Vorkurs zur linearen Algebra
Übungsblatt 4

Aufgabe 23 (Rechenregeln in Ringen)**.** Es sei R ein Ring. Zeigen Sie:

(a) Für alle $a \in R$ ist $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

(b) Für alle $a \in R$ ist $(-1)a = a(-1) = -a$.

(c) Für alle $a, b \in R$ gilt $(-a)(-b) = ab$.

Aufgabe 24 (Nullteilerfreiheit)**.** Es sei K ein Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie: Wenn $ab = 0$ gilt, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.

Aufgabe 25 (Ringstrukturen auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)**.**

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu einem kommutativen Ring mit Addition $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ und Multiplikation $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1 b_1, a_2 b_2)$ wird. Ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit dieser Struktur ein Körper? (Hinweis: Aufgabe 24.)

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu einem kommutativen Ring mit Addition $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ und Multiplikation $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$ wird. Ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit dieser Struktur ein Körper?

Aufgabe 26 (Relationen)**.**

(a) Finden Sie eine Relation auf $\{1, 2, 3\}$, die transitiv, aber weder reflexiv noch symmetrisch ist.

(b) Finden Sie eine Relation auf $\{1, 2, 3\}$, die reflexiv, aber weder transitiv noch symmetrisch ist.

(c) Finden Sie eine Relation auf $\{1, 2, 3\}$, die symmetrisch, aber weder transitiv noch reflexiv ist.

Aufgabe 27 (Bildgleichheit)**.** Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Es sei c eine Äquivalenzrelation auf Y. Für $x, \tilde{x} \in X$ gelte $x \; c_f \; \tilde{x}$ genau dann, wenn $f(x) \; c \; f(\tilde{x})$ gilt. Zeigen Sie, dass c_f eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(b) Was sind die Äquivalenzklassen bzgl. $=_f$ (wobei $=_f$ wie in (a) definiert sei)?

Aufgabe 28 (Ordnungsrelationen)**.** Es sei X eine Menge. Eine Relation r auf X heißt *antisymmetrisch*, falls für $x, y \in X$ aus $x \; r \; y$ und $y \; r \; x$ stets $x = y$ folgt. Eine (*partielle*) *Ordnungsrelation* auf X ist eine Relation auf X, welche transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist. Zeigen Sie:

(a) Die Teilbarkeitsrelation $\mid$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$.

(b) Die Teilmengenrelation $\subseteq$ auf $\operatorname{Pot}(X)$ ist eine Ordnungsrelation auf $\operatorname{Pot}(X)$.