1, (1,2,3), (1,3,2)\}$ eine Untergruppe von S_3 ist.

Tutoriumsaufgabe 9 (Kern und Bild eines Gruppenhomomorphismus)**.** Es seien G und H Gruppen und $\varphi \colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Wie bei linearen Abbildungen definieren wir

$$\mathrm{Kern}\,\varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\}$$

und

$$\mathrm{Bild}\,\varphi := \varphi(G) = \{\varphi(g) \mid g \in G\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}\,\varphi \leq G$ und $\mathrm{Bild}\,\varphi \leq H$ ist.

Tutoriumsaufgabe 10 (reguläre Operation)**.** Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie: $G \times G \to G, (g, x) \mapsto gx$ ist eine reguläre Gruppenoperation von G auf G.

Tutoriumsaufgabe 11 (reguläre Operation)**.**

(a) Es sei G eine abelsche Gruppe, M eine Menge und $G \times M \to M, (g, m) \mapsto gm$ eine Operation von G auf M. Zeigen Sie, dass die Operation von G auf M genau dann regulär ist, wenn sie treu und transitiv ist.

(b) Es seien K ein Körper, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ Vektorräume über K und $\varphi \colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}\,\varphi$ regulär auf den nicht-leeren Fasern von φ operiert.

Tutoriumsaufgabe 12 (affine Basen)**.** Es sei $\mathcal{U}$ der affine Unterraum von $\mathcal{A}_3(\mathbb{F}_{11})$ gegeben durch

$$\mathcal{U} := \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}}.$$

Bestimmen Sie eine affine Basis von $\mathcal{U}$ und $\mathrm{Dim}\,\mathcal{U}$. Welches geometrische Gebilde ist $\mathcal{U}$?

Tutoriumsaufgabe 13 (affine Abbildungen)**.** Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f \colon \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ mit

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tutoriumsaufgabe 14 (baryzentrischer Standardraum)**.** Bestimmen Sie eine affine Basis von $\mathcal{A}_3^{\mathrm{b}}(\mathbb{Q})$.

Tutoriumsaufgabe 15 (affine Gruppe)**.** Es sei K ein Körper. Zeigen Sie:

(a) Die affine Gruppe $\mathrm{Aff}_n(K)$ ist eine Untergrupppe von $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$. Geben Sie explizite Formeln für das Produkt und das Inverse von Elementen aus $\mathrm{Aff}_n(K)$ an.

(b) Die affine Gruppe $\mathrm{Aff}_n(K)$ operiert regulär auf der Menge der affinen Basen $\mathcal{B}(\mathcal{A}_n(K))$ von $\mathcal{A}_n(K)$ durch

$$\mathrm{Aff}_n(K) \times \mathcal{B}(\mathcal{A}_n(K)) \to \mathcal{B}(\mathcal{A}_n(K)), (T, (P_0, \ldots, P_n)) \mapsto (TP_0, \ldots, TP_n).$$

Tutoriumsaufgabe 16 (Längen und Winkel im Dreieck)**.** Es seien $A, B, C \in \mathcal{E}_3$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Seitenlängen und die Winkel im Dreieck mit den Ecken A, B und C.

Tutoriumsaufgabe 17 (Abstand von Geraden)**.** Es seien $g, h \subseteq \mathcal{E}_3$ gegeben durch

$$g := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}} \text{ und } h := \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathrm{a}}.$$

Bestimmen Sie den Abstand von g und h.

Tutoriumsaufgabe 18 (orthonormale Beine)**.** Es seien $\mathcal{A} := \{p \in \mathbb{R}[X]_{\mathrm{Grad} \leq 3} \mid p(0) = 1\}$ und $\mathcal{V} := \{p \in \mathbb{R}[X]_{\mathrm{Grad} \leq 3} \mid p(0) = 0\}$.

(a) Finden Sie eine Operation von $\mathcal{V}$ auf $\mathcal{A}$ so, dass $\mathcal{A}$ ein affiner Raum mit Translationsvektorraum $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}$ wird.

(b) Wir versehen $\mathcal{V}$ mit dem Skalarprodukt $(-, =)$ definiert durch $(p, q) := \int_{-1}^{1} p(x)q(x) \,\mathrm{d}x$ für $p, q \in \mathcal{V}$, so dass $\mathcal{A}$ ein euklidischer affiner Raum wird. Bestimmen Sie ein orthonormales 3-Bein in $\mathcal{A}$.

Tutoriumsaufgabe 19 (Schnitte affiner Unterräume)**.** Es sei K ein Körper, $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über K, $k, l \in \mathbb{N}_0$ und es bezeichne

$$\begin{aligned}
&\mathcal{TR}_{k,l}(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \in \mathcal{TR}(\mathcal{A}) \times \mathcal{TR}(\mathcal{A}) \mid \operatorname{Dim} \mathcal{U} = k \text{ und } \operatorname{Dim} \mathcal{W} = l\},\\
&\mathcal{TR}_{\mathrm{spez},k,l}(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \in \mathcal{TR}_{k,l}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset\} \text{ und}\\
&\mathcal{TR}_{\mathrm{gen},k,l}(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \in \mathcal{TR}_{k,l}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Die affine Gruppe $\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$ operiert auf $\mathcal{TR}_{k,l}(\mathcal{A})$ durch

$$\operatorname{Aff}(\mathcal{A}) \times \mathcal{TR}_{k,l}(\mathcal{A}) \to \mathcal{TR}_{k,l}(\mathcal{A}), (f, (\mathcal{U}, \mathcal{W})) \mapsto (f(\mathcal{U}), f(\mathcal{W}))$$

und diese Operation schränkt auf $\mathcal{TR}_{\mathrm{spez},k,l}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{TR}_{\mathrm{gen},k,l}(\mathcal{A})$ ein.

(b) Es ist $\mathcal{TR}_{k,l}(\mathcal{A}) \to \mathbb{N}_0, (\mathcal{U}, \mathcal{W}) \mapsto \operatorname{Dim}(\mathcal{T}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{W}))$ eine Invariante der Operation von $\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$ auf $\mathcal{TR}_{k,l}(\mathcal{A})$, die auf trennende Invarianten der Operationen von $\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$ auf $\mathcal{TR}_{\mathrm{spez},k,l}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{TR}_{\mathrm{gen},k,l}(\mathcal{A})$ einschränkt.

Tutoriumsaufgabe 20 (projektive Basen)**.** Es sei $\mathcal{U}$ der projektive Unterraum von $\mathcal{P}_3(\mathbb{F}_7)$ gegeben durch

$$\mathcal{U} := \langle (1 : 4 : -1 : 1), (1 : 0 : -1 : -1), (3 : 2 : -3 : -2), (0 : 2 : 0 : 1), (1 : 2 : -1 : 0) \rangle_{\mathrm{p}}.$$

Bestimmen Sie eine projektive Basis von $\mathcal{U}$ und $\operatorname{Dim} \mathcal{U}$. Ist $\mathcal{U}$ ein Punkt, eine Gerade oder eine Ebene in $\mathcal{P}_3(\mathbb{F}_7)$?

Tutoriumsaufgabe 21 (Schnitte projektiver Unterräume)**.** Es seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ projektive Unterräume von $\mathcal{P}_3(\mathbb{F}_3)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U} := \langle (1 : 1 : 1 : -1), (-1 : 1 : 0 : 0), (0 : -1 : 0 : -1) \rangle_{\mathrm{p}} \text{ und}\\
&\mathcal{W} := \langle (-1 : 0 : 1 : 1), (1 : -1 : 0 : 0), (0 : -1 : 1 : 1) \rangle_{\mathrm{p}}.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine projektive Basen von $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ und $\langle \mathcal{U} \cup \mathcal{W} \rangle_{\mathrm{p}}$.

Tutoriumsaufgabe 22 (projektive Abbildungen)**.**

(a) Geben Sie eine projektive Abbildung $f \colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ mit $f(1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$, $f(0 : 1 : 0) = (0 : 1 : 0)$, $f(0 : 0 : 1) = (0 : 0 : 1)$ und $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$ an.

(b) Bestimmen Sie die eindeutige projektive Abbildung $f \colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ mit $f(1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 2)$, $f(0 : 1 : 0) = (2 : 1 : 0)$, $f(0 : 0 : 1) = (0 : 2 : 1)$ und $f(1 : 1 : 1) = (-1 : 1 : 3)$. Ist f ein projektiver Isomorphismus?

(c) Gibt es eine projektive Abbildung $f\colon \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ mit $f(1:0) = (1:0)$, $f(0:1) = (1:0)$ und $f(1:1) = (2:0)$?

Tutoriumsaufgabe 23 (Unterraum-Kombinatorik)**.** Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und es seien $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Bestimmen Sie die Anzahlen aller k-dimensionalen Untervektorräume von $K^{n \times 1}$, aller k-dimensionalen affinen Unterräume von $\mathcal{A}_n(K)$ und aller k-dimensionalen projektiven Unterräume von $\mathcal{P}_n(K)$.

Tutoriumsaufgabe 24 (Normalform von Quadriken)**.** Es sei $q\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$ und es sei $Q \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ die zu q gehörige projektive Quadrik. Bestimmen Sie die *Normalform* des zu q gehörigen homogenen Polynoms vom Grad 2, d.h. das Polynom zur reellen symmetrischen Normalform der Gram-Matrix zur Polarisation Ψ_q. Welches geometrische Gebilde ist Q?

Tutoriumsaufgabe 25 (Schnitte projektiver Quadriken)**.** Es sei $q_i\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2\}$ gegeben durch $q_1(x) := (x_1 + x_3)^2$ und $q_2(x) := x_1x_3$ für $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ und es sei Q_i für $i \in \{1, 2\}$ die zu q_i gehörige projektive Quadrik. Bestimmen Sie $Q_1 \cap Q_2$. Welche geometrischen Gebilde sind Q_1, Q_2 und $Q_1 \cap Q_2$? Ist $Q_1 \cap Q_2$ eine projektive Quadrik?

Tutoriumsaufgabe 26 (K-Algebra)**.** Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass K^K eine assoziative K-Algebra ist.

Tutoriumsaufgabe 27 (quadratische Form zu projektiver Quadrik)**.** Bestimmen Sie eine quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ so, dass $\langle (0:1:0), (0:0:1)\rangle_{\mathrm{p}} \cup \langle (0:1:0), (1:0:0)\rangle_{\mathrm{p}}$ die projektive Quadrik zu q wird.

Tutoriumsaufgabe 28 (affine Quadrik)**.** Beschreiben Sie die affine Quadrik $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_1^2 - 1) \subseteq \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

Tutoriumsaufgabe 29 (Homogenisierung)**.** Bestimmen Sie die Homogenisierungen von $X_1^2X_2 - 2X_2^2 + X_1 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]$, $X_1^2 - X_2 + 1 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ und $X_1^2 - X_2^2 + X_1X_2 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]$.

Tutoriumsaufgabe 30 (Schnitte affiner Quadriken mit affinen Unterräumen, Tangenten)**.** Die im Folgenden auftretenden affinen Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ seien als Teilmengen von $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ aufgefasst.

(a) Bestimmen Sie $S := \mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - 1) \cap \mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_3)$ und beschreiben Sie diesen Schnitt. Bestimmen Sie alle regulären Punkte von S bzgl. $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_3)$ sowie die Tangenten an S in den Punkten A und B bzgl. $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_3)$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie $T := \mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - 1) \cap \mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_2 - 1)$ und beschreiben Sie diesen Schnitt. Bestimmen Sie alle regulären Punkte von T bzgl. $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_2 - 1)$ sowie die Tangenten an T in jedem ihrer Punkte bzgl. $\mathrm{Null}^{\mathrm{a}}(X_2 - 1)$.

Tutoriumsaufgabe 31 (zyklische Vektorräume)**.**

(a) Es seien $A_i \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ gegeben durch

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie für $i \in \{1, 2, 3\}$, ob $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ zyklisch bzgl. A_i ist und bestimmen Sie gegebenenfalls einen zyklischen Vektor.

(b) Es seien $A, B, C \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob $\mathbb{F}_5^{3\times 1}$ zyklisch bzgl. A bzw. B bzw. C ist und bestimmen Sie gegebenenfalls einen zyklischen Vektor.

Tutoriumsaufgabe 32 (reelle affine Normalform von affinen Quadriken)**.** Es sei $q\colon \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}) := x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 3x_1 + 1.$$

Bestimmen Sie eine affine Matrix $T \in \mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$ so, dass das zu $r\colon \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, P \mapsto q(TP)$ gehörige Polynom in reeller affiner Normalform ist.

Tutoriumsaufgabe 33 (Jordan-Blöcke)**.** Es sei $J := \mathrm{Diag}(\mathrm{J}_4(1), \mathrm{J}_3(1), \mathrm{J}_1(1)) \in \mathbb{Q}^{8\times 8}$ eine Matrix in Jordan-Normalform.

(a) Zeigen Sie, dass $\chi_J = (X-1)^8$ ist.

(b) Es sei $N := J - \mathrm{I}_8$. Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} \widetilde{N}^k$ und $\operatorname{Bild} \widetilde{N}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie ferner $(\operatorname{Kern} \widetilde{N}^k)/(\operatorname{Kern} \widetilde{N}^{k-1})$ und $(\operatorname{Bild} \widetilde{N}^{k-1})/(\operatorname{Bild} \widetilde{N}^k)$ für $k \in \mathbb{N}$.

(c) Geben Sie μ_J und $\operatorname{Dim} \mathrm{E}_J(1)$ an.

Tutoriumsaufgabe 34 (Jordan-Normalform)**.** Es sei $A \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{F}_3)$ so, dass $T^{-1}AT$ in Jordan-Normalform ist. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\chi_A = (X-1)^4(X+1)$ ist.

Tutoriumsaufgabe 35 (Vertretersysteme von Ähnlichkeitsklassen)**.** Bestimmen Sie ein Vertretersystem der Ähnlichkeitsklassen in $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Tutoriumsaufgabe 36 (lineare Differentialgleichungen)**.**

(a) Bestimmen Sie alle $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f'' = f + f'$ und $f(0) = 0$.

(b) Bestimmen Sie alle $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f''' = -4f' + 4f''$.

Tutoriumsaufgabe 37 (Gram-Matrix)**.** Es sei $\Phi\colon \mathbb{C}[X]_{\mathrm{Grad}\leq 2} \times \mathbb{C}[X]_{\mathrm{Grad}\leq 2} \to \mathbb{C}, (p,q) \mapsto \int_{-1}^{1} \overline{p(x)} q(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ ein komplexes Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[X]_{\mathrm{Grad}\leq 2}$ ist.

(b) Berechnen Sie die Gram-Matrix von Φ bzgl. der Basis $B := (1, X, X^2)$.

(c) Berechnen Sie die Gram-Matrix von Φ bzgl. der Basis $C := (1, \mathrm{i}X, -X^2)$.

(d) Berechnen Sie $\Phi(\mathrm{i} + (1+2\mathrm{i})X, (2-\mathrm{i})X^2)$ und $\Phi((2-\mathrm{i})X^2, \mathrm{i} + (1+2\mathrm{i})X)$.

Tutoriumsaufgabe 38 (Normalform für hermitesche Matrizen)**.** Es sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -2+2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ mit T^*AT in hermitescher Normalform. Was ist die Signatur von A?

Tutoriumsaufgabe 39 (beste Approximation und Abstand)**.** Es sei $\mathcal{U} \leq \mathbb{C}^{2\times 1}$ gegeben durch

$$\mathcal{U} := \langle \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \rangle.$$

Bestimmen Sie bzgl. des Standardskalarprodukts die beste Approximation von e_1 an $\mathcal{U}$ sowie den Abstand von e_1 und $\mathcal{U}$.

Tutoriumsaufgabe 40 (Wurzel)**.** Es sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}_{\text{herm}}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 3-3\mathrm{i} & -3 \\ 3+3\mathrm{i} & 10 & -3-3\mathrm{i} \\ -3 & -3+3\mathrm{i} & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine positiv definite Matrix $R \in \mathbb{C}^{3\times 3}_{\text{herm}}$ mit $R^2 = A$. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\chi_A = (X-4)^2(X-16)$ ist.

Tutoriumsaufgabe 41 (Smith-Normalform)**.**

(a) Es sei $A \in \mathbb{Z}^{3\times 4}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 10 & -5 \\ 1 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ so, dass SAT in Smith-Normalform ist.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}[X]^{2\times 3}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} X^2+X & X^3+X^2 \\ X^3+X^2 & X^4+X^3+X^2-X \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Smith-Normalform von A.

Tutoriumsaufgabe 42 (Einheiten)**.** Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein Element $u \in R$ heißt eine *Einheit* von R, falls es in R (bzgl. der Multiplikation) invertierbar ist. Wir bezeichnen mit $R^\times := \{u \in R \mid u \text{ Einheit in } R\}$ die Menge der Einheiten in R.

(a) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie $K^\times$, $K[X]^\times$, $\mathbb{Z}^\times$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

(b) Zeigen Sie, dass $R^\times$ bzgl. der von R vererbten Multiplikation eine Gruppe bildet.

Tutoriumsaufgabe 43 (Assoziiertheit)**.** Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $x, y \in R$. Dann heißt x *assoziiert* zu y, falls ein $u \in R^\times$ existiert mit $y = ux$. Zeigen Sie:

(a) Assoziiertheit bildet eine Äquivalenzrelation auf R.

(b) Falls R ein Integritätsbereich (d.h. ein Unterring eines Körpers) ist, so gilt für $x, y \in R$: Es ist x assoziiert zu y genau dann, wenn $x \mid y$ und $y \mid x$.

***Tutoriumsaufgabe 44** (irreduzible und prime Elemente)**.** Es sei R ein Integritätsbereich und $\tilde{R} := R \setminus (\{0\} \cup R^\times)$. Ein Ringelement $a \in \tilde{R}$ heißt *prim* (oder ein *Primelement*), falls $a \mid x$ oder $a \mid y$ für alle $x, y \in R$ mit $a \mid xy$. Ein Ringelement $a \in \tilde{R}$ heißt *irreduzibel*, falls $x \in R^\times$ oder $y \in R^\times$ für alle $x, y \in R$ mit $a = xy$.
Zeigen Sie: Wenn ein Element $a \in R$ prim ist, dann ist es auch irreduzibel.

Tutoriumsaufgabe 45 (Isomorphietypen endlicher abelscher Gruppen)**.** Bestimmen Sie alle Isomorphietypen endlicher abelscher Gruppen der Ordnungen 27 und 108.

Tutoriumsaufgabe 46 (Möglichkeiten der Frobenius-Normalform)**.** Bestimmen Sie alle möglichen Frobenius-Normalformen (bis auf Reihenfolge der Begleitmatrizen) von Matrizen in $\mathbb{Q}^{5\times 5}$ mit charakteristischem Polynom $(X-1)^3(X+1)^2$.

Tutoriumsaufgabe 47 (Frobenius-Normalform)**.** Bestimmen Sie die Frobenius-Normalform von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Tutoriumsaufgabe 48 (Faktormoduln und direkte Summe)**.** Es seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und M_i, U_i für $i \in \{1, \ldots, n\}$ Moduln über R mit $U_i \leq M_i$. Zeigen Sie, dass $\bigoplus_{i=1}^n U_i$ ein Untermodul von $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ ist mit $(\bigoplus_{i=1}^n M_i)/(\bigoplus_{i=1}^n U_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n (M_i/U_i)$.