6. Übung algebraische Zahlentheorie

Prof. Dr. Nebe **(SS 2016)**

Für einen kommutativen Ring R bezeichne $\mathrm{Spec}(R)$ die Menge der von (0) verschiedenen Primideale von R. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem Dedekindring R und M ein R-Modul so sei $M_\mathfrak{p} := M \otimes_R R_\mathfrak{p}$ die Komplettierung von M an $\mathfrak{p}$.

Aufgabe 1. Es sei R ein Dedekindring. Weiter seien V ein endlich dimensionaler $\mathrm{Quot}(R)$-Vektorraum und L, L' zwei volle R-Gitter in V. Zeigen Sie:

1. Ist M ein endlich erzeugter R-Modul mit $M_\mathfrak{p} = 0$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, so ist $M = 0$.
2. $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid L_\mathfrak{p} \neq L'_\mathfrak{p}\}$ ist endlich.
3. Es ist $L = L'$ genau dann wenn $L_\mathfrak{p} = L'_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ gilt.

Aufgabe 2. Sei R ein Noetherscher ganzabgeschlossener Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. Jedes von (0) verschiedene Primideal von R ist maximal, d.h. R ist ein Dedekindring.
2. Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ist $R_{(\mathfrak{p})}$ ein diskreter Bewertungsring.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Menge der Quadrate in $\mathbf{Z}_p^*$, $\mathbf{Z}_p$ sowie $\mathbf{Q}_p^*$. Bestimmen Sie ferner Erzeuger sowie den Isomorphietyp von $\mathbf{Z}_p^*/(\mathbf{Z}_p^*)^2$ bzw. $\mathbf{Q}_p^*/(\mathbf{Q}_p^*)^2$.

Hinweis: Im Fall $p > 2$ fixiere man ein Nichtquadrat $\varepsilon \in \mathbf{F}_p^*$. Der Fall $p = 2$ ist gesondert zu betrachten.

Aufgabe 4. Faktorisieren Sie $X^{15} - 1 \in \mathbf{Z}_p[X]$ für $p \in P := \{2, 3, 11\}$. Die auftretenden p-adischen Zahlen sind modulo p^4 zu approximieren. Bestimmen Sie ferner die Primidealzerlegung sowie die Trägheits- und Zerlegungsgrade von $p\mathbf{Z}[\zeta_{15}]$ in $\mathbf{Z}[\zeta_{15}]$ für alle $p \in P$.