

Konstruktionen perfekter Gitter

Construction of perfect lattices

MASTERARBEIT

vorgelegt der
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

angefertigt am
LEHRSTUHL D FÜR MATHEMATIK
RWTH AACHEN UNIVERSITY

von
SIMON EISENBARTH
aus Odenthal

betreut von
PROF. DR. GABRIELE NEBE
PROF. DR. ALICE NIEMEYER

im September 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Kugelpackungen	9
1.1	Definitionen	9
1.2	Das Kugelpackungsproblem	11
2	Familien perfekter Gitter	19
2.1	Minimum 2	19
2.2	Minimum 3	20
2.3	Minimum 4	21
3	Laminierungen	27
3.1	Schwache arithmetische Laminierungen	27
3.2	Ergebnisse für $m = 3$	30
4	Das Gitter L_G	37
4.1	Definition und Beispiele	37
4.2	Die Automorphismengruppe	41
4.3	Starke Eutaxie	43
5	Anhang	49

Einleitung

Eine Kugelpackung im $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ ist eine Anordnung unendlich vieler $(n-1)$ -dimensionaler Sphären, so dass sich diese Kugel höchstens berühren, aber nicht schneiden. Jedes Gitter L in $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ definiert eine Kugelpackung, die zu L assoziierte Kugelpackung: Die Mittelpunkte der Kugeln sind gerade die Gitterpunkte und der Radius beträgt $\frac{1}{2}\sqrt{\min(L)}$. Die dichtesten Gitter sind gegeben durch die globalen Maxima der Hermiteschen Dichtefunktion

$$\gamma(L) = \frac{\min(L)}{\det(L)^{1/n}}.$$

Diese sind bisher in den Dimensionen 1 bis 8 und 24 bekannt. Der 3-dimensionale Fall wurde 1831 von C. Gauß betrachtet. A. Korkine und G. Zolotareff bestimmten 1877 die dichtesten Gitter in den Dimensionen 4 und 5 ([KZ77]). H. Blichfeldt bestimmte 1935 in [Bli35] die dichtesten Gitter in den Dimensionen 6, 7 und 8. 2009 konnten H. Cohn und A. Kumar zeigen, dass das Leech-Gitter Λ_{24} das dichteste Gitter in Dimension 24 ist ([CK09]).

Die lokalen Maxima der Hermiteschen Dichtefunktion heißen extreme Gitter. Diese sind ebenfalls in den Dimensionen 1 bis 8 bekannt, die Klassifizierung gelang aber erst wesentlich später als die Bestimmung der dichtesten Gitter. Korkine und Zolotareff konnten durch kombinatorische Beweise alle 4- und 5-dimensionalen extremen Gitter klassifizieren (ebenfalls in [KZ77]). In ihrem Beweis benutzten sie, dass extreme Gitter eindeutig durch die Koordinaten ihrer kürzesten Vektoren bestimmt sind. G. Voronoï nannte diese Eigenschaft 1908 „perfekt“ (siehe [Vor08]). Dies ist genau dann der Fall, wenn die Projektionen auf die kürzesten Vektoren den Raum aller symmetrischen Endomorphismen des \mathbb{R}^n erzeugen, d.h.

$$\langle x^{\text{tr}}x \mid x \in \text{Min}(L) \rangle = \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}.$$

Er bewies außerdem, dass perfekte Gitter ähnlich zu einem ganzen Gitter sind und in jeder Dimension nur endlich viele Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter existieren. Zusätzlich gab er einen Algorithmus an, mit dem sich für eine gegebene Dimension alle perfekten Ähnlichkeitsklassen berechnen lassen. Hierfür werden diese mit der Struktur eines endlichen, zusammenhängenden Graphen versehen. Alle Ergebnisse in höheren Dimensionen wurden durch die Bestimmung dieses sogenannten Voronoï-Graphen erzielt. E.S. Barnes schaffte dies 1957 für Dimension 6 ([Bar57a]). Hier existiert ein perfek-

tes Gitter, welches nicht extrem ist. Dieses war Voronoï ebenfalls bekannt, er konnte die Klassifizierung bis zu seinem Tod 1908 allerdings nicht fertig stellen. D-O. Jaquet bestimmte 1971 den Voronoï-Graphen in Dimension 7 ([JC93]). Eine Liste von 10916 perfekten Gittern in Dimension 8 wurde 1996 von M. Laïhem, C. Baril, H. Napias und C. Batut aufgestellt, 2005 konnte schließlich von M. Dutour Sikirić, A. Schürmann und F. Vallentin bewiesen werden, dass diese Liste komplett ist ([DSSV07]). Nach mehreren Monaten Rechenzeit konnten sie mit Hilfe des Voronoï-Algorithmus mehr als 500000 perfekte Gitter in Dimension 9 finden, dann wurden die Berechnungen abgebrochen. Voronoï bewies außerdem, dass ein Gitter genau dann extrem ist, wenn es perfekt und eutaktisch ist. Insgesamt ergibt sich also für die Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter:

Dimension	1	2	3	4	5	6	7	8	9	24
# Perfekt	1	1	1	2	3	7	33	10916	> 500000	
# Extrem	1	1	1	2	3	6	30	2408		
Dichtestes Gitter	A_1	A_2	A_3	D_4	D_5	E_6	E_7	E_8		Λ_{24}

Interessant ist natürlich die Frage, welche dieser Gitter dichteste Kugelpackungen liefern. T. Hales konnte dies 1998 im 3-dimensionalen Fall mittels eines Computerbeweises zeigen und damit eine Vermutung von Kepler beweisen. Im März 2016 veröffentlichte M. Viazovska einen Beweis, der zeigt, dass das Wurzelgitter E_8 die dichteste Kugelpackung in Dimension 8 ist ([Via16]). Wenig später konnte sie in Zusammenarbeit mit anderen und mit ähnlichen Methoden zeigen, dass das Leech-Gitter ebenfalls eine dichteste Kugelpackung liefert ([CKM⁺16]).

Die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter scheint mit wachsender Dimension stark anzusteigen. Tatsächlich bewies R. Bacher in [Bac15], dass schon die Anzahl der perfekten Teilgitter in \mathbb{Z}^d mit Minimum 4 stärker wächst als jedes Polynom in d . Hierfür gab er verschiedene Familien solcher Teilgitter an und bewies deren Perfektheit. Diese werden in Kapitel 2 beschrieben. Zusätzlich wird in diesem Kapitel gezeigt, dass die irreduziblen Wurzelgitter perfekt (sogar extrem) sind, insbesondere existiert also in jeder Dimension ein perfektes Gitter mit Minimum 2. Für das Minimum 3 waren lange Zeit nur endlich viele perfekte Gitter bekannt. R. Bacher gab in [Bac15] die mir einzige bekannte unendliche Familie perfekter Gitter mit Minimum 3 an. Diese Gitter haben Dimension $2^c - 1$ für $c \geq 3$. J. Martinet und B. Venkov gaben in [MV05] eine obere Abschätzung von

$$s_3(n) := \max\left\{ \frac{|\text{Min}(L)|}{2}, L \text{ ist ganzes Gitter der Dimension } n \text{ und Minimum } 3 \right\}$$

an:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s_3(n) \leq$	1	2	4	6	10	16	28	30	34	63
$n(n+1)/2$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Daraus folgt, dass es in den Dimensionen 2 bis 6 sowie 8 und 9 kein perfektes Gitter mit Minimum 3 geben kann. Es ist noch eine offene Frage, in welchen Dimensionen ein solches Gitter existiert und in welchen nicht.

Dies motivierte die Betrachtung der schwachen arithmetischen Laminierung nach Plesken und Pohst, da diese aufsteigende Folgen von ganzen Gittern mit vorgegebenem Minimum $m \in \mathbb{N}$ liefert. Hierbei wird zu einem gegebenen n -dimensionalen Gitter Λ_n ein geeignetes $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}\Lambda_n$ mit $(y, y) = m$ hinzugefügt, so dass die Determinante minimal ist. Für $m = 3$ terminieren all diese Folgen im 23-dimensionalen unimodularen Gitter Q_{23} , bzw. ab dann sind die Gitter orthogonale Summen von zuvor berechneten Gittern. Conway und Sloane gaben in [CS99], Kapitel 6, eine ähnliche Konstruktion an, die sie Laminierung nannten. Hier ist Λ_0 das triviale Gitter $\{0\}$ und für $n \geq 1$ betrachte alle Gitter mit Minimum 4, die mindestens ein Λ_{n-1} als Teilgitter haben. Jedes dieser Gitter mit minimaler Determinante ist dann ein laminiertes Gitter Λ_n . Diese Gitter wurden bis Dimension 25 bestimmt und es stellt sich heraus, dass bis Dimension 24 alle Gitter ganz sind und von den kürzesten Vektoren erzeugt werden. Zusätzlich erhält diese Art der Laminierung Perfektheit. Dies ist bei der Konstruktion nach Plesken und Pohst leider nicht der Fall, von den 59 berechneten Gittern in Dimension ≤ 23 sind 18 perfekt. Daher habe ich die „perfekte Laminierung“ analog zur schwachen arithmetischen Laminierung definiert. Auch hier wird ein $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}\Lambda_n$ mit $(y, y) = m$ zu Λ_n hinzugefügt, allerdings so, dass möglichst die Perfektheit erhalten bleibt. Mit den 18 perfekten schwach laminierten Gittern als Startgitter der perfekten Laminierung konnten somit 83 neue perfekte, ganze Gitter mit Minimum 3 berechnet werden. Leider terminierte auch hier jede Folge in Dimension 23.

Dimension	1	7	16	17	18	19	20	21	22	23
Anz. schwach lam. und perfekt	1	1	1	1	2	4	3	2	2	1
Anz. perfekt lam.	0	0	0	1	2	8	20	26	20	6

In Kapitel 4 wird eine Familie von perfekten Gittern mit Minimum 4 untersucht. Sei $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine endliche abelsche Gruppe, dann ist das Gitter L_G ein Teilgitter von A_{n-1} , welches gewisse Relationen der Gruppe G erfüllt:

$$L_G := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n x_i g_i = 0_G\}.$$

Falls G aus den rationalen Punkte einer elliptische Kurve über einem endlichen Körper besteht, ist G isomorph zu $C_m \times C_n$ für geeignete $m, n \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall bewies Sha in [Sha15], dass für L_G eine Basis von Minimalvektoren existiert. Die Gitter L_{C_n} wurden bereits 1957 von Barnes in [Bar57b] untersucht. Er bewies, dass diese für $n \geq 7$ perfekt sind. Martinet zeigte in [Mar03], Abschnitt 5.3, dass L_{C_n} ebenfalls eine Basis von kürzesten Vektoren besitzt und gab für $n \geq 12$ die Automorphismengruppe an, welche isomorph zu $C_2 \times (G \rtimes \text{Aut}(G))$ ist. Es stellt sich heraus, dass sich diese Aussagen für alle endlichen abelschen Gruppen verallgemeinern lassen. Fukshansky et. al. bewiesen in [BFGM15a], dass L_G (außer im Fall $G \cong C_4$) eine Basis aus kürzesten Vektoren hat und Bacher bewies in [Bac15], dass L_G für $|G| \geq 9$ perfekt ist. Die Automorphismengruppe konnte allerdings bis zur Abgabe dieser Arbeit nur für $|G| \leq 25$ verifiziert werden. Fukshansky et. al. bewiesen im Preprint [BFGM15b], dass L_G genau dann stark eutaktisch ist, wenn G elementar abelsch oder $|G|$ ungerade ist. Hierfür werden kürzere, alternative Beweise vorgestellt, die die zugrunde liegende Gruppenstruktur ausnutzen.

1 Kugelpackungen

In diesem Kapitel werden Gitter definiert und grundlegende Eigenschaften von Kugelpackungen beschrieben, welche zu Gittern assoziiert sind.

1.1 Definitionen

Definition 1.1 (i) Sei $E = (\mathcal{V}, (\cdot, \cdot))$ ein euklidischer Vektorraum. L heißt Gitter in E , falls eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von \mathcal{V} existiert mit $L = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbb{Z}}$.

(ii) L heißt ganz, falls $(\ell, \ell') \in \mathbb{Z}$ ist für alle $\ell, \ell' \in L$.

Definition 1.2 (i) Die Matrix $G(B) = ((b_i, b_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt Gram-Matrix bzgl. der Basis B .

(ii) $\det(L) = \det(G(B)) = \text{vol}(\mathbb{R}^n / L)^2$ heißt die Determinante des Gitters.

Die Determinante eines Gitters ist unabhängig von der gewählten Basis.

Definition 1.3 Das Minimum eines Gitters L ist

$$\min(L) := \min\{ (\ell, \ell) \mid \ell \in L \setminus \{0\} \}.$$

Dann heißt

$$\text{Min}(L) := \{ \ell \in L \mid (\ell, \ell) = \min(L) \}$$

die Menge der kürzesten Vektoren (oder Minimalvektoren) von L .

Bemerkung 1.4 Ein Gitter hat nur endlich viele kürzeste Vektoren.

Bemerkung 1.5 Sei L ein Gitter in $(\mathcal{V}, (\cdot, \cdot))$ mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$. Dann ist

$$L^\# := \{v \in \mathcal{V} \mid (v, l) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } l \in L\}$$

ebenfalls ein Gitter, das zu L duale Gitter. Die Dualbasis $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ von B ist eine Gitterbasis von $L^\#$. Es gilt $G(B)G(B^*) = I_n$ und daher $\det(L)\det(L^\#) = 1$. L ist genau dann ganz, wenn $L \subseteq L^\#$ gilt. In diesem Fall ist $L^\#/L$ eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung $\det(L)$. Sind (d_1, \dots, d_n) die Invariantenteiler von $G(B)$, so ist $L^\#/L \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$. Im Fall $L = L^\#$ heißt L unimodular.

Definition 1.6 Zwei Gitter L, L' in E heißen isometrisch, wenn eine Isometrie $\varphi \in O(E)$ existiert mit $\varphi(L) = L'$. Falls $\varphi(L) = kL'$ gilt für ein $\varphi \in O(E)$ und ein $k \in \mathbb{R}_{>0}$, heißen die Gitter ähnlich.

Bemerkung 1.7 Die Automorphismengruppe eines Gitter L ,

$$\text{Aut}(L) := \{\varphi \in O(E) \mid \varphi(L) = L\},$$

ist der Schnitt von $\text{GL}(L)$ und $O(E)$. $\text{GL}(L)$ ist eine diskrete Untergruppe von $\text{GL}(E)$ und $O(E)$ ist kompakt, insbesondere ist die Automorphismengruppe also endlich.

Lemma 1.8 (Hadamard-Ungleichung, [Mar03] Theorem 2.1.1.) Sei L ein Gitter und seien v_1, \dots, v_n linear unabhängige Vektoren in L . Dann gilt

$$\det(L) \leq (v_1, v_1) \cdot (v_2, v_2) \cdots (v_n, v_n),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn die v_i paarweise orthogonal sind und L erzeugen.

Lemma 1.9 (Hermite-Ungleichung, [Mar03] Theorem 2.2.1.) Jedes Gitter L hat eine Basis (b_1, \dots, b_n) , so dass

$$(b_1, b_1) \cdot (b_2, b_2) \cdots (b_n, b_n) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/2} \det(L)$$

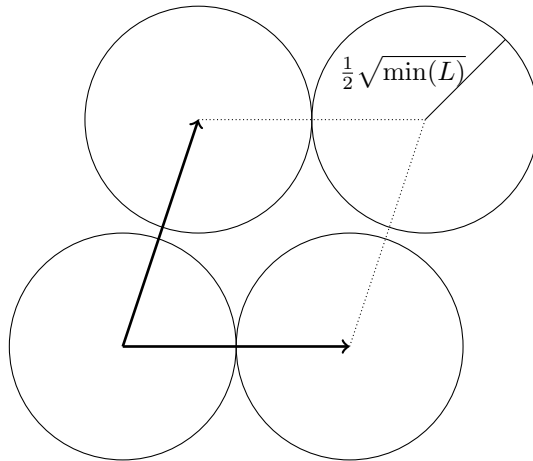
gilt.

1.2 Das Kugelpackungsproblem

Eine Kugelpackung im $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ ist eine Anordnung unendlich vieler $(n-1)$ -dimensionaler Sphären, so dass sich diese Kugel höchstens berühren, aber nicht schneiden. Jedes Gitter L in $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ definiert eine Kugelpackung, die zu L assoziierte Kugelpackung: Die Mittelpunkte der Kugeln sind genau die Gitterpunkte und der Radius beträgt $\frac{1}{2}\sqrt{\min(L)}$. Zu einer solchen Kugelpackung untersucht man nun, wie dicht diese Kugeln den Raum ausfüllen. In jedem Fundamentalebereich von L liegt genau eine Kugel, als Quotient ergibt sich also

$$\frac{\text{vol}(S_r^{n-1})}{\text{vol}(\mathbb{R}^n / L)} = \frac{\pi^{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \min(L)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \det(L)^{1/2}}.$$

Nur der letzte Faktor ist von dem Gitter abhängig.



Definition 1.10 Die Funktion

$$\gamma(L) := \frac{\min(L)}{\det(L)^{1/n}}$$

heißt *Hermiteische Dichtefunktion*.

Die lokalen Maxima dieser Funktion sind bisher in den Dimensionen 1 bis 8 und 24 bekannt. Der 3-dimensionale Fall wurde 1831 von C. Gauß betrachtet. A. Korkine und G.

Zolotareff bestimmten 1877 die dichtesten Gitter in den Dimensionen 4 und 5 ([KZ77]). H. Blichfeldt bestimmte 1935 in [Bli35] die dichtesten Gitter in den Dimensionen 6, 7 und 8. 2009 konnten H. Cohn und A. Kumar zeigen, dass das Leech-Gitter Λ_{24} das dichteste Gitter in Dimension 24 ist ([CK09]).

Definition 1.11 *Ein Gitter L heißt extrem, falls es ein lokales Maximum der Dichtefunktion γ ist.*

Sei E ein euklidischer Vektorraum und sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(E)$ die Menge aller Gitter in E . Für ein beliebiges $\Lambda \in \mathcal{L}$ gilt $\mathcal{L} = \text{GL}(E)\Lambda$. Die Menge \mathcal{L} kann also mit der Menge der Restklassen $\text{GL}(E)/\text{Stab}_{\text{GL}(E)}(\Lambda)$ identifiziert werden. Nach Festlegung einer Basis von Λ gilt $\text{GL}(E) \cong \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\text{Stab}_{\text{GL}(E)}(\Lambda) \cong \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, also wird \mathcal{L} mit $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ identifiziert und erhält dadurch eine Topologie.

Die 4- und 5-dimensionalen extremen quadratische Formen (und somit die extremen Gitter in diesen Dimensionen) wurden 1877 von A. Korkine und G. Zolotareff klassifiziert (siehe [KZ77]). In ihrem Beweis benutzten sie, dass extreme Gitter eindeutig durch die Koordinaten ihrer kürzesten Vektoren bestimmt sind: Sei L ein extremes Gitter mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ und seien $\{x_1, \dots, x_m\}$ die Koordinaten der kürzesten Vektoren bezüglich der Basis B . Dann gilt

$$\{F \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n} \mid x_i F x_i^{\text{tr}} = \min(L) \text{ für alle } i\} = \{G(B)\}.$$

Angenommen, es gibt 2 Lösungen F und F' . Betrachte die Spurbilinearform $(A, B) \mapsto \text{Spur}(AB)$ auf $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$. Dann gilt für alle i :

$$\begin{aligned} \text{Spur}((F - F')(x_i^{\text{tr}} x_i)) &= \text{Spur}(F x_i^{\text{tr}} x_i) - \text{Spur}(F' x_i^{\text{tr}} x_i) \\ &= \text{Spur}(x_i F x_i^{\text{tr}}) - \text{Spur}(x_i F' x_i^{\text{tr}}) \\ &= \min(L) - \min(L) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $(F - F')$ orthogonal zu $\langle x_i^{\text{tr}} x_i \mid i = 1, \dots, m \rangle$ bezüglich der Spurbilinearform und da diese nicht ausgeartet ist, ist die Lösung genau dann eindeutig, wenn die $x_i^{\text{tr}} x_i$ den Raum aller symmetrischen Matrizen erzeugen. G. Voronoï nannte diese Eigenschaft „perfekt“ (siehe [Vor08], Seite 100).

Definition 1.12 *Ein Gitter L in $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ heißt perfekt, falls die Projektionen auf die kürzesten Vektoren den Raum aller symmetrischen Endomorphismen des \mathbb{R}^n erzeugen, d.h.*

$$\langle x^{\text{tr}} x \mid x \in \text{Min}(L) \rangle = \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}.$$

Falls L kein Gitter in $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ ist, sondern in einem dazu isometrischen Raum liegt, können entweder die Koordinatendarstellungen der kürzesten Vektoren betrachtet werden oder die Dimension von $\langle x^{\text{tr}}x \mid x \in \text{Min}(L) \rangle$.

Bemerkung 1.13 Sei L ein Gitter in $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$. Dann gilt:

- (i) Falls L perfekt ist, hat L mindestens $n(n+1)$ kürzeste Vektoren.
- (ii) Ist L die orthogonale Summe von zwei echten Teilgittern, dann ist L nicht perfekt, da die Projektionen auf die kürzesten Vektoren nur Blockmatrizen erzeugen können.

Korollar 1.14 Sei L ein perfektes Gitter in $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$. Dann erzeugen die kürzesten Vektoren von L den Raum \mathbb{R}^n .

BEWEIS Nach Voraussetzung erzeugen die Matrizen $(x^{\text{tr}}x)_{x \in \text{Min}(L)}$ den Raum $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$, also insbesondere alle symmetrischen Matrizen mit beliebiger erster Zeile. Für eine Linearkombination $\sum_{x \in \text{Min}(L)} \alpha_x (x^{\text{tr}}x)$, $\alpha_x \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \text{Min}(L)$, ist die erste Zeile aber gegeben durch $\sum_{x \in \text{Min}(L)} (\alpha_x x_1)x$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Lemma 1.15 Jedes perfekte Gitter ist ähnlich zu einem ganzen Gitter.

BEWEIS Sei L ein perfektes Gitter mit Basis B und seien $\{x_1, \dots, x_m\}$ die Koordinaten der kürzesten Vektoren bezüglich der Basis B . Dann ist die Gram-Matrix $G(B)$ von L die eindeutige Lösung der linearen Gleichungen

$$F \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n} \text{ so dass } x_i F x_i^{\text{tr}} = \min(L) \text{ für alle } i = 1, \dots, m.$$

Die Koeffizienten liegen alle in \mathbb{Z} , also gilt $G(B) \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ und L ist ähnlich zu einem ganzen Gitter. \square

Satz 1.16 (Voronoi, [Vor08]) In jeder Dimension n existieren nur endlich viele Ähnlichkeitsklassen von perfekten Gittern.

BEWEIS Sei L ein perfektes Gitter der Dimension n und sei ohne Einschränkung $\min(L) = 1$. Da die kürzesten Vektoren von L den Raum $\mathbb{R}L$ erzeugen, existieren insbesondere n linear unabhängige Vektoren der Norm 1 in L . Aus der Hadamard-Ungleichung (1.8) folgt $\det(L) \leq 1$. Aus der Hermite-Ungleichung (1.9) folgt nun, dass eine Basis (b_1, \dots, b_n) von L existiert, so dass

$$(b_1, b_1) \cdot (b_2, b_2) \cdots (b_n, b_n) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/2}.$$

Da $(b_i, b_i) \geq 1$, gilt insbesondere $(b_i, b_i) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/2}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Sei nun $x = \sum a_i b_i \in \text{Min}(L)$. Betrachte für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ den Koeffizienten a_i . Wenn dieser nicht Null ist, sind $(b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n)$ linear unabhängig und es gilt

$$|a_i|^2 = \frac{\det(\langle b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n \rangle)}{\det(\langle b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n \rangle)}.$$

Aus der Hadamard-Ungleichung folgt nun

$$\det(\langle b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n \rangle) \leq (b_1, b_1) \cdots (b_{i-1}, b_{i-1})(x, x)(b_{i+1}, b_{i+1}) \cdots (b_n, b_n)$$

und aus der Hermite-Ungleichung folgt

$$\det(\langle b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n \rangle) = \det(L) \geq (b_1, b_1) \cdots (b_n, b_n) \left(\frac{4}{3}\right)^{-n(n-1)/2},$$

also insgesamt

$$|a_i|^2 \leq \frac{(x, x)}{(b_i, b_i)} \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/2} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/2}.$$

Also gibt es für die Koordinatenvektoren der kürzesten Vektoren des Gitters nur endlich viele Möglichkeiten. Da ein perfektes Gitter aber durch diese Koordinaten eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung. \square

Bis Dimension 5 wurden die perfekten Gitter 1877 von A. Korkine und G. Zolotareff durch kombinatorische Beweise klassifiziert (siehe [KZ77]). Voronoi gab 1907 einen Algorithmus an, mit dem sich für eine gegebene Dimension alle Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter brechnen lassen. Hierfür werden diese Klassen mit der Struktur eines endlichen, zusammenhängenden Graphen versehen. Alle Ergebnisse in höheren Dimensionen wurden durch die Bestimmung dieses sogenannten Voronoi-Graphen erzielt. E.S. Barnes schaffte dies 1957 für Dimension 6 (siehe [Bar57a]). Hier existiert ein perfektes Gitter, welches nicht extrem ist. Dies war Voronoi ebenfalls bekannt, er konnte die Klassifizierung bis zu seinem Tod 1908 allerdings nicht fertig stellen. Jaquet bestimmte 1971 den Voronoi-Graphen in Dimension 7 (siehe [JC93]). Eine Liste von 10916 perfekten Gittern in Dimension 8 wurde 1996 von M. Laïhem, C. Baril, H. Napias und C. Batut aufgestellt, 2005 konnte schließlich von M. Dutour Sikirić, A. Schürmann und F. Vallentin bewiesen werden, dass diese Liste komplett ist (siehe [DSSV07]). Nach mehreren Monaten Rechenzeit konnte sie mit Hilfe des Voronoi-Algorithmus mehr als 500000 perfekte Gitter in Dimension 9 finden, dann wurden die Berechnungen abgebrochen.

Definition 1.17 Ein Gitter L in $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ heißt *eutaktisch*, wenn für alle $x \in \text{Min}(L)$ Koeffizienten $\lambda_x > 0$ existieren mit

$$I_n = \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x (x^{\text{tr}} x).$$

Das Gitter heißt *stark eutaktisch*, falls die λ_x alle gleich gewählt werden können.

Satz 1.18 (Voronoi, [Vor08]) Ein Gitter L ist genau dann *extrem*, wenn es *perfekt* und *eutaktisch* ist.

Diese Aussage wird in [Mar03], Theorem 3.4.6. bewiesen.

Mit Hilfe der Algorithmen in [Rie06] lassen sich perfekte Gitter auf Eutaxie testen.

Dimension	1	2	3	4	5	6	7	8	9	24
# Perfekt	1	1	1	2	3	7	33	10916	> 500000	
# Extrem	1	1	1	2	3	6	30	2408		
Dichtestes Gitter	A_1	A_2	A_3	D_4	D_5	E_6	E_7	E_8		Λ_{24}

Interessant ist natürlich die Frage, welche dieser Gitter dichteste Kugelpackungen liefern. T. Hales konnte dies 1988 im 3-dimensionalen Fall mittels eines Computerbeweises zeigen und damit eine Vermutung von Kepler beweisen. Im März 2016 veröffentlichte M. Viazovska einen Beweis, der zeigt, dass das Wurzelgitter E_8 die dichteste Kugelpackung in Dimension 8 ist ([Via16]). Wenig später konnte sie in Zusammenarbeit mit anderen und mit ähnlichen Methoden zeigen, dass das Leech-Gitter ebenfalls eine dichteste Kugelpackung liefert ([CKM⁺16]).

Lemma 1.19 Sei L ein Gitter in $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ und seien Koeffizienten $\lambda_x \in \mathbb{R}$ für $x \in \text{Min}(L)$ gegeben. Dann sind äquivalent:

- (i) $I_n = \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x (x^{\text{tr}} x).$
- (ii) $(y, z) = \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x (x, y)(x, z)$ für alle $y, z \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) $(b_i, b_j) = \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x (x, b_i)(x, b_j)$ für alle b_i, b_j einer Basis (b_1, \dots, b_n) von \mathbb{R}^n .

$$(iv) \quad (y, y) = \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x(x, y)^2 \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

BEWEIS Die Richtungen (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) sind klar.

Für die Folgerung (iv) \Rightarrow (i) seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} (I_n)_{i,j} &= (e_i, e_j) \\ &= \frac{1}{2}[(e_i + e_j, e_i + e_j) - (e_i, e_i) - (e_j, e_j)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x(x, e_i + e_j)^2 - \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x(x, e_i)^2 - \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x(x, e_j)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x((x, e_i) + (x, e_j))^2 - \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x(x, e_i)^2 - \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x(x, e_j)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \text{Min}(L)} 2\lambda_x(x, e_i)(x, e_j) \\ &= \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x(x^{\text{tr}}x)_{i,j}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Die Definition von eutaktisch sowie die Äquivalenzen oben sind rein formal nur gültig, falls das Gitter in \mathbb{R}^n liegt. Gitter, die dies nicht erfüllen (z.B. das n -dimensionale Wurzelgitter A_n , welches in $(1, \dots, 1)^\perp \leq \mathbb{R}^{n+1}$ liegt), müssten erst isometrisch in \mathbb{R}^n eingebettet werden. Die Gleichungen (ii), (iii) und (iv) sind aber natürlich invariant unter einer Isometrie, hier kann also \mathbb{R}^n durch $\mathbb{R}L$ ersetzt werden und das Gitter kann ohne Einbettung auf Eutaxie getestet werden. Als Folgerung daraus ergibt sich:

Folgerung 1.20 ([Ven01], Proposition 6.2.) *Sei L ein n -dimensionales Gitter und (b_1, \dots, b_n) eine Basis von $\mathbb{R}L$. Dann ist L genau dann stark eutaktisch, wenn ein $c > 0$ existiert, so dass*

$$\sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, b_i)(x, b_j) = c(b_i, b_j) \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

gilt. Falls diese Gleichung erfüllt ist, gilt nach Anwendung des Laplace-Operators $\Lambda_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\delta^2}{\delta \alpha_i^2}$ auf beide Seiten der Gleichung automatisch $c = \frac{\text{min}(L)|\text{Min}(L)|}{n}$.

Satz 1.21 ([Mar03], Proposition 3.5.3.) *Sei L ein n -dimensionales Gitter mit einem $(n-1)$ -dimensionalem Teilgitter L' , welches perfekt in $\mathbb{R}L'$ ist. Dann ist L genau dann perfekt, wenn die kürzesten Vektoren von L , welche nicht in $\mathbb{R}L'$ liegen, den Raum $\mathbb{R}L$ erzeugen.*

BEWEIS Betrachte ohne Einschränkung (nach Anwendung einer geeigneten Isometrie) den Fall $\mathbb{R} L = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R} L' = e_n^\perp \leq \mathbb{R}^n$. Da L' perfekt in $\mathbb{R} L'$ ist, erzeugen die Matrizen $(x^{\text{tr}} x)_{x \in \text{Min}(L')}$ den Raum

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \mid A \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{(n-1) \times (n-1)} \right\}.$$

Seien $\{x_1, \dots, x_m\}$ die kürzesten Vektoren von L , die nicht in $\mathbb{R} L'$ liegen. Insbesondere ist deren letzter Eintrag nicht 0. L ist nun genau dann perfekt, wenn sich mit $(x_i^{\text{tr}} x_i)_{i=1, \dots, m}$ symmetrische Matrizen mit beliebiger letzter Zeile erzeugen lassen. Die letzte Zeile einer Linearkombination $\sum_{i=1}^m \alpha_i (x_i^{\text{tr}} x_i)$ ist aber gegeben durch $\sum_{i=1}^m (\alpha_i x_{in}) x_i$. Also ist L genau dann perfekt, wenn die $(x_i)_{i=1, \dots, m}$ den Raum $\mathbb{R} L$ erzeugen. \square

2 Familien perfekter Gitter

In diesem Kapitel werden verschiedene Familien perfekter Gitter mit Minimum 2, 3 und 4 vorgestellt.

2.1 Minimum 2

Satz 2.1 *Jedes irreduzible Wurzelgitter, das heißt A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 , E_8 , ist perfekt.*

BEWEIS Die Fälle A_1 , D_4 , E_6 , E_7 und E_8 lassen sich explizit berechnen. Für die restlichen Gitter folgt die Aussage mit Satz (1.21): die kürzesten Vektoren von A_n , welche nicht in $\mathbb{R} A_{n-1}$ liegen, sind

$$\pm(e_i - e_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Diese erzeugen den n -dimensionalen Raum $\mathbb{R} A_n = (1, \dots, 1)^\perp \leq \mathbb{R}^{n+1}$.

Die kürzesten Vektoren von D_n , welche nicht in $\mathbb{R} D_{n-1}$ liegen, sind

$$\pm e_i \pm e_n \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n-1$$

und diese erzeugen den Raum $\mathbb{R} D_n = \mathbb{R}^n$. Daraus folgt die Behauptung. □

Da die Automorphismengruppe irreduzibler Wurzelgitter reell irreduzibel ist, folgt aus [Mar03], Theorem 3.6.6., dass diese Gitter stark eutaktisch und damit extrem sind.

Eine weitere Klasse mit Minimum 2 ist das Coxeter-Gitter. Sei r ein Teiler $n+1$, dann ist A_n^r definiert als das eindeutige Gitter, welches A_n enthält und Index r in $A_n^\#$ hat. Dann ist A_n^r perfekt (außer in den Fällen $r=2$ falls $n=2,3$ oder $r=n+1$ falls $n \geq 3$) und hat Minimum 2 (außer $r=n+1$, $r=\frac{n+1}{2}$ oder $r=2$ falls $n=5$). Diese Aussagen werden in [Mar03], Theorem 5.2.1., bewiesen.

2.2 Minimum 3

Aus dem obigen Abschnitt folgt, dass in jeder Dimension ein perfektes Wurzelgitter existiert. Perfekte Gitter mit Minimum 4 existieren in fast jeder Dimension (siehe z.B. Satz (2.7) - genauer gesagt existiert eines in jeder Dimension ≥ 5). Für das Minimum 3 waren lange Zeit nur endlich viele perfekte Gitter bekannt. R. Bacher gab in [Bac15], Kapitel 7, die mir einzige bekannte unendliche Familie perfekter Gitter mit Minimum 3 an. Diese Gitter haben Dimension $2^c - 1$ für $c \geq 3$. J. Martinet und B. Venkov gaben in [MV05], Theorem 1.1, eine obere Abschätzung von

$$s_3(n) := \max\left\{ \frac{\lfloor \text{Min}(L) \rfloor}{2}, L \text{ ist ganzes Gitter der Dimension } n \text{ und Minimum } 3 \right\}$$

an:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s_3(n) \leq$	1	2	4	6	10	16	28	30	34	63
$n(n+1)/2$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Daraus folgt, dass es in den Dimensionen 2 bis 6 sowie 8 und 9 kein perfektes Gitter mit Minimum 3 geben kann. Es ist noch eine offene Frage, in welchen Dimensionen ein solches Gitter existiert und in welchen nicht.

Definition 2.2 Betrachte den Vektorraum \mathbb{F}_2^c der Dimension c über \mathbb{F}_2 und das Tupel (v_1, \dots, v_{2^c-1}) aller nicht-Null Vektoren. Das Gitter $T(\mathbb{F}_2^c)$ ist definiert als der Kern der Abbildung

$$\mathbb{Z}^{2^c-1} \rightarrow \mathbb{F}_2^c, (x_1, \dots, x_{2^c-1}) \mapsto \sum_{i=1}^{2^c-1} x_i v_i \pmod{2}.$$

Dieser Homomorphismus ist surjektiv, also hat das Gitter Index 2^c in \mathbb{Z}^{2^c-1} und daher Determinante 4^c . Die Minimalvektoren sind von der Form $\pm e_i \pm e_j \pm e_k$ so dass $v_i + v_j = v_k$ gilt. Die Anzahl dieser Gleichungen in $\mathbb{F}_2^c \setminus \{0\}$ ist $\frac{1}{3} \binom{2^c-1}{2}$, also hat das Gitter insgesamt $\frac{8}{3} \binom{2^c-1}{2}$ kürzeste Vektoren.

Satz 2.3 Das Gitter $T(\mathbb{F}_2^c)$ ist perfekt für $c \geq 3$.

BEWEIS Seien $i, j, k \in \{1, \dots, 2^c - 1\}$ so dass $i \neq j$ und $v_i + v_k = v_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e_i^{\text{tr}} e_j + e_j^{\text{tr}} e_i &= \frac{1}{4} [(e_i + e_j + e_k)^{\text{tr}} (e_i + e_j + e_k) + (e_i - e_j + e_k)^{\text{tr}} (e_i - e_j + e_k) \\ &\quad - (e_i + e_j - e_k)^{\text{tr}} (e_i + e_j - e_k) - (e_i - e_j - e_k)^{\text{tr}} (e_i - e_j - e_k)]. \end{aligned}$$

Für die Diagonalmatrizen seien $i, j, k \in \{1, \dots, 2^c - 1\}$ so dass (v_i, v_k, v_j) linear unabhängig ist. Definiere

$$v_a = v_i + v_j, \quad v_b = v_i + v_k, \quad v_c = v_j + v_k, \quad v_d = v_i + v_j + v_k.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} e_i^{\text{tr}} e_i = & \frac{1}{12} \left[\begin{aligned} & (e_i + e_j + e_a)^{\text{tr}}(e_i + e_j + e_a) + (e_i - e_j + e_a)^{\text{tr}}(e_i - e_j + e_a) \\ & + (e_i + e_j - e_a)^{\text{tr}}(e_i + e_j - e_a) + (e_i - e_j - e_a)^{\text{tr}}(e_i - e_j - e_a) \\ & + (e_i + e_k + e_b)^{\text{tr}}(e_i + e_k + e_b) + (e_i - e_k + e_b)^{\text{tr}}(e_i - e_k + e_b) \\ & + (e_i + e_k - e_b)^{\text{tr}}(e_i + e_k - e_b) + (e_i - e_k - e_b)^{\text{tr}}(e_i - e_k - e_b) \\ & + (e_i + e_c + e_d)^{\text{tr}}(e_i + e_c + e_d) + (e_i - e_c + e_d)^{\text{tr}}(e_i - e_c + e_d) \\ & + (e_i + e_c - e_d)^{\text{tr}}(e_i + e_c - e_d) + (e_i - e_c - e_d)^{\text{tr}}(e_i - e_c - e_d) \end{aligned} \right] \\ & - \frac{1}{24} \left[\begin{aligned} & (e_j + e_k + e_c)^{\text{tr}}(e_j + e_k + e_c) + (e_j - e_k + e_c)^{\text{tr}}(e_j - e_k + e_c) \\ & + (e_j + e_k - e_c)^{\text{tr}}(e_j + e_k - e_c) + (e_j - e_k - e_c)^{\text{tr}}(e_j - e_k - e_c) \\ & + (e_a + e_d + e_k)^{\text{tr}}(e_a + e_d + e_k) + (e_a - e_d + e_k)^{\text{tr}}(e_a - e_d + e_k) \\ & + (e_a + e_d - e_k)^{\text{tr}}(e_a + e_d - e_k) + (e_a - e_d - e_k)^{\text{tr}}(e_a - e_d - e_k) \\ & + (e_b + e_d + e_j)^{\text{tr}}(e_b + e_d + e_j) + (e_b - e_d + e_j)^{\text{tr}}(e_b - e_d + e_j) \\ & + (e_b + e_d - e_j)^{\text{tr}}(e_b + e_d - e_j) + (e_b - e_d - e_j)^{\text{tr}}(e_b - e_d - e_j) \\ & + (e_c + e_a + e_b)^{\text{tr}}(e_c + e_a + e_b) + (e_c - e_a + e_b)^{\text{tr}}(e_c - e_a + e_b) \\ & + (e_c + e_a - e_b)^{\text{tr}}(e_c + e_a - e_b) + (e_c - e_a - e_b)^{\text{tr}}(e_c - e_a - e_b) \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

2.3 Minimum 4

Die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter scheint mit wachsender Dimension stark anzusteigen (siehe Tabelle vor Lemma (1.19)). Tatsächlich bewies R. Bacher in [Bac15], dass schon die Anzahl der perfekten Teilgitter in \mathbb{Z}^d mit Minimum 4 stärker wächst als jedes Polynom in d . Hierfür gab er verschiedene Familien solcher Teilgitter an und bewies deren Perfektheit.

Definition 2.4 Für $d \in \mathbb{N}$ sei L_d das Teilgitter in \mathbb{Z}^{d+2} , welches orthogonal zu $(1, 1, \dots, 1)$ und $(1, 2, \dots, d+2)$ ist, d.h.

$$L_d = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{d+2}) \in \mathbb{Z}^{d+2} \mid \sum_{i=1}^{d+2} x_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{d+2} ix_i = 0 \right\}.$$

Definition 2.5 O_d sei das Teilgitter in \mathbb{Z}^{d+1} , welches orthogonal zu $(1, 3, 5, \dots, 2d+1)$ ist, d.h.

$$O_d = \{(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1} \mid \sum_{i=1}^{d+1} (2i-1)x_i = 0\}.$$

Definition 2.6 Das Gitter M_d sei definiert als das Teilgitter in \mathbb{Z}^{d+1} , welches orthogonal zu $(0, 1, 2, \dots, d)$ ist und eine gerade Koordinaten-Summe hat, d.h.

$$M_d = \{(x_1, \dots, x_{d+1}) \mid \sum_{i=1}^{d+1} (i-1)x_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{d+1} x_i \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

Satz 2.7 ([Bac15], Theorem 2.1) Das Gitter L_d hat Determinante $\frac{1}{12}(d+1)(d+2)^2(d+3)$ und Minimum 4. Die Anzahl der Paare kürzester Vektoren ist $\frac{1}{24}d(d+2)(2d-1)$ falls d gerade ist und $\frac{1}{24}(d-1)(d+1)(2d+3)$ falls d ungerade ist. Für $d \geq 7$ ist das Gitter perfekt.

BEWEIS Seien $u = (1, 1, \dots, 1)$ und $v = (1, 2, \dots, d+2) \in \mathbb{Z}^{d+2}$. Da \mathbb{Z}^{d+2} unimodular ist, folgt mit [Mar03], Korollar 1.3.5, dass

$$\det(\mathbb{Z}^{d+2} \cap \mathbb{R}\langle u, v \rangle^\perp) = \det(\mathbb{Z}^{d+2} \cap \mathbb{R}\langle u, v \rangle)$$

gilt, also ist

$$\begin{aligned} \det(L_d) &= \det(\langle u, v \rangle) \\ &= \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, v) \\ (v, u) & (v, v) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} d+2 & \frac{(d+3)(d+2)}{2} \\ \frac{(d+3)(d+2)}{2} & \frac{(2d+5)(d+3)(d+2)}{6} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12}(d+1)(d+2)^2(d+3). \end{aligned}$$

Das Gitter L_d hat keine Vektoren mit Quadratnorm 2, da diese von der Form $\pm e_i \pm e_j$ wären und somit nicht orthogonal zu $(1, 2, \dots, d+2)$ sind. Das Wurzelgitter A_{d+1} ist ein Obergitter von L_d und dieses enthält keine Vektoren mit Norm 3. Die Vektoren mit Norm 4 in L_d sind von der Form

$$e_i - e_{i+\alpha} - e_{i+\alpha+\beta} + e_{i+2\alpha+\beta}$$

mit $i \in \{1, \dots, d+1\}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ so dass $i + 2\alpha + \beta \leq d+2$ gilt. Also ist die Anzahl der Paare kürzester Vektoren in L_d gleich

$$\sum_{i=1}^{d+1} \sum_{\alpha=1}^{\lfloor (d+1-i)/2 \rfloor} d+2-i-2\alpha.$$

Diese Summe ist ein Polynom dritten Grades und die Koeffizienten hängen davon ab, ob d gerade oder ungerade ist. Vergleicht man die Werte an den Stellen 2, 4, 6, 8 bzw. 1, 3, 5, 7 mit den angegebenen Formeln folgt die Gleichheit.

Der Beweis der Perfektheit ist eine Induktion nach d , wobei man den Fall $d = 7$ explizit berechnen kann. Betrachte nun das Gitter L_{d+1} . Jeder Vektor ist orthogonal zu $(1, 2, \dots, d+3)$ und $(1, 1, \dots, 1)$, also insbesondere auch zu $(1, 2, \dots, d+3) - (1, 1, \dots, 1) = (0, 1, \dots, d+2)$. Das Teilgitter von L_{d+1} , welches orthogonal zu $(1, 0, \dots, 0)$ ist, ist also isomorph zu L_d . Es reicht also zu zeigen, dass die Minimalvektoren in L_{d+1} , deren erster Eintrag nicht Null ist, den Raum $\mathbb{R} L_{d+1} \cong \mathbb{R}^{d+1}$ erzeugen. Seien dazu

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 - e_3 - e_4 + e_6 \\ v_i &= e_1 - e_2 - e_{i+1} + e_{i+2} \quad \text{für } i = 2, \dots, d+1. \end{aligned}$$

Der Orthogonalraum von v_2, \dots, v_{d+1} wird von

$$(1, 1, \dots, 1), (1, 2, \dots, d+3) \text{ und } u := (1, 1, 0, \dots, 0)$$

erzeugt. Es gilt $\langle v_1, u \rangle = 1$, also folgt $\langle v_1, \dots, v_{d+1} \rangle = \mathbb{R} L_{d+1}$. □

Satz 2.8 ([Bac15], Theorem 3.1) *Das Gitter O_d hat Determinante $\frac{1}{3}(d+1)(2d+1)(2d+3)$ und Minimum 4. Die Anzahl der Paare kürzester Vektoren ist*

$$\frac{1}{18}(2d^3 - 3d^2 - 3d + c_d),$$

wobei

$$c_d = \begin{cases} 0 & \text{falls } d \equiv 0 \pmod{3} \\ 4 & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{3} \\ 2 & \text{falls } d \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Das Gitter O_d ist perfekt für $d \geq 8$.

Satz 2.9 ([Bac15], Theorem 4.1) *Das Gitter M_d hat Determinante $\frac{2}{3}d(d+1)(2d+1)$ und Minimum 4. Die Anzahl der Paare kürzester Vektoren ist*

$$\frac{1}{36}(4d^3 - 3d^2 - 6d + c_d),$$

wobei

$$c_d = \begin{cases} 36 & \text{falls } d \equiv 0 \pmod{6} \\ 41 & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{6} \\ 28 & \text{falls } d \equiv 2 \pmod{6} \\ 45 & \text{falls } d \equiv 3 \pmod{6} \\ 32 & \text{falls } d \equiv 4 \pmod{6} \\ 37 & \text{falls } d \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Zu diesen drei Familien von perfekten Gittern gab Bacher Verallgemeinerungen an, bei denen der Vektor, zu dem die Gitter orthogonal sind, angepasst wird. Alleine mit der Klasse L_d konnte er damit beweisen:

Satz 2.10 ([Bac15], Theorem 2.7) *Die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter der Dimension d und Minimum 4 wächst schneller als jedes Polynom in d .*

E.S. Barnes gab in [Bar57b] bzw. [Bar59] zwei weitere Klassen perfekter Gitter mit Minimum 4 an:

Satz 2.11 *Sei für $n \geq 3$*

$$P_n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{n+1} ix_i \equiv 0 \pmod{n+1}\}.$$

Dann hat P_n Minimum 4 und Determinante $(n+1)^3$. Es gilt

$$|\text{Min}(P_n)| = \begin{cases} \frac{1}{4}(n-2)n(n+1) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{4}(n-1)^2(n+1) & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für $n \geq 6$ ist P_n extrem.

Eine Verallgemeinerung der Klasse P_n wird in Kapitel 4 näher untersucht.

Satz 2.12 *Für $n \geq 4$ sei*

$$Q_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \pmod{4} \text{ und } \sum_{i=1}^n ix_i \equiv 0 \pmod{n}\}.$$

Dann hat Q_n Minimum 4 und Determinante $16n^2$. Es gilt

$$|\text{Min}(Q_n)| = \begin{cases} \frac{1}{6}(n-1)(n-3)(2n-1) & \text{falls } m \not\equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n-3) & \text{falls } m \equiv 0 \pmod{2} \text{ und } m \not\equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{6}(n-3)(2n^2-3m+4) & \text{falls } m \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Für $n \geq 8$ ist Q_n perfekt.

3 Laminierungen

3.1 Schwache arithmetische Laminierungen

Für festes $m \in \mathbb{N}$ sei $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_3 \subset \dots$ eine Folge von ganzen Gittern, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- (i) $\min(\Lambda_n) = m$, $\dim(\Lambda_n) = n$.
- (ii) Λ_n wird von den kürzesten Vektoren $\text{Min}(\Lambda_n)$ erzeugt.
- (iii) Für ein gegebenes Λ_{n-1} hat Λ_n minimale Determinante unter allen ganzen Gittern $\tilde{\Lambda}_n$, die Λ_{n-1} enthalten und (i), (ii) erfüllen.

Conway und Sloane gaben in [CS99], Kapitel 6, eine ähnliche Konstruktion an, die sie Laminierung nannten. Hier ist Λ_0 das triviale Gitter $\{0\}$ und für $n \geq 1$ betrachte alle Gitter mit Minimum 4, die mindestens ein Λ_{n-1} als Teilgitter haben. Jedes dieser Gitter mit minimaler Determinante ist dann ein laminiertes Gitter Λ_n . Diese Gitter wurden bis Dimension 25 bestimmt und es stellt sich heraus, dass bis Dimension 24 alle Gitter ganz sind und von den kürzesten Vektoren erzeugt werden. Verlangt man zusätzlich noch diese beiden Eigenschaften, sprechen Plesken und Pohst in [PP85] von einer arithmetischen Laminierung und nennen die Konstruktion von Conway und Sloane geometrische Laminierung. Gitter mit den Eigenschaften (i)-(iii) nennen sie (schwache) arithmetische Laminierung.

Gegeben sei nun ein festes Λ_n , welches die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) hat. Damit sollen nun alle möglichen Λ_{n+1} (bis auf Isomorphie) konstruiert werden.

Definition 3.1 (i) Für $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichne mit x_p die orthogonale Projektion von x auf $\mathbb{R}\Lambda_n$.

(ii) Für $X \in \Lambda_n^\#/\Lambda_n$ sei $\min(X) = \min\{(v, v) \mid v \in X\}$.

Lemma 3.2 (i) Sei $x \in \Lambda_{n+1}$. Dann gilt $x_p \in \Lambda_n^\#$.

(ii) Sei $x \in \text{Min}(\Lambda_{n+1})$. Dann gilt $(x_p, x_p) = \min(x_p + \Lambda_n)$.

BEWEIS Es gilt $x = x_p + x_o$ für ein $x_p \in \mathbb{R} \Lambda_n$ und $x_o \in (\mathbb{R} \Lambda_n)^\perp$. Dann gilt

$$(x_p, \Lambda_n) = (x_p + x_o, \Lambda_n) = (x, \Lambda_n) \subseteq \mathbb{Z}.$$

Angenommen, es gibt ein $y \in \Lambda_n$, so dass $x_p + y$ kürzer ist als x_p . Dann wäre aber $x + y$ ein kürzerer Vektor als x in Λ_{n+1} . \square

Aus diesem Lemma folgt, dass es nur endlich viele Kandidaten für Λ_{n+1} gibt: Für jeden kürzesten Vektor in einer Restklasse gibt es (bis auf Vorzeichen) genau einen Vektor in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R} \Lambda_n$, der auf diesen projiziert. Diesen kann man also zu Λ_n hinzufügen, oder nicht. Die Anzahl der Erweiterungen ist damit durch $2^{\det(\Lambda_n)}$ beschränkt. Für konkrete Berechnungen ist dies aber natürlich zu aufwendig. Im Folgenden wird gezeigt, dass es genügt, nur eine Restklasse zu betrachten.

Definition 3.3 Sei Λ_n ein ganzes Gitter welches (i) und (ii) erfüllt. Für jede Restklasse

$$X = x + \Lambda_n \in \Lambda_n^\# / \Lambda_n \text{ mit } (x, x) = \min(X) \text{ und } (x, x) < m$$

sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R} \Lambda_n$, so dass $\tilde{x}_p = x$ und $(\tilde{x}, \tilde{x}) = m$. Dann definiere

$$\Lambda_n(X) := \Lambda_n \oplus \mathbb{Z} \tilde{x}.$$

Sowohl \tilde{x} als auch x sind (in der Regel) nicht eindeutig. $\Lambda_n(X)$ ist aber unabhängig davon.

Bemerkung 3.4 Es gilt $\det(\Lambda_n(X)) = \det(\Lambda_n)(m - \min(X))$.

BEWEIS Sei $\tilde{x} = \tilde{x}_p + \tilde{x}_o$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_n(X)) &= \text{vol}(\mathbb{R}^{n+1} / \Lambda_n(X))^2 \\ &= \text{vol}(\mathbb{R}^n / \Lambda_n)^2 (x_o, x_o) \\ &= \det(\Lambda_n)((\tilde{x}, \tilde{x}) - (x_p, x_p)) \\ &= \det(\Lambda_n)(m - \min(X)). \end{aligned}$$

\square

Lemma 3.5 *Jede mögliche Erweiterung Λ_{n+1} liegt in der Menge*

$$\{\Lambda_n(X) \mid X \in \Lambda_n^\#/\Lambda_n, \min(X) < m\}.$$

Sei $\bar{m} = \max\{\min(X) \mid X \in \Lambda_n^\#/\Lambda_n, \min(X) < m\}$. Dann kann jedes Gitter in

$$\{\Lambda_n(X) \mid X \in \Lambda_n^\#/\Lambda_n, \min(X) = \bar{m}\}$$

als Λ_{n+1} gewählt werden.

BEWEIS Zu zeigen ist, dass $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n \oplus \mathbb{Z}y$ gilt mit $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}\Lambda_n$ und $(y, y) \geq m$. Dies ist äquivalent zu $\mathbb{R}\Lambda_n \cap \Lambda_{n+1} = \Lambda_n$. Der Schnitt aber ist in $\Lambda_n^\#$ enthalten und Λ_n gerade so gewählt wurde, dass die Determinante minimal ist und $\min(\Lambda_{n+1}) = m$ gilt, folgt die Gleichheit.

Der Vektor y kann offenbar so gewählt werden, dass $(y_p, y_p) = \min(y_p + \Lambda_n)$ gilt. Da Λ_{n+1} Bedingung (iii) erfüllt, folgt

$$\det(\Lambda_{n+1}) = \det(\Lambda_n)((y, y) - (y_p, y_p)) \leq \det(\Lambda_n(X)) = \det(\Lambda_n)(m - \bar{m})$$

für alle $X \in \Lambda_n^\#/\Lambda_n$ mit $\min(X) = \bar{m}$. Also ist

$$(y, y) = \frac{\det(\Lambda_{n+1})}{\det(\Lambda_n)} + (y_p, y_p) \leq m - \bar{m} + (y_p, y_p) \leq m.$$

Insgesamt gilt also $(y, y) = m$ und $(y_p, y_p) = \bar{m}$. □

Die Erweiterungen Λ_{n+1} können also wie folgt berechnet werden: Für jede Restklasse $X \in \Lambda_n^\#/\Lambda_n$ mit $\min(X) = \bar{m}$ wird ein kürzester Vektor $x \in X$ und ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}\Lambda_n$ mit $\tilde{x}_p = x$ bestimmt. Dieses \tilde{x} wird dann zu Λ_n hinzugefügt. Falls Λ_{n+1} unimodular ist, kann der Laminierungsprozess abgebrochen werden:

Satz 3.6 *Sei $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von schwach laminierten Gittern mit Minimum m . Falls Λ_n unimodular ist für ein $n \in \mathbb{N}$, gilt $\Lambda_{n+k} = \Lambda_n \perp \Gamma_k$ ($k \in \mathbb{N}$) für eine Folge $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von schwach laminierten Gittern mit Minimum m .*

BEWEIS Da Λ_n unimodular ist, besteht $\Lambda_n^\#/\Lambda_n$ nur aus der Restklasse Λ_n mit kürzestem Vertreter 0. Der Vektor $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}\Lambda_n$, welcher zu Λ_n hinzugefügt wird, ist also orthogonal zu Λ_n und es gilt $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n \perp \langle \tilde{x} \rangle$ und $\Lambda_{n+1}^\# = \Lambda_n^\# \perp \langle \frac{1}{\sqrt{m}}\tilde{x} \rangle$, also $\Lambda_{n+1}^\#/\Lambda_{n+1} \cong \Lambda_1^\#/\Lambda_1$. Daraus folgt die Behauptung. □

Es ist natürlich sinnvoll, ein Vertretersystem der Isomorphieklassen der Λ_{n+1} zu bestimmen. Einige Erweiterungen lassen sich schon mit Hilfe der Restklassen ausschließen:

Bemerkung 3.7 Seien $X, X' \in \Lambda_n^\#/\Lambda_n$ zwei Restklassen, die in einer Bahn unter der Automorphismengruppe $\text{Aut}(\Lambda_n)$ liegen. Dann sind $\Lambda_n(X)$ und $\Lambda_n(X')$ isomorph zueinander.

BEWEIS Seien $X = x + \Lambda_n$ und $X' = x' + \Lambda_n$, so dass ein $\alpha \in \text{Aut}(\Lambda_n)$ existiert mit $\alpha(x) = x'$. Dann gilt $\alpha(\Lambda_n(X)) = \alpha(\Lambda_n) \oplus \mathbb{Z}\alpha(x) = \Lambda_n \oplus \mathbb{Z}x' = \Lambda_n(X')$. \square

Möchte man die Erweiterungen mit einem CAS (z.B. Magma) berechnen, macht es natürlich mehr Sinn, Gram-Matrix zu benutzen, anstatt Basisvektoren im \mathbb{R}^n . Die Gram-Matrix von Λ_{n+1} lässt sich ohne ein Urbild \tilde{x} der Projektion berechnen:

Bemerkung 3.8 Sei G eine Gram-Matrix von Λ_n bezüglich der Basis B . Sei x ein kürzester Vektor in $X \in \Lambda_n^\#/\Lambda_n$ mit $(x, x) < m$, dargestellt als Koordinatenvektor bezüglich der Basis B . Für $v = xG$ ist dann

$$\left(\begin{array}{c|c} G & v^{\text{tr}} \\ \hline v & m \end{array} \right)$$

eine Gram-Matrix von $\Lambda_n(X)$.

3.2 Ergebnisse für $m = 3$

Plesken und Pohst berechneten in [PP85], Abschnitt 4, alle möglichen Folgen für $m = 3$. Hierbei reichte es aus die Gitter bis Dimension 23 zu bestimmen:

Satz 3.9 Für jede Folge $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von schwach laminierten Gittern mit Minimum 3 gilt $\Lambda_{23} = Q_{23}$, ein unimodulares Gitter der Dimension 23.

Das Gitter $\Lambda_{23} = Q_{23}$ steht in engem Zusammenhang zum Leech-Gitter Λ_{24} und lässt sich aus diesem berechnen: Für einen Minimalvektor x_o in Λ_{24} sei

$$\Lambda'_{24} = \{y \in \Lambda_{24} \mid \langle y, x_o \rangle \equiv 0 \pmod{2}\}$$

und π die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^{24} = \mathbb{R}\Lambda_{24}$ auf $\langle x_o \rangle^\perp$. Dann gilt $\Lambda_{23} \cong \pi(\Lambda'_{24})$.

Martinet bewies in [Mar03], Proposition 3.7.2. (nach Anwendung von Satz (1.21)), dass die geometrische Laminierung nach Conway und Sloane Perfektheit erhält. Da hier $\Lambda_1 =$

$2\mathbb{Z}$ gilt, sind also alle so laminierten Gitter perfekt. Es stellt sich die Frage, ob dies für die schwache arithmetische Laminierung ebenfalls gilt. Hier ist $\Lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbb{Z}$ perfekt, aber $\Lambda_2 = \langle (1, 1, -1), (1, 1, 1) \rangle_{\mathbb{Z}}$ ist es nicht mehr.

Von den 59 berechneten Gittern in Dimension ≤ 23 sind insgesamt 18 perfekt. Allerdings könnten ja weitere Gitter in der Menge

$$\{\Lambda_n(X) \mid X \in \Lambda_n^{\#}/\Lambda_n, \min(X) < 3\}$$

perfekt sein. Hierfür habe ich die perfekte Laminierung analog zur schwachen arithmetischen Laminierung definiert:

Definition 3.10 Für festes $m \in \mathbb{N}$ und $I \subset \mathbb{N}$ sei $(\Lambda_n)_{n \in I}$ eine (endliche) Folge von ganzen Gittern, so dass für alle $n \in I$ gilt:

$$(i) \quad \Lambda_{n+1} = \Lambda_n \oplus \mathbb{Z}y \text{ für ein } y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}\Lambda_n \text{ mit } (y, y) = m.$$

(ii) Λ_n ist perfekt.

Bei der schwachen arithmetischen Laminierung ist es möglich, die Erweiterungen mit minimaler Determinante nur anhand der Restklassen auszuwählen. Bei der perfekten Laminierung ist dies ebenfalls möglich:

Satz 3.11 Sei Λ_n perfekt und seien $\{x_1, \dots, x_k\}$ die kürzesten Vektoren in einer Restklasse $X \in \Lambda_n^{\#}/\Lambda_n$. Dann ist $\Lambda_n(X)$ genau dann perfekt, wenn $\mathbb{R}\Lambda_n$ von

$$\{(x_2 - x_1), (x_3 - x_1), \dots, (x_k - x_1)\}$$

erzeugt wird.

BEWEIS Sei $v_i := (x_i \mid a) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $a \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $(v_i, v_i) = m$ gilt. Dann sind all diese v_i Minimalvektoren in $\Lambda_n(X)$, da ohne Einschränkung v_1 ein Minimalvektor ist und die Differenz $v_1 - v_i$ in Λ_n liegt. Dann ist $\Lambda_n(X)$ genau dann perfekt, wenn

$$\begin{aligned} n+1 &= \dim(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) \\ &= \dim(\langle (x_1 \mid a), (x_2 - x_1 \mid 0), (x_3 - x_1 \mid 0), \dots, (x_k - x_1 \mid 0) \rangle) \\ &= \dim(\langle x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1 \rangle) + 1 \end{aligned}$$

gilt. Daraus folgt die Behauptung. □

In den nachfolgenden Tabellen sind alle berechneten perfekten Gitter aufgeführt. Λ_n bezeichnet die perfekten Gitter der schwachen arithmetischen Laminierung. Diese wurde als Startgitter für die perfekte Laminierung benutzt und zusätzlich gefundene, perfekte Gitter werden mit Σ_n bezeichnet. Die Determinante wird als Faktorisierung in Elementarteiler der Gram-Matrix angegeben. Teilgitter, welche eingeklammert sind, sind nicht perfekt.

Wie auch bei der schwachen arithmetischen Laminierung terminieren alle Folgen in Dimension 23, obwohl die zusätzlichen Gitter nicht unimodular sind.

Zusammengefasst ergibt sich für die Anzahl der gefundenen Gitter:

Dimension	1	7	16	17	18	19	20	21	22	23
Anz. schwach lam. und perfekt	1	1	1	1	2	4	3	2	2	1
Anz. perfekt lam.	0	0	0	1	2	8	20	26	20	6

Bezeichnung	Det	Min	Aut	Teilgitter
Λ_1	3	2	2	-
Λ_7	$64 = 2^6$	56	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	(Λ_6)
Λ_{16}^a	$128 = 2^4 \cdot 8$	380	$2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5$	(Λ_{15}^a)
Λ_{17}^a	$64 = 2^4 \cdot 4$	576	$2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5$	$\Lambda_{16}^a (\Lambda_{16}^b)$
Σ_{17}^a	$112 = 2^3 \cdot 14$	444	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5$	Λ_{16}^a
Λ_{18}^a	$48 = 2^3 \cdot 6$	704	$2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5$	$\Lambda_{17}^a \Sigma_{17}^a$
Λ_{18}^c	$64 = 8^2$	608	$2^{13} \cdot 3$	$(\Lambda_{17}^b) (\Lambda_{17}^c) (\Lambda_{17}^d)$
Σ_{18}^a	$80 = 2^2 \cdot 20$	556	$2^{11} \cdot 3$	$(\Lambda_{17}^d) (\Lambda_{17}^e) (\Lambda_{17}^g) \Sigma_{17}^a$
Σ_{18}^b	$96 = 2^2 \cdot 24$	516	$2^{11} \cdot 3$	Σ_{17}^a
Λ_{19}^a	$32 = 2^2 \cdot 8$	896	$2^{17} \cdot 3^2$	$\Lambda_{18}^a \Lambda_{18}^c \Sigma_{18}^a \Sigma_{18}^b (\Lambda_{18}^b) (\Lambda_{18}^d)$
Λ_{19}^b	$64 = 2^2 \cdot 4^2$	680	$2^{16} \cdot 3^2$	$(\Lambda_{18}^e) (\Lambda_{18}^f) (\Lambda_{18}^d)$
Λ_{19}^c	$64 = 2^2 \cdot 4^2$	712	$2^{21} \cdot 3^2$	(Λ_{18}^e)
Λ_{19}^d	$64 = 2^2 \cdot 4^2$	664	$2^{12} \cdot 3^2$	(Λ_{18}^f)
Σ_{19}^a	$64 = 2^2 \cdot 16$	656	$2^{12} \cdot 3$	Λ_{18}^b
Σ_{19}^b	40	800	$2^{10} \cdot 3 \cdot 5$	(Λ_{18}^c)
Σ_{19}^c	48	736	$2^{10} \cdot 3$	(Λ_{18}^c)
Σ_{19}^d	$80 = 2^3 \cdot 10$	600	$2^9 \cdot 3 \cdot 5$	(Λ_{18}^c)
Σ_{19}^e	$48 = 4 \cdot 12$	740	$2^{12} \cdot 3$	Λ_{18}^f
Σ_{19}^f	$52 = 2 \cdot 26$	716	$2^8 \cdot 3^2$	$\Sigma_{18}^a \Sigma_{18}^b$
Σ_{19}^g	$68 = 2 \cdot 34$	636	$2^8 \cdot 3$	Σ_{18}^a
Σ_{19}^h	$80 = 4 \cdot 20$	596	$2^{10} \cdot 3$	$\Sigma_{18}^a \Sigma_{18}^b$

Bezeichnung	Det	Min	Aut	Teilgitter
Λ_{20}^a	$16 = 4^2$	1280	$2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5$	$\Lambda_{19}^a \Sigma_{19}^b \Sigma_{19}^c \Sigma_{19}^f$
Λ_{20}^b	$32 = 2^2 \cdot 8$	972	$2^{18} \cdot 3^2$	$\Lambda_{19}^b \Lambda_{19}^c$
Λ_{20}^c	$32 = 2^2 \cdot 8$	936	$2^{12} \cdot 3^2$	$\Lambda_{19}^b \Lambda_{19}^d \Sigma_{19}^e$
Σ_{20}^a	$20 = 2 \cdot 10$	1152	$2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5$	Λ_{19}^a
Σ_{20}^b	$32 = 2 \cdot 16$	912	$2^{11} \cdot 3$	$\Lambda_{19}^a \Sigma_{19}^c \Sigma_{19}^d \Sigma_{19}^g \Sigma_{19}^h$
Σ_{20}^c	$36 = 2 \cdot 18$	880	$2^9 \cdot 3 \cdot 5$	$\Sigma_{19}^b \Sigma_{19}^d \Sigma_{19}^g$
Σ_{20}^d	24	1040	$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5$	$\Sigma_{19}^b \Sigma_{19}^c$
Σ_{20}^e	24	1060	$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5$	$\Sigma_{19}^c \Sigma_{19}^f \Sigma_{19}^g$
Σ_{20}^f	44	840	$2^9 \cdot 3 \cdot 5$	Σ_{19}^c
Σ_{20}^g	29	960	$2^8 \cdot 3 \cdot 5$	Σ_{19}^c
Σ_{20}^h	21	1120	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	Σ_{19}^c
Σ_{20}^i	$45 = 3 \cdot 15$	800	$2^9 \cdot 3$	Σ_{19}^d
Σ_{20}^j	32	924	$2^{10} \cdot 3$	Σ_{19}^d
Σ_{20}^k	$36 = 3 \cdot 12$	880	$2^{11} \cdot 3$	Σ_{19}^d
Σ_{20}^l	$48 = 2^3 \cdot 6$	780	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5$	Σ_{19}^e
Σ_{20}^m	$48 = 2^2 \cdot 12$	772	$2^{10} \cdot 3$	$\Sigma_{19}^e \Sigma_{19}^g$
Σ_{20}^n	40	836	$2^{10} \cdot 3$	$\Sigma_{19}^f \Sigma_{19}^h$
Σ_{20}^o	28	980	$2^9 \cdot 3 \cdot 7$	Σ_{19}^h
Σ_{20}^p	$44 = 2 \cdot 22$	810	$2^8 \cdot 3^2$	$\Sigma_{19}^g \Sigma_{19}^h$
Σ_{20}^q	44	804	$2^8 \cdot 3$	Σ_{19}^g
Σ_{20}^r	56	724	2^9	Σ_{19}^h
Σ_{20}^s	48	764	2^{10}	Σ_{19}^h
Σ_{20}^t	$64 = 4^3$	688	$2^{12} \cdot 3$	Σ_{19}^h

Bezeichnung	Det	Min	Aut	Teilgitter
Λ_{21}^a	8	1792	$2^{18} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Lambda_{20}^a \Sigma_{20}^a \Sigma_{20}^b \Sigma_{20}^c \Sigma_{20}^d$ $\Sigma_{20}^e \Sigma_{20}^g \Sigma_{20}^h \Sigma_{20}^n \Sigma_{20}^o \Sigma_{20}^r$
Λ_{21}^b	$12 = 2 \cdot 6$	1492	$2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5$	$\Lambda_{20}^b \Lambda_{20}^c \Sigma_{20}^a \Sigma_{20}^e \Sigma_{20}^f$ $\Sigma_{20}^j \Sigma_{20}^k \Sigma_{20}^m \Sigma_{20}^p$
Σ_{21}^a	$16 = 4^2$	1360	$2^{20} \cdot 3 \cdot 5$	$\Lambda_{20}^a \Lambda_{20}^b \Sigma_{20}^f \Sigma_{20}^g$
Σ_{21}^b	$16 = 4^2$	1288	$2^{13} \cdot 3 \cdot 7$	$\Lambda_{20}^c \Sigma_{20}^m \Sigma_{20}^o \Sigma_{20}^q \Sigma_{20}^s$
Σ_{21}^c	12	1472	$2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5$	$\Sigma_{20}^a \Sigma_{20}^d \Sigma_{20}^f \Sigma_{20}^g \Sigma_{20}^h \Sigma_{20}^j$ $\Sigma_{20}^q \Sigma_{20}^s$
Σ_{21}^d	14	1360	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{20}^b \Sigma_{20}^c \Sigma_{20}^h$
Σ_{21}^e	16	1288	$2^{12} \cdot 3 \cdot 7$	$\Sigma_{20}^b \Sigma_{20}^j \Sigma_{20}^o \Sigma_{20}^p \Sigma_{20}^e$
Σ_{21}^f	36	930	$2^9 \cdot 3 \cdot 5$	$\Sigma_{20}^c \Sigma_{20}^f$
Σ_{21}^g	$20 = 2 \cdot 10$	1160	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5$	$\Sigma_{20}^c \Sigma_{20}^d \Sigma_{20}^f$
Σ_{21}^h	20	1180	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5$	$\Sigma_{20}^c \Sigma_{20}^e \Sigma_{20}^f \Sigma_{20}^n \Sigma_{20}^p \Sigma_{20}^q$
Σ_{21}^i	$18 = 3 \cdot 6$	1232	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{20}^c \Sigma_{20}^h \Sigma_{20}^i$
Σ_{21}^j	$9 = 3^2$	1680	$2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{20}^d \Sigma_{20}^g \Sigma_{20}^h$
Σ_{21}^k	17	1232	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$	Σ_{20}^d
Σ_{21}^l	11	1540	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$\Sigma_{20}^e \Sigma_{20}^f \Sigma_{20}^g \Sigma_{20}^h \Sigma_{20}^o \Sigma_{20}^q$
Σ_{21}^m	27	1032	$2^8 \cdot 3 \cdot 5$	$\Sigma_{20}^f \Sigma_{20}^g \Sigma_{20}^j$
Σ_{21}^n	23	1162	$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	Σ_{20}^f
Σ_{21}^o	15	1330	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{20}^f \Sigma_{20}^g \Sigma_{20}^h \Sigma_{20}^k$
Σ_{21}^p	19	1180	$2^9 \cdot 3 \cdot 5$	$\Sigma_{20}^g \Sigma_{20}^h \Sigma_{20}^i \Sigma_{20}^j$
Σ_{21}^q	33	912	$2^{10} \cdot 3$	Σ_{20}^i
Σ_{21}^r	$27 = 3^3$	1008	$2^{11} \cdot 3$	$\Sigma_{20}^i \Sigma_{20}^k$
Σ_{21}^s	27	1020	$2^9 \cdot 3$	$\Sigma_{20}^i \Sigma_{20}^j \Sigma_{20}^q$
Σ_{21}^t	$28 = 2 \cdot 14$	988	$2^{10} \cdot 3$	$\Sigma_{20}^m \Sigma_{20}^n \Sigma_{20}^r \Sigma_{20}^s$
Σ_{21}^u	$32 = 4 \cdot 8$	944	$2^{11} \cdot 3$	$\Sigma_{20}^n \Sigma_{20}^r \Sigma_{20}^t$
Σ_{21}^v	15	1316	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{20}^n \Sigma_{20}^o \Sigma_{20}^s$
Σ_{21}^w	23	1092	$2^8 \cdot 3 \cdot 7$	$\Sigma_{20}^n \Sigma_{20}^o \Sigma_{20}^q \Sigma_{20}^r$
Σ_{21}^x	36	906	$2^8 \cdot 3$	$\Sigma_{20}^p \Sigma_{20}^q \Sigma_{20}^r$
Σ_{21}^y	31	940	$2^8 \cdot 3$	$\Sigma_{20}^q \Sigma_{20}^s$
Σ_{21}^z	39	860	2^9	$\Sigma_{20}^r \Sigma_{20}^s$

Bezeichnung	Det	Min	Aut	Teilgitter
Λ_{22}^a	3	2816	$2^{17} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$\Lambda_{21}^a \Sigma_{21}^c \Sigma_{21}^i \Sigma_{21}^j \Sigma_{21}^k$ $\Sigma_{21}^l \Sigma_{21}^n \Sigma_{21}^v \Sigma_{21}^w \Sigma_{21}^z$
Λ_{22}^b	4	2464	$2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$\Lambda_{21}^a \Lambda_{21}^b \Sigma_{21}^b \Sigma_{21}^c \Sigma_{21}^e \Sigma_{21}^f$ $\Sigma_{21}^g \Sigma_{21}^h \Sigma_{21}^l \Sigma_{21}^m \Sigma_{21}^n$ $\Sigma_{21}^o \Sigma_{21}^p \Sigma_{21}^s \Sigma_{21}^t \Sigma_{21}^x$
Σ_{22}^a	8	1876	$2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Lambda_{21}^a \Sigma_{21}^a$
Σ_{22}^b	8	1736	$2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{21}^a \Sigma_{21}^b \Sigma_{21}^t \Sigma_{21}^v \Sigma_{21}^w \Sigma_{21}^y$
Σ_{22}^c	7	1856	$2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{21}^c \Sigma_{21}^k \Sigma_{21}^m \Sigma_{21}^p \Sigma_{21}^q \Sigma_{21}^s$ Σ_{21}^y
Σ_{22}^d	13	1444	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{21}^d \Sigma_{21}^f \Sigma_{21}^m \Sigma_{21}^n$
Σ_{22}^e	5	2200	$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	$\Sigma_{21}^d \Sigma_{21}^e \Sigma_{21}^h \Sigma_{21}^l \Sigma_{21}^p \Sigma_{21}^v$ Σ_{21}^y
Σ_{22}^f	6	2004	$2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{21}^d \Sigma_{21}^g \Sigma_{21}^i \Sigma_{21}^j \Sigma_{21}^k \Sigma_{21}^n$ $\Sigma_{21}^o \Sigma_{21}^q$
Σ_{22}^g	$16 = 4^2$	1344	$2^{12} \cdot 3 \cdot 7$	Σ_{21}^e
Σ_{22}^h	13	1416	$2^{11} \cdot 3 \cdot 7$	$\Sigma_{21}^e \Sigma_{21}^s \Sigma_{21}^w \Sigma_{21}^x \Sigma_{21}^z$
Σ_{22}^i	$16 = 4^2$	1312	$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5$	$\Sigma_{21}^f \Sigma_{21}^h \Sigma_{21}^u \Sigma_{21}^x$
Σ_{22}^j	9	1694	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$\Sigma_{21}^f \Sigma_{21}^h \Sigma_{21}^i \Sigma_{21}^l \Sigma_{21}^m \Sigma_{21}^n$ $\Sigma_{21}^s \Sigma_{21}^w \Sigma_{21}^x$
Σ_{22}^k	11	1484	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5$	$\Sigma_{21}^k \Sigma_{21}^p$
Σ_{22}^l	12	1584	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$\Sigma_{21}^l \Sigma_{21}^n$
Σ_{22}^m	16	1284	$2^9 \cdot 3 \cdot 5$	$\Sigma_{21}^m \Sigma_{21}^p \Sigma_{21}^s \Sigma_{21}^u$
Σ_{22}^n	19	1164	$2^{10} \cdot 3$	$\Sigma_{21}^n \Sigma_{21}^q \Sigma_{21}^s \Sigma_{21}^y$
Σ_{22}^o	16	1260	$2^9 \cdot 3 \cdot 7$	$\Sigma_{21}^t \Sigma_{21}^w \Sigma_{21}^y \Sigma_{21}^z$
Σ_{22}^p	$16 = 2^2 \cdot 4$	1248	$2^{14} \cdot 3$	$\Sigma_{21}^t \Sigma_{21}^u$
Σ_{22}^q	12	1456	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{21}^u \Sigma_{21}^v \Sigma_{21}^w \Sigma_{21}^z$
Σ_{22}^r	25	1050	$2^8 \cdot 3$	$\Sigma_{21}^x \Sigma_{21}^y \Sigma_{21}^z$
Σ_{22}^s	20	1124	$2^9 \cdot 3^2$	Σ_{21}^y
Σ_{22}^t	$27 = 3 \cdot 9$	1004	$2^{10} \cdot 3$	Σ_{21}^z
Λ_{23}	1	4600	$2^{19} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$\Lambda_{22}^a \Lambda_{22}^b$
Σ_{23}^a	$4 = 2^2$	2552	$2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$\Lambda_{22}^b \Sigma_{22}^a \Sigma_{22}^l$
Σ_{23}^b	$4 = 2^2$	2296	$2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{22}^b \Sigma_{22}^o \Sigma_{22}^p \Sigma_{22}^q \Sigma_{22}^s$
Σ_{23}^c	4	2304	$2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\Sigma_{22}^c \Sigma_{22}^k \Sigma_{22}^l \Sigma_{22}^n \Sigma_{22}^s$
Σ_{23}^d	4	2400	$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	$\Sigma_{22}^d \Sigma_{22}^e \Sigma_{22}^g \Sigma_{22}^h \Sigma_{22}^i \Sigma_{22}^j$ $\Sigma_{22}^l \Sigma_{22}^m \Sigma_{22}^q \Sigma_{22}^r$
Σ_{23}^e	9	1600	$2^{12} \cdot 3 \cdot 7$	$\Sigma_{22}^h \Sigma_{22}^n \Sigma_{22}^o \Sigma_{22}^r \Sigma_{22}^t$
Σ_{23}^f	16	1248	$2^9 \cdot 3^2$	$\Sigma_{22}^r \Sigma_{22}^s$

4 Das Gitter L_G

4.1 Definition und Beispiele

Definition 4.1 Sei $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung ≥ 2 . Dann definieren die Relationen in G ein Gitter durch

$$L_G := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n x_i g_i = 0_G\}.$$

Falls G aus den rationalen Punkte einer elliptische Kurve über einem endlichen Körper besteht, ist G isomorph zu $C_m \times C_n$ für geeignete $m, n \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall bewies Sha in [Sha15], dass für L_G eine Basis von Minimalvektoren existiert. Die Gitter L_{C_n} wurden bereits 1957 von Barnes in [Bar57b] untersucht. Er bewies, dass diese für $n \geq 7$ perfekt sind. Martinet zeigte in [Mar03], Abschnitt 5.3, dass L_{C_n} ebenfalls eine Basis von kürzesten Vektoren besitzt und gab für $n \geq 12$ die Automorphismengruppe an. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass sich diese Aussagen auf die Gitterklasse L_G verallgemeinern lassen.

Sei im Folgenden G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung $n := |G| \geq 2$.

Lemma 4.2 Für jedes G ist L_G ein $(n-1)$ -dimensionales Gitter mit Determinante n^3 . Im Fall $n \geq 4$ hat L_G Minimum 4.

BEWEIS L_G ist ein Teilgitter von

$$A_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}.$$

Der Homomorphismus

$$\varphi : A_{n-1} \rightarrow G, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i g_i$$

hat Kern L_G und ist surjektiv, denn für $g_1 := 0_G$ und $0_G \neq g_i \in G$ beliebig liegt $(-e_1 + e_i)$ in A_{n-1} und wird auf g_i abgebildet. Also gilt $A_{n-1}/L_G \cong G$ und daher

$$n = [A_{n-1} : L_G] = \frac{\sqrt{\det(L_G)}}{\sqrt{\det(A_{n-1})}} = \frac{\sqrt{\det(L_G)}}{\sqrt{n}}$$

und es folgt $\det(L_G) = n^3$.

Da A_{n-1} Dimension $n-1$ hat und der Index von L_G in A_{n-1} endlich ist, gilt dies auch für L_G . L_G hat mindestens Minimum 4, da in A_{n-1} keine Vektoren der Norm 3 existieren und im Fall Minimum 2 Elemente $p \neq q \in G$ existieren würden mit $p - q = 0$. Die Vektoren mit Norm 4 in L_G sind von der Form $(e_i + e_j - e_k - e_l)$ so dass $g_i + g_j = g_k + g_l$ mit $g_i, g_j, g_k, g_l \in G$ paarweise verschieden. Falls G mindestens Ordnung 4 hat, existiert so eine Gleichung immer. \square

Es ist $L_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \{(-2x, 2x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Die kürzesten Vektoren sind $(2, -2)$ und $(-2, 2)$, das Gitter hat also Minimum 8.

Das Gitter $L_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ besteht aus allen Vektoren $(-x - y, x, y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass $x + 2y \equiv 0 \pmod{3}$ gilt. Die kürzesten Vektoren sind $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$ sowie ihre negativen. Also hat $L_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ Minimum 6.

Satz 4.3 *Im Fall $G \not\cong C_4$ existiert eine Basis von L_G , welche aus kürzesten Vektoren besteht.*

Diese Aussage wird in [BFGM15a], Theorem 1.2. bewiesen. Für den Fall, dass G zyklisch ist, befindet sich ein kürzerer Beweis in [Mar03], Proposition 5.3.5.

Die kürzesten Vektoren von $L_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ sind $(1, 1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1, 1)$ und $(1, -1, -1, 1)$. Hiervon sind jeweils 3 linear abhängig. Die ersten beiden Vektoren können mit $(1, -2, 1, 0)$ zu einer Basis ergänzt werden.

Satz 4.4 *Sei $n \geq 4$ und sei κ die Ordnung der Untergruppe $\{g \in G \mid g + g = 0\}$. Dann ist die Anzahl der Minimalvektoren in L_G gleich*

$$\frac{n}{\kappa} \cdot \frac{(n - \kappa)(n - \kappa - 2)}{4} + \left(n - \frac{n}{\kappa}\right) \cdot \frac{n(n - 2)}{4} = \frac{n}{4}(n^2 - 4n + \kappa + 2).$$

BEWEIS Gezählt werden müssen die Gleichungen $p+q = r+s$ mit $p, q, r, s \in G$ paarweise verschieden. Betrachte dazu den Homomorphismus

$$\tau : G \rightarrow G, g \mapsto g + g.$$

Für festes $z \in G$ werden nun die Anzahl der Gleichungen $p + q = r + s = z$ gezählt. Falls $z \in \text{Bild}(\tau)$ ist, existieren κ Elemente $p \in G$ mit $p + p = z$. Also existieren $n - \kappa$ mögliche p mit $q := z - p \neq p$ und die Anzahl der Paare p, q mit $p + q = z$ und $p \neq q$ ist gleich $\frac{n-\kappa}{2}$. Die Anzahl der Paare $\{r, s\}$, die von $\{p, q\}$ verschieden sind und $r + s = z$ erfüllen ist dann $\frac{n-\kappa-2}{2}$. Insgesamt gibt es also $\frac{(n-\kappa)(n-\kappa-2)}{4}$ Gleichungen der Form $p + q = r + s = z$.

Falls $z \notin \text{Bild}(\tau)$ ist, existieren keine $p \in G$ mit $p + p = z$. Analog zu oben existieren dann $\frac{n(n-2)}{4}$ Gleichungen der Form $p + q = r + s = z$.

Der Kern von τ hat Ordnung κ , das Bild hat entsprechend Ordnung $\frac{n}{\kappa}$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Eine notwendige Bedingung für Perfektheit ist, dass L_G mindestens $(n - 1)n$ kürzeste Vektoren hat. Nach Satz (4.4) haben die Gitter $L_{C_4}, L_{C_2 \times C_2}, L_{C_5}$ bzw. L_{C_6} allerdings 4, 6, 10 bzw. 24 kürzeste Vektoren, diese können also nicht perfekt sein.

L_{C_7} und L_{C_8} sind isomorph zu den perfekten Gittern P_6^5 bzw. P_7^5 ([Mar96], Seite 381f). L_{C_2}, L_{C_3} und $L_{C_2 \times C_2 \times C_2}$ sind ähnlich zu den Wurzelgittern A_1, A_2 bzw. D_7 , also ebenfalls perfekt.

Das Gitter $L_{C_2 \times C_4}$ ist nicht perfekt.

Satz 4.5 ([Bac15], Theorem 5.3.) *Sei $n = |G| \geq 9$. Dann ist L_G perfekt.*

BEWEIS Die Aussage wird zuerst für zyklische Gruppen gezeigt. Für $n \geq 9$ enthält L_{C_n} das perfekte Gitter

$$L_{n-2} = \langle (1, 1, \dots, 1, 1), (1, 2, \dots, n-1, n) \rangle^\perp \leq \mathbb{Z}^n.$$

(siehe Satz (2.7)) Mit Satz (1.21) bleibt zu zeigen, dass die Minimalvektoren von L_{C_n} , welche nicht orthogonal zu $(1, 2, \dots, n-1, n)$ sind, den Raum $\langle (1, 1, \dots, 1, 1) \rangle^\perp \leq \mathbb{R}^n$ erzeugen. Betrachte dazu die $n - 1$ Minimalvektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 + e_2 - e_4 - e_{n-1}, \\ v_2 &= e_2 + e_3 - e_5 - e_n, \\ v_i &= e_1 + e_{i-1} - e_i - e_n, \quad i = 3, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Die Vektoren v_3, \dots, v_{n-1} sind linear unabhängig und ihr Orthogonalraum wird von

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 0, \dots, 0, 1), \\ w_2 &= (1, 2, \dots, n-2, n-1, 0), \\ w_3 &= (1, 1, \dots, 1, 1) \end{aligned}$$

aufgespannt. Es gilt

$$(w_1, v_2) = -1, (w_2, v_2) = 0 \text{ und } (w_2, v_1) = -n,$$

also wird der Orthogonalraum von $\langle(1, 1, \dots, 1, 1)\rangle$ von den $n - 1$ linear unabhängigen Vektoren v_1, \dots, v_{n-1} erzeugt.

Für den allgemeinen Fall ist zu zeigen, dass die Matrizen $(x^{\text{tr}}x)_{x \in \text{Min}(L_G)}$ einen $\frac{n(n-1)}{2}$ -dim. Teilraum in $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ erzeugen. Hierfür werden Teilmatrizen betrachtet und die Aussage auf die Perfektheit geeigneter Teilgitter von L_G zurück geführt. Zunächst wird eine Hilfsaussage gezeigt: Jedes $0 \neq g \in G$ ist in einer Untergruppe $H \leq G$ enthalten, so dass L_H perfekt ist.

Falls eine Primzahl $p \geq 7$ existiert, die $|G|$ teilt, gilt die Aussage bereits, da entweder $|g| \geq 7$ ist (und die Gitter L_{C_7}, L_{C_8} sind perfekt) oder es ex. eine zyklische Gruppe in G welche Ordnung ≥ 7 hat und zu $|g|$ teilerfremd ist. Seien also 2, 3, 5 die einzigen Primteiler von G .

Falls 5 und entweder 2 oder 3 die Ordnung von G teilen, ist jedes Element von G in einer zyklischen Gruppe mit Ordnung ≥ 10 enthalten. Falls 5 der einzige Primteiler von $|G|$ ist, ist jedes Element entweder in einer zyklischen Gruppe mit Ordnung ≥ 25 enthalten oder in einer $C_5 \times C_5$ und $L_{C_5 \times C_5}$ ist perfekt.

Es bleibt also noch der Fall, dass 2, 3 die einzigen Primteiler von G sind. Relevant sind hier die Fälle, dass jede zyklische Gruppe, in der ein festes $g \in G$ enthalten ist, Ordnung 2, 3, 4 oder 6 hat. Falls g nur in zyklischen Gruppen der Ordnung 2 oder 4 enthalten ist, ist 2 der einzige Primteiler von $|G|$ und die Aussage folgt aus der Perfektheit von $L_{C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2}, L_{C_2 \times C_2 \times C_4}$ und $L_{C_2 \times C_8}$. Falls g nur in zyklischen Gruppen der Ordnung 3 enthalten ist, folgt die Aussage aus der Perfektheit von $L_{C_3 \times C_3}$. Falls g in einer zyklischen Gruppe der Ordnung 6 enthalten ist, folgt die Aussage aus der Perfektheit von $L_{C_6 \times C_2}$ und $L_{C_6 \times C_3}$.

Die Behauptung ist nun, dass jede Matrix im Erzeugnis von $(x^{\text{tr}}x)_{x \in \text{Min}(L_G)}$ beliebige Nebendiagonalelemente hat. Sei dafür (i, j) der Index eines solchen Elements. Da die Operation von G auf sich selber Automorphismen von L_G induziert, kann ohne Einschränkung $g_i = 0$ angenommen werden. Nun ist aber g_j in einer Untergruppe $H \leq G$ enthalten, so dass L_H perfekt ist. Daraus folgt die Behauptung. \square

4.2 Die Automorphismengruppe

In [Mar03], Abschnitt 5.3, wird bewiesen, dass die Automorphismengruppe von L_{C_n} für $n \geq 12$ isomorph zu $C_2 \times (G \rtimes \text{Aut}(G))$ ist. In diesem Abschnitt wird versucht, diese Aussage für alle endlichen abelschen Gruppen der Ordnung ≥ 12 zu zeigen.

Bemerkung 4.6 *Für zwei isomorphe Gruppen G und H sind die Gitter L_G und L_H isometrisch und aus den Minimalvektoren von L_G , welche zu Gleichungen der Form $0 + g_j = g_k + g_l$ korrespondieren, lässt sich eine Präsentation der Gruppe G rekonstruieren.*

Bemerkung 4.7 *$\text{Aut}(L_G)$ enthält das Holomorph $G \rtimes \text{Aut}(G)$.*

BEWEIS $G \rtimes \text{Aut}(G)$ operiert auf G durch Permutation und induziert auf diese Weise Automorphismen von $\mathbb{R}L_G$. Diese permutieren L_G und erhalten die Skalarprodukte, also kann $G \rtimes \text{Aut}(G)$ als Untergruppe von $\text{Aut}(L_G)$ aufgefasst werden.

Bemerkung 4.8 *Sei $\text{Aut}(L_G) \leq \text{Aut}(\mathbb{R}L_G) \leq \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und $H \cong S_{n-1}$ die Menge der Permutationsmatrizen in $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ welche den ersten Eintrag fixieren. Dann gilt $\text{Aut}(L_G) \cap H \cong \text{Aut}(G)$.*

BEWEIS Sei ohne Einschränkung $g_1 = 0$. Jeder Automorphismus von G induziert durch Operation auf $\{g_2, \dots, g_n\}$ ein Element von H . Dies ist gleichzeitig ein Automorphismus von L_G . Also ex. ein Monomorphismus $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(L_G) \cap H$. Sei nun $\tau \in \text{Aut}(L_G) \cap H$. Dann gilt

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

für ein $\sigma \in S_{n-1}$ und jedes $(x_1, \dots, x_n) \in L_G$. Zu zeigen ist, dass die Bijektion

$$\varphi : G \rightarrow G, g_i \mapsto \begin{cases} g_1, & i = 1 \\ g_{\sigma(i)}, & i \geq 2 \end{cases}$$

ein Homomorphismus ist. Seien dazu $g_a, g_b \in G$ und für $g_c := g_a + g_b$ betrachte den Vektor $v \in \text{Min}(L_G)$ der zu der Gleichung $0 + g_c = g_a + g_b$ korrespondiert. Da $\tau(v)$ ebenfalls in $\text{Min}(L_G)$ liegt, folgt dass $0 + g_{\sigma(c)} = g_{\sigma(a)} + g_{\sigma(b)}$ gilt, also insgesamt

$$\varphi(g_a + g_b) = \varphi(g_c) = g_{\sigma(c)} = g_{\sigma(a)} + g_{\sigma(b)} = \varphi(g_{\sigma(a)}) + \varphi(g_{\sigma(b)}).$$

□

Korollar 4.9 *Der Stabilisator von L_G in $\text{Aut}(A_{n-1})$ ist isomorph zu $C_2 \times (G \rtimes \text{Aut}(G))$ falls $n \geq 3$ ist.*

BEWEIS Es gilt $\text{Aut}(A_{n-1}) \cong C_2 \times S_n$, wobei S_n auf den Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n operiert. Sei $\varphi \in \text{Stab}_{\text{Aut}(A_{n-1})}(L_G)$ und ohne Einschränkung sei $\varphi \in S_n$. Insbesondere gilt dann $\varphi \in \text{Aut}(L_G)$. Es existiert ein $\varphi' \in G \leq \text{Aut}(L_G)$, so dass $(\varphi' \circ \varphi)(e_1) = e_1$. Die Komposition ist also ein Automorphismus von L_G , welcher die Vektoren e_2, \dots, e_n permutiert. Mit Bemerkung (4.8) folgt die Behauptung. \square

Um die volle Automorphismengruppe von L_G zu bestimmen, muss überprüft werden, ob Automorphismen existieren, die A_{n-1} nicht stabilisieren. Bis Ordnung 11 existieren diese zum Teil:

$G \cong$	$ \text{Aut}(L_G) $	$\frac{ \text{Aut}(L_G) }{ C_2 \times (G \rtimes \text{Aut}(L_G)) }$
C_3	$2^3 \cdot 3$	1
C_4	2^4	1
$C_2 \times C_2$	$2^4 \cdot 3$	1
C_5	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	6
C_6	$2^3 \cdot 3$	1
C_7	$2^5 \cdot 3 \cdot 7$	8
C_8	2^8	4
$C_2 \times C_4$	$2^{10} \cdot 3$	24
$C_2 \times C_2 \times C_2$	$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	240
C_9	$2^3 \cdot 3^4$	6
$C_3 \times C_3$	$2^8 \cdot 3^5$	72
C_{10}	$2^5 \cdot 3 \cdot 5$	6
C_{11}	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	12

Für $12 \leq |G| \leq 25$ ist $\text{Aut}(L_G)$ isomorph zu $C_2 \times (G \rtimes \text{Aut}(G))$. Das legt die Vermutung nahe, dass diese Aussage für alle G mit $|G| \geq 12$ gilt. Dafür reicht es zu zeigen, dass

$$\min(L_G^\#) = \min(A_{n-1}^\#) = \frac{n-1}{n} \text{ und } \text{Min}(L_G^\#) = \text{Min}(A_{n-1}^\#)$$

gilt. Tatsächlich stimmt diese Aussage für $15 \leq |G| \leq 25$ (im Fall $G \cong C_{14}$ hat $L_G^\#$ genau 2 Vektoren mit Länge $\frac{7}{8}$). Für zyklische Gruppen folgt die Aussage aus [Mar03], Theorem 5.3.7.

4.3 Starke Eutaxie

Fukshansky et. al. zeigten im Preprint [BFGM15b], dass das Gitter L_G genau dann stark eutaktisch ist, wenn n ungerade ist oder $G \cong C_2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt. In diesem Abschnitt wird ein alternativer Beweis dieser Aussage vorgestellt, der ohne Einbettung funktioniert und die zugrunde liegende Gruppenstruktur ausnutzt.

Satz 4.10 *Sei n gerade und G nicht elementar-abelsch. Dann ist L_G nicht stark eutaktisch.*

BEWEIS Nach Voraussetzung gilt $1 < \kappa < n$. Sei $y \in \text{Min}(L_G)$ beliebig. Mit Satz (1.20) genügt es zu zeigen, dass

$$\sum_{x \in \text{Min}(L_G)} (x, y)^2 \neq \frac{4n(n^2 + \kappa - 4n + 2)}{n - 1}$$

gilt. Die Skalarprodukte $(x, y)^2$ liegen in \mathbb{Z} , insbesondere gilt dies also auch für die Summe. Es gilt

$$(n^2 + \kappa - 4n + 2) = (n - 1)(n - 3) + (\kappa - 1)$$

also

$$\frac{4n(n^2 + \kappa - 4n + 2)}{n - 1} = 4n(n - 3) + 4n \frac{\kappa - 1}{n - 1}.$$

Da $n - 1$ ungerade ist, haben $4n$ und $n - 1$ keine gemeinsamen Primteiler, die Summe liegt also in \mathbb{Z} genau dann wenn $\kappa - 1$ von $n - 1$ geteilt wird. Dies ist aber nur der Fall wenn $\kappa = 1$ oder $\kappa = n$ gilt. \square

Satz 4.11 *Sei G elementar abelsch. Dann ist L_G stark eutaktisch.*

BEWEIS Da G elementar abelsch ist, gilt $G \cong \mathbb{F}_p^k$ und $\text{Aut}(G) \cong \text{GL}_k(\mathbb{F}_p)$. Das Holomorph von G ist isomorph zu einer Untergruppe H von $\text{Aut}(L_G)$ und operiert 2-fach transitiv auf G . Sei

$$\chi = \sum a_i \phi_i, \phi_i \text{ irreduzibel}$$

der zugehörige Permutationscharakter. Dann ist

$$2 = |(G \times G) / H| = \langle \chi^2, 1_H \rangle = \langle \chi, \chi \rangle = \sum a_i^2.$$

Also gilt $\chi = 1_H + \phi$, und da $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ ist die Darstellung absolut irreduzibel mit zugehörigem Modul $\mathbb{R} L_G$ und Komplement $\langle (1, \dots, 1) \rangle$. Die Behauptung folgt nun aus [Mar03], Theorem 3.6.6. \square

Satz 4.12 Sei n ungerade. Dann ist L_G stark eutaktisch.

Für $z \in G$ sei $t_z \in \{1, \dots, n\}$ das eindeutige Element mit $2g_{t_z} = z$ und

$$R_z := \{(a, b) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid g_a + g_b = z, a \neq b\}$$

$$S_z := \{(a, b) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid g_a + g_b = z\} = R_z \cup \{(t_z, t_z)\}.$$

Es gilt $S_z = \{(a, \varphi(a)) \mid a \in \{1, \dots, n\}\}$ für eine Bijektion φ , deren einziger Fixpunkt t_z ist.

Sei $(f_1 := e_1 - e_2, \dots, f_{n-1} := e_1 - e_n)$ eine Basis von $\mathbb{R} A_{n-1} = \mathbb{R} L_G$ und sei $A \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ die Matrix deren i -te Spalte der (transponierte) Vektor f_i ist, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 4.13 Für alle $j, k \in \{1, \dots, n-1\}$ gelten die folgenden Identitäten:

$$(i) \sum_{a=1}^n A_{a,j} = 0.$$

$$(ii) \sum_{(a,b) \in S_z} A_{a,j} A_{a,k} = \sum_{a=1}^n A_{a,j} A_{a,k} = (f_j, f_k) \text{ für alle } z \in G.$$

$$(iii) \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} A_{a,j} A_{b,k} = \sum_{a,b=1}^n A_{a,j} A_{b,k} = \left(\sum_{a=1}^n A_{a,j} \right) \left(\sum_{b=1}^n A_{b,k} \right) = 0.$$

$$(iv) \sum_{(a,b) \in S_z} \sum_{(c,d) \in S_z} A_{a,j} A_{c,k} = \sum_{(a,b) \in S_z} A_{a,j} \left(\sum_{(c,d) \in S_z} A_{c,k} \right) = 0 \text{ für alle } z \in G.$$

$$(v) \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} A_{t_z,j} A_{t_z,k} = n \sum_{z \in G} A_{t_z,j} A_{t_z,k} = n(f_i, f_j).$$

Bei (iv) gilt die Aussage auch für die Summanden $A_{b,j} A_{c,k}$, $A_{b,j} A_{d,k}$ und $A_{a,j} A_{d,k}$.

Sei $\text{Min}(L_G) = \{u_1, \dots, u_m\}$ mit $m = \frac{n(n-1)(n-3)}{4}$ da n ungerade ist. Zu zeigen ist, dass

$$\sum_{i=1}^m (u_i, f_j)(u_i, f_k) = 4 \frac{m}{n-1} (f_j, f_k) = n(n-3)(f_j, f_k)$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt. Für $u = (e_a + e_b - e_c - e_d) \in \text{Min}(L_G)$ gilt

$$(u, f_j) = (A_{a,j} + A_{b,j} - A_{c,j} - A_{d,j}).$$

Sei

$$f_{j,k}(a, b, c, d) := (A_{a,j} + A_{b,j} - A_{c,j} - A_{d,j})(A_{a,k} + A_{b,k} - A_{c,k} - A_{d,k}),$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (u_i, f_j)(u_i, f_k) &= \sum_{z \in G} \frac{1}{2} \sum_{(a,b) \in R_z} \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \\ R_z \setminus \{(a,b), (b,a)\}}} f_{j,k}(a, b, c, d) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in R_z} \left(\sum_{(c,d) \in R_z} f_{j,k}(a, b, c, d) - \underbrace{f_{j,k}(a, b, a, b)}_{=0} - \underbrace{f_{j,k}(a, b, b, a)}_{=0} \right) \end{aligned}$$

Satz 4.14 *Es gilt*

$$\sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in R_z} \sum_{(c,d) \in R_z} f_{j,k}(a, b, c, d) = (4n^2 - 12n)(f_j, f_k).$$

BEWEIS

$$\begin{aligned} &\sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in R_z} \sum_{(c,d) \in R_z} f_{j,k}(a, b, c, d) \\ &= \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in R_z} \left(\sum_{(c,d) \in S_z} f_{j,k}(a, b, c, d) - f_{j,k}(a, b, t_z, t_z) \right) \\ &= \sum_{z \in G} \left(\sum_{(a,b) \in S_z} \left[\sum_{(c,d) \in S_z} f_{j,k}(a, b, c, d) - f_{j,k}(a, b, t_z, t_z) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{(c,d) \in S_z} f_{j,k}(t_z, t_z, c, d) + \underbrace{f_{j,k}(t_z, t_z, t_z, t_z)}_{=0} \right) \\ &= \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} \sum_{(c,d) \in S_z} f_{j,k}(a, b, c, d) - \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} f_{j,k}(a, b, t_z, t_z) - \sum_{z \in G} \sum_{(c,d) \in S_z} \underbrace{f_{j,k}(t_z, t_z, c, d)}_{=f_{j,k}(c,d,t_z,t_z)} \\ &= \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} \sum_{(c,d) \in S_z} f_{j,k}(a, b, c, d) - 2 \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} f_{j,k}(a, b, t_z, t_z) \end{aligned}$$

Um die Behauptung zu zeigen, werden nun beide Summanden einzeln betrachtet. Hierfür wird $f_{j,k}$ ausmultipliziert und Bemerkung (4.13) auf jeden Summanden angewendet.

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} \sum_{(c,d) \in S_z} f_{j,k}(a, b, c, d) \\
&= \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} \sum_{(c,d) \in S_z} \left(A_{a,j}A_{a,k} + A_{a,j}A_{b,k} - A_{a,j}A_{c,k} - A_{a,j}A_{d,k} + A_{b,j}A_{a,k} + A_{b,j}A_{b,k} \right. \\
&\quad \left. - A_{b,j}A_{c,k} - A_{b,j}A_{d,k} - A_{c,j}A_{a,k} - A_{c,j}A_{b,k} + A_{c,j}A_{c,k} + A_{c,j}A_{d,k} \right. \\
&\quad \left. - A_{d,j}A_{a,k} - A_{d,j}A_{b,k} + A_{d,j}A_{c,k} + A_{d,j}A_{d,k} \right) \\
&= \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} n \left(A_{a,j}A_{a,k} + A_{a,j}A_{b,k} + A_{b,j}A_{a,k} + A_{b,j}A_{b,k} \right) \\
&\quad + \sum_{z \in G} \sum_{(c,d) \in S_z} n \left(A_{c,j}A_{c,k} + A_{c,j}A_{d,k} + A_{d,j}A_{c,k} + A_{d,j}A_{d,k} \right) \\
&\quad - \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} \sum_{(c,d) \in S_z} \left(A_{a,j}A_{c,k} + A_{a,j}A_{d,k} + A_{b,j}A_{c,k} + A_{b,j}A_{d,k} + A_{c,j}A_{a,k} + A_{c,j}A_{b,k} \right. \\
&\quad \quad \left. + A_{d,j}A_{a,k} + A_{d,j}A_{b,k} \right) \\
&= \sum_{z \in G} 2n(f_j, f_k) + \sum_{z \in G} 2n(f_j, f_k) \\
&= 4n^2(f_j, f_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad & \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} f_{j,k}(a, b, t_z, t_z) \\
&= \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} \left((A_{a,j} + A_{b,j} - 2A_{t_z,j})(A_{a,k} + A_{b,k} - 2A_{t_z,k}) \right) \\
&= \sum_{z \in G} \sum_{(a,b) \in S_z} \left(A_{a,j}A_{a,k} + A_{a,j}A_{b,k} - 2A_{a,j}A_{t_z,k} + A_{b,j}A_{a,k} + A_{b,j}A_{b,k} - 2A_{b,j}A_{t_z,k} \right. \\
&\quad \left. - 2A_{t_z,j}A_{a,k} - 2A_{t_z,j}A_{b,k} + 4A_{t_z,j}A_{t_z,k} \right) \\
&= n(f_j, f_k) + n(f_j, f_k) + 4n(f_j, f_k) \\
&= 6n(f_j, f_k)
\end{aligned}$$

□

Insgesamt folgt also $\sum_{i=1}^m (u_i, f_j)(u_i, f_k) = \frac{1}{4}(4n^2 - 12n)(f_j, f_k) = n(n-3)(f_j, f_k)$ und das

Gitter L_G ist im Fall n ungerade stark eutaktisch.

Barnes bewies in [Bar57b], dass die Gitter L_{C_n} für $n \geq 7$ eutaktisch, also insgesamt extrem, sind. Leider lässt sich sein Beweis nicht auf alle L_G verallgemeinern, da er im Fall n ungerade den (eindeutigen) Eutaxie-Koeffizienten angab und den Beweis für n gerade nur als „relativ aufwendig“ beschreibt. Allerdings kann man mit Hilfe des `lrs`-Programmes [Avi] und den Algorithmen, die in [Rie06] angegeben sind, zeigen, dass alle L_G für $2 \leq n \leq 16$ eutaktisch sind (siehe Anhang für die Implementierung).

5 Anhang

In diesem Kapitel werden die Implementierungen der Algorithmen der schwachen arithmetischen Laminierung sowie der perfekten Laminierung in Magma (siehe [BCP97]) angegeben. Zusätzlich wird die Eingabe für das lrs-Programm (siehe [Avi]) beschrieben, falls man mit Hilfe der Algorithmen in [Rie06] ein perfektes Gitter auf Eutaxie testen möchte.

```
OperationOnResClas := function( L, ResClas )
  AutL := AutomorphismGroup(L);
  Gen := [ ChangeRing(g,Rationals()) : g in Generators(AutL) ];
  Grp := PermutationGroup< #ResClas | [ Sym(#ResClas)! [ Position(
    ResClas, { @ rc * Gen[j] : rc in ResClas[i] @ } ) : i in
    [1..#ResClas] ] : j in [1..#Gen] ]>;
  Orb := Orbits(Grp);
  Tr := { @ O[1] : O in Orb @ };
  return { @ ResClas[i][1] : i in Tr @ };
end function;
```

```
WeaklyArithLam := function( L )
  n := Dimension(L);
  G := Matrix( Integers(),n,n, [<i,j, Round( GramMatrix(L)[i][j] )>:
    i,j in [1..n]] );
  Grat := G * IdentityMatrix( Rationals(), n );
  Bd := Grat^(-1);
  G2,A,C := SmithForm(G);
  B2 := Transpose(C) * IdentityMatrix( Rationals(), n );
  Bd2 := Transpose(A^(-1)) * Bd;
  L2 := Lattice( B2, Grat );

  ResClas := { @ @ };
  C := CartesianProduct( [ [1..G2[i][i] ] : i in [1..n] ] );
```

```

for c in C do
  v := VectorSpace( Rationals(), n )!0;
  for i in [1..#c] do
    v := v + c[i] * Bd2[i];
  end for;
  CV := ClosestVectors( L2, v );
  ResClas := ResClas join { @ { @ v - CV[i] : i in [1..#CV] @ } @ };
end for;

ResClas := OperationOnResClas( L, ResClas );

Laminations := { @ @ };

for rc in ResClas do
  GLaminated := InsertBlock( Matrix( Rationals(), n+1, n+1, [ ] ),
    Grat, 1, 1 );
  for i in [1..n] do
    GLaminated[n+1][i] := (rc * Grat)[i];
    GLaminated[i][n+1] := (rc * Grat)[i];
  end for;
  GLaminated[n+1][n+1] := Minimum(L);
  Laminations := Laminations join { @ LatticeWithGram(
    GLaminated ) @ };
end for;

NonIsoIndex := { @ i : i in [1..#Laminations] @ };
for i in [1..#NonIsoIndex] do
  Iso := { @ @ };
  for j in [i+1..#NonIsoIndex] do
    if IsIsomorphic( Laminations[NonIsoIndex[i]],
      Laminations[NonIsoIndex[j]] ) then
      Iso := Iso join { @ NonIsoIndex[j] @ };
    end if;
  end for;
  NonIsoIndex := NonIsoIndex diff Iso;
end for;

Laminations := Laminations[[ i : i in NonIsoIndex ]];

d := Minimum( { @ Determinant( Lat ) : Lat in Laminations @ } );
LamMinDet := { @ @ };

```

```

for Lat in Laminations do
  if Determinant(Lat) eq d then
    LamMinDet := LamMinDet join {@ Lat @};
  end if;
end for;

return LamMinDet;

end function;

PerfectLam := function( L )
  n := Dimension(L);
  G := Matrix( Integers(),n,n, [<i,j,Round( GramMatrix(L)[i][j] )>:
    i,j in [1..n]] );
  Grat := G * IdentityMatrix( Rationals(), n );
  Bd := Grat^(-1);
  G2,A,C := SmithForm(G);
  B2 := Transpose(C) * IdentityMatrix( Rationals(), n );
  Bd2 := Transpose(A^(-1)) * Bd;
  L2 := Lattice( B2, Grat );

  ResClas := {@ @};
  C := CartesianProduct( [ [1..G2[i][i]] : i in [1..n] ] );
  for c in C do
    v := VectorSpace( Rationals(), n )!0;
    for i in [1..#c] do
      v := v + c[i] * Bd2[i];
    end for;
    CV := ClosestVectors( L2, v );
    CVinResClas := {@ v - CV[i] : i in [1..#CV] @};
    if Rank( Matrix( Rationals(), #CVinRes-1, n, [<i,j,CVinRes[1][j]
      -CVinRes[i+1][j]> : i in [1..#CVinRes-1], j in [1..n] ] ) )
      ge n then
      ResClas := ResClas join {@ CVinResClas @};
    end if;
  end for;

  ResClas := OperationOnResClas( L, ResClas );

  Laminations := {@ @};

```

```

for rc in ResClas do
  GLaminated := InsertBlock( Matrix( Rationals(), n+1, n+1, [] ),
    Grat, 1, 1 );
  for i in [1..n] do
    GLaminated[n+1][i] := (rc * Grat)[i];
    GLaminated[i][n+1] := (rc * Grat)[i];
  end for;
  GLaminated[n+1][n+1] := Minimum(L);
  if IsPositiveDefinite( GLaminated ) then
    Laminations := Laminations join { @ LatticeWithGram(
      GLaminated ) @ };
  end if;
end for;

NonIsoIndex := { @ i : i in [1..#Laminations] @ };
for i in [1..#NonIsoIndex] do
  Iso := { @ @ };
  for j in [i+1..#NonIsoIndex] do
    if IsIsomorphic( Laminations[NonIsoIndex[i]],
      Laminations[NonIsoIndex[j]] ) then
      Iso := Iso join { @ NonIsoIndex[j] @ };
    end if;
  end for;
  NonIsoIndex := NonIsoIndex diff Iso;
end for;

Laminations := Laminations[[ i : i in NonIsoIndex ]];

return Laminations;

end function;

```

Sei L ein n -dimensionales perfektes Gitter. Dann existieren $\lambda_x, x \in \text{Min}(L)$, so dass

$$I_n = \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x (x^{\text{tr}} x).$$

Man möchte nun testen, ob L eutaktisch ist, d.h. ob die Koeffizienten so gewählt werden können dass alle $\lambda_x > 0$ sind. Sei dafür B eine Basis von L mit Gram-Matrix $G(B)$ und seien $\{x_1, \dots, x_s\}$ die Koordinatenvektoren der kürzesten Vektoren von L bezüglich der Basis B (hier reicht es nur einen Vertreter der Paare zu wählen). Für $i \in \{1, \dots, s\}$ sei $p_i \in \mathbb{R}^{n^2}$ der Vektor, der die Zeilen von $x_i G(B) x_i^{\text{tr}}$ enthält und sei $a \in \mathbb{R}^{n^2}$ der Vektor, der die Zeilen von $G(B)^{-1}$ enthält.

Falls die Lösung der folgenden linearen Optimierung strikt positiv ist, ist in jeder möglichen Wahl der λ_x ein Koeffizient negativ.

```

„name“
H-representation
begin
s + 1 n^2 + 1 rational
0 -p_1
0 -p_2
:
0 -p_s
100 -a
end
lponly
maximize 0 a

```

Falls die Lösung der folgenden linearen Optimierung strikt negativ ist, ist in jeder möglichen Wahl der λ_x ein Koeffizient Null.

```

„name“
H-representation
begin
s + 3 n^2 + 1 rational
0 -p_1
0 -p_2
:
0 -p_s
0 a

```

```

0 -a
100  $\sum p_i$ 
end
lponly
maximize 0 -  $\sum p_i$ 

```

Sind die obigen Lösungen Null, dann ist das Gitter eutaktisch und die folgende lineare Optimierung gibt die Eutaxie-Koeffizienten λ_x an.

```

„name“
H-representation
begin
 $2n^2 + s$   $s + 2$  rational
- $a^{\text{tr}}$   $0_{n^2 \times 1}$   $p_1^{\text{tr}}$   $\dots$   $p_s^{\text{tr}}$ 
 $a^{\text{tr}}$   $0_{n^2 \times 1}$   $-p_1^{\text{tr}}$   $\dots$   $-p_s^{\text{tr}}$ 
0 -1 1 0  $\dots$  0
0 -1 0 1  $\dots$  0
 $\vdots$ 
0 -1  $\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 1}_s$ 
end
lponly
maximize 0 1  $\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0}_s$ 

```

Literaturverzeichnis

- [Avi] D. Avis. The lrs homepage. <http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/C/lrs.html>.
- [Bac15] R. Bacher. Construction of some perfect integral lattices with minimum 4. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 27(3):655 – 687, 2015.
- [Bar57a] E.S. Barnes. The complete enumeration of extreme senary forms. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A(249):461 – 506, 1957.
- [Bar57b] E.S. Barnes. The perfect and extreme senary forms. *Canad. J. Math.*, 9:235 – 242, 1957.
- [Bar59] E.S. Barnes. The construction of perfect and extreme forms I. *Acta Arithmetica*, 5(1):57–79, 1959.
- [BCP97] Wieb Bosma, John Cannon, and Catherine Playoust. The Magma algebra system. I. The user language. *J. Symbolic Comput.*, 24:235 – 265, 1997.
- [BFGM15a] A. Boettcher, L. Fukshansky, S.R. Garcia, and H. Maharaj. On lattices generated by finite Abelian groups. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 29(1):382 – 404, 2015.
- [BFGM15b] A. Boettcher, L. Fukshansky, S.R. Garcia, and H. Maharaj. Spherical 2-designs and lattices from Abelian groups. Preprint, 2015.
- [Bli35] H.F. Blichfeldt. The minimum value of quadratic forms in six, seven and eight variables. *Math. Z.*, 39:1 – 15, 1935.
- [CK09] H. Cohn and A. Kumar. Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices. *Ann. of Math.*, 170(3):1003 – 1050, 2009.
- [CKM⁺16] H. Cohn, A. Kumar, S. Miller, D. Radchenko, and M. Viazovska. The sphere packing problem in dimension 24. Preprint, 2016.

- [CS99] J.H. Conway and N.J.A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer New York, 1999.
- [DSSV07] M. Dutour Sikirić, A. Schürmann, and F. Vallentin. Classification of eight dimensional perfect forms. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 13:21–32, 2007.
- [JC93] D-O. Jaquet-Chiffelle. Énumération complète des classes de formes parfaites en dimension 7. *Anm. Inst. Fourier*, 1(43):21–55, 1993.
- [KZ77] A. Korkine and G. Zolotareff. Sur les formes quadratiques positives. *Mathematische Annalen*, 11(2):242 – 292, 1877.
- [Mar96] J. Martinet. *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens*. Masson, Paris, 1996.
- [Mar03] J. Martinet. *Perfect Lattices in Euclidean Spaces*. Springer Verlag, Heidelberg, 2003.
- [MV05] J. Martinet and B. Venkov. On integral lattices having an odd minimum. *St. Petersburg Math. J.*, 16:507 – 539, 2005.
- [PP85] W. Plesken and M. Pohst. Constructing integral lattices with prescribed minimum. I. *Math. Comp.*, 45:209 – 221, 1985.
- [Rie06] C. Riener. On extreme forms in dimension 8. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 18:677 – 682, 2006.
- [Sha15] M. Sha. On the lattices from elliptic curves over finite fields. *Finite Field Appl.*, 31:84 – 107, 2015.
- [Ven01] B. Venkov. Réseaux et „designs“ sphériques. *Réseaux euclidiens, designs sphériques et groupes*, *L’Ens. Math., Monographie*, 37:10 – 86, 2001. Notes by J. Martinet.
- [Via16] M. Viazovska. The sphere packing problem in dimension 8. Preprint, 2016.
- [Vor08] G. Voronoï. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques : 1 Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. *J. reine angew. Math*, 133:97 – 178, 1908.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Aachen, den 27. September 2016

Simon Eisenbarth