1. Übung Codes und Invariantentheorie

Prof. Dr. G. Nebe **(WS 2022/23)**

Aufgabe 1. Sei

$$\mathcal{M} := \cup_{N=0}^{\infty}\{C \leq \mathbf{F}_2^N \mid C = C^{\perp}, \mathrm{wt}(c) \in 4\mathbf{Z} \text{ für alle } c \in C\}$$

die Menge aller selbstdualen doppeltgeraden linearen Codes über $\mathbf{F}_2$,
Bestimmen Sie eine (möglichst große) Matrixgruppe $\tilde{G} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ so dass die vollständigen Gewichtszähler der Codes in $\mathcal{M}$ invariant unter $\tilde{G}$ sind.
Zeigen Sie, dass die Länge N eines binären doppeltgeraden Codes immer durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 2. Sei

$$\mathcal{M}(p) := \cup_{N=0}^{\infty}\{C \leq \mathbf{F}_p^N \mid (1,\dots,1) \in C = C^{\perp}\}$$

die Menge aller selbstdualen linearen Codes über $\mathbf{F}_p$, die den *Einsvektor* $\mathbf{1} = (1,\dots,1)$ enthalten.
Bestimmen Sie eine (möglichst große) Matrixgruppe $\tilde{G}_p \leq \mathrm{GL}_p(\mathbf{C})$ so dass die vollständigen Gewichtszähler der Codes in $\mathcal{M}(p)$ invariant unter $\tilde{G}_p$ sind.
Berechnen Sie für $p = 3$ und $p = 5$ die Gruppe $\tilde{G}_p$ explizit (mit Hilfe eines Computeralgebrasystems), sowie die Gruppenordnung.
Zeigen Sie (für $p = 3$ und $p = 5$) dass die Längen der Codes aus $\mathcal{M}(p)$ durch $2p$ teilbar sind und sogar durch $4p$ falls $p \equiv 3 \pmod 4$ ist.
Bestimmen Sie für $p = 3$ bzw. $p = 5$ einen Code $\neq 0$ in $\mathcal{M}(p)$.

Die Aufgaben werden in der 2. Vorlesung kurz besprochen.