

Vorkurs zur linearen Algebra

Übungsblatt 2

Aufgabe 6 (Abbildungen).

- (a) Liefert $f := \{(2, 3), (1, 2)\}$ eine Abbildung von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{1, 2, 3\}$?
- (b) Liefert $f := \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ eine Abbildung von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{2, 3, 4\}$?
- (c) Liefert $f := \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ eine Abbildung von $\{1, 2\}$ nach $\{1, 3\}$?
- (d) Liefert $f := \{(x, x+3) \mid x \in \{1, 2, 3\}\}$ eine Abbildung von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{4, 5, 6\}$?
- (e) Liefert $f := \{(y+3, y) \mid y \in \{1, 2, 3\}\}$ eine Abbildung von $\{4, 5, 6\}$ nach $\{1, 2, 3\}$?

Aufgabe 7 (Abbildungen). Es sei X eine Menge. Bestimmen Sie $\text{Map}(\emptyset, X)$ und $\text{Map}(X, \emptyset)$.**Aufgabe 8** (Komposita). Bestimmen Sie für folgende Abbildungen $g \circ f$ und/oder $f \circ g$, sofern definiert.

- (a) Es seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto (x+1)^2$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto y-1$.
- (b) Es seien $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2$ und $g: \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{N}_0, 1 \mapsto 0, 2 \mapsto 100$.
- (c) Es seien $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, n \mapsto (n-1, 2)$ und $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$.

Aufgabe 9 (inverse Abbildung). Zeigen Sie: Es sind $\text{Map}(\{0, 1\}, \{0, 1\}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}, b \mapsto b(0) \cdot 2^0 + b(1) \cdot 2^1$ und $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \text{Map}(\{0, 1\}, \{0, 1\}), n \mapsto (0 \mapsto n \bmod 2, 1 \mapsto n \text{ div } 2)$ zueinander inverse Abbildungen, wobei $n \bmod 2$ den Rest und $n \text{ div } 2$ den ganzzahligen Anteil bei Division mit Rest durch 2 bezeichne.**Aufgabe 10** (Injektivität und Surjektivität). Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

- (a) Zeigen Sie, dass f weder injektiv noch surjektiv ist.
- (b) Finden Sie Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(U) \subseteq V$ so, dass $U \rightarrow V, x \mapsto f(x)$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.
- (c) Finden Sie Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(U) \subseteq V$ so, dass $U \rightarrow V, x \mapsto f(x)$ surjektiv, aber nicht injektiv ist.
- (d) Finden Sie Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(U) \subseteq V$ so, dass $U \rightarrow V, x \mapsto f(x)$ bijektiv ist.

Aufgabe 11 (Injektivität und Surjektivität). Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Wenn f und g injektiv sind, dann ist $g \circ f$ injektiv. Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv. Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist g injektiv.
- (b) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $g \circ f$ surjektiv. Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist f surjektiv. Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.
- (c) Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $g \circ f$ bijektiv. Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist f bijektiv. Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist g bijektiv.

Aufgabe 12 (Bild, Urbild). Es seien $X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $Y := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, und es sei $f: X \rightarrow Y, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 8, 6 \mapsto 8$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Bestimmen Sie $f(\{1, 2, 5, 6\}), f^{-1}(\{2, 8\}), f^{-1}(\{2, 3\}), f^{-1}(\{5\}), f^{-1}(\{9\}), f(X)$ und $f^{-1}(Y)$.**Aufgabe 13** (Invertierbarkeit). Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (a) Es ist f bijektiv.
- (b) Jede Faser von f besitzt genau ein Element.
- (c) Es ist f invertierbar.